

1.2 Elastische Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung (ohne Spin)

- Rutherford WQ beschreibt Streuung an Punktladung (ohne Spins)

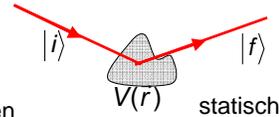
• Allg. wird WQ gegeben durch (s. Kap II):
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\vec{p}'|^2}{\beta \beta'}$$

M_{fi} für ausgedehnte Ladungsverteilung

a) Berechnung von M_{fi} (ohne Spins)

Bornsche Näherung:
$$\psi_{i,f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i\vec{p}_{i,f} \cdot \mathbf{x})$$

V = Normierungsvolumen



Übergangsamplitude

(stationäre Behandlung)

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle f | V(\vec{r}) | i \rangle \\ &= \int \psi_f^*(\vec{r}) V(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) d^3r \\ &= \int \exp(i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}) V(\vec{r}) d^3r \\ &= \int \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) V(\vec{r}) d^3r \end{aligned}$$

Potenzial $V(\vec{r}) = e\phi(\vec{r})$ und $\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})$

Mit Green'schem Theorem für skalare Felder u, v

$$\int (u\Delta v - v\Delta u) d^3x = 0$$

und $\Delta e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = -\vec{q}^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$ folgt

$$\begin{aligned} M_{fi} &= -\frac{e}{\vec{q}^2} \int \Delta\phi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r \\ &= +\frac{e}{\vec{q}^2} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r \\ &= +\frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \int f(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}) = Ze \cdot f(\vec{r}) \\ \int f(\vec{r}) d^3r = 1 \end{array} \right.$$

$$M_{fi} = +\frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \cdot F(\vec{q})$$

↑
Faktorisierung

$F(\vec{q})$ heißt Formfaktor =
Fourier-Transformierte der
Ladungsverteilung

(i) Punktladung

$$f(r) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \mapsto F(\vec{q}) = 1$$

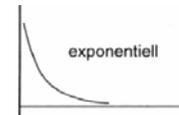
$$M_{fi} = -\frac{Ze^2}{\vec{q}^2} \quad (\text{s. auch Kap II})$$

(ii) Radialsymmetrische Ladungsverteilung (z.B. Kerne, Nukleonen) $f(\vec{r}) = f(r)$

$$F(\vec{q}) = \int f(r) e^{i\vec{q}|\vec{r}|\cos\theta} r^2 dr d\cos\theta d\varphi$$
$$= F(|\vec{q}|) = F(\vec{q}^2)$$

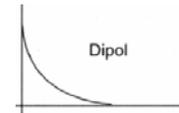
Beispiel: Exponentielle
Ladungsverteilung

$$f(\vec{r}) = \left(\frac{a^3}{8\pi}\right) \exp(-ar)$$



Dipol-Formfaktor

$$F(\vec{q}^2) = \frac{1}{(1 + \vec{q}^2/a^2)^2}$$



b) WQ für Elektronenstreuung (ohne Spin) an Ladungsverteilung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}}}_{\text{Faktorisierung (s.o.)}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

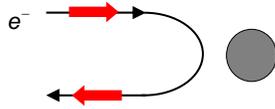
Faktorisierung (s.o.)

- Formfaktor enthält alle Informationen über Ladungsverteilung
- Formfaktor $F(\vec{q}^2) \rightarrow 1$ fuer $\vec{q}^2 \rightarrow 0$
- Für große q^2 nimmt Formfaktor ab: Die Auflösung des ausgetauschten Photons nimmt zu. Elektron "sieht" deshalb nur noch einen Teil der Ladung

1.3 Streuung von Spin 1/2 Elektronen

Bisher wurde Spin des Elektrons nicht berücksichtigt.

Streuung hochrelativistischer ($\beta \approx 1$) Elektronen an Spin 0 Zentrum:



Helizitätserhaltung und Drehimpuls-
erhaltung unterdrückt Rückwärtsstreuung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{d_{11}^2}{2} \right) \quad (\text{s. Kap IV})$$

Für den Fall beliebiger β findet man für Streuung von Spin 1/2 Elektronen an spinloser punktförmiger Ladung:

Mott WQ:
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Für e- Streuung (Spin 1/2) an ausgedehnter Ladungsverteilung (Spin 0):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

1.4 Elektronen-Kern Streuung

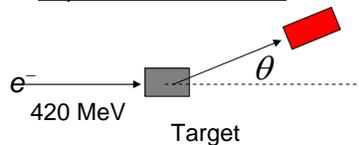
(vernachlässige Rückstoß)

a) Experimentelle Bestimmung von $|F(\vec{q}^2)|^2$

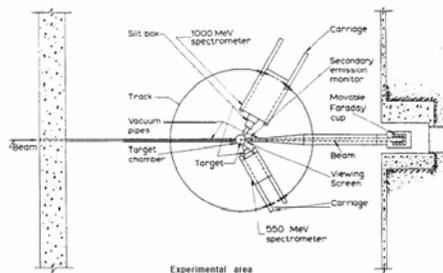
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}} = \underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}}_{\text{Theorie}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

Bei fester Energie der einfallenden Elektronen misst man für verschiedene Streuwinkel des Elektrons den WQ. Verschiedene Streuwinkel θ entsprechen verschiedenen q^2 Werten.

Experimenteller Aufbau



"Rutherford II"



R. Hofstadter, Stanford 1956/57
 500 MeV Linearbeschleuniger
 Nobelpreis 1961

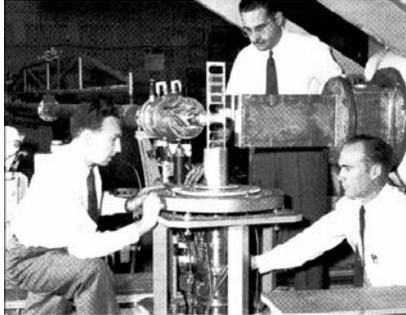
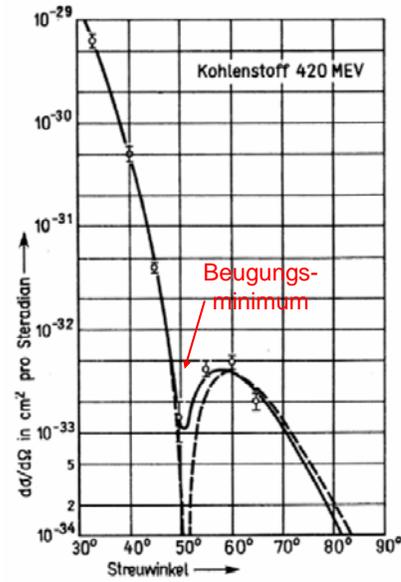


Abb. 3.3: Das Experiment von Robert Hofstadter (links) bei SLAC; neben ihm seine Kollegen Lance Rogers (oben) und Bud Bankers (Foto SLAC).



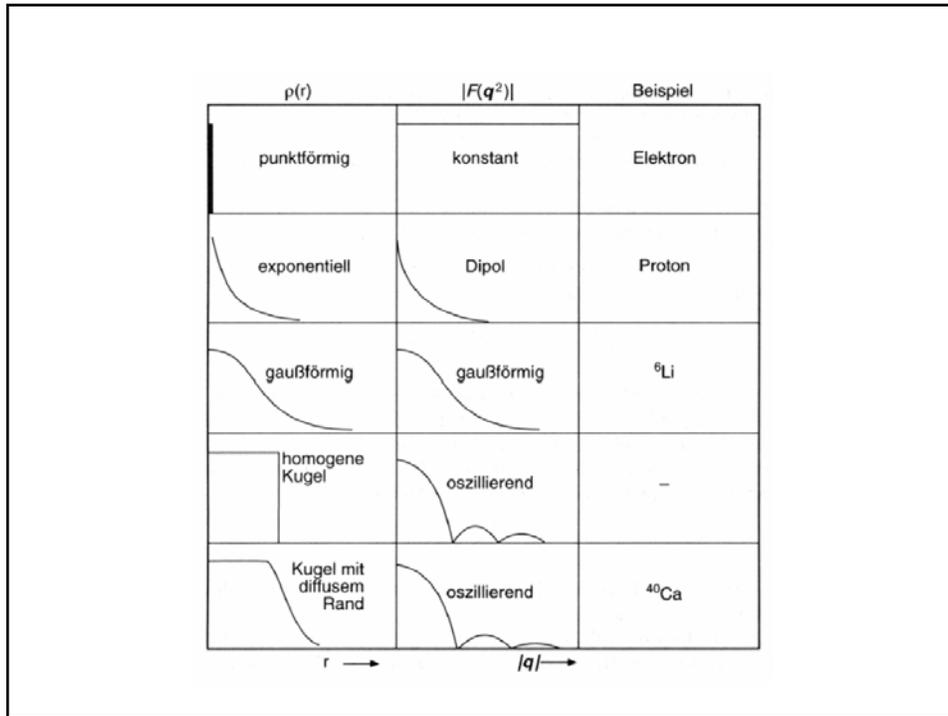
b) Vom Formfaktor zur Kernstruktur

In Praxis kann Formfaktor nur in einem begrenzten q^2 Bereich gemessen werden, so dass eine Fourier-Rücktransformation nicht möglich ist.

Stattdessen wählt man verschiedene Modell Ansätze zur Beschreibung der Ladungsverteilung: Fourier-Transformierte des Modells wird an gemessenen Formfaktor angepasst und bestimmt so die freien Modellparameter.

Beispiele:

Ladungsverteilung $f(r)$	Fourierfaktor $F(q^2)$
Punkt $\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$	1 konstant
exponentiell $\frac{a^3}{8\pi} \cdot \exp(-ar)$	$\left(1 + \frac{q^2}{a^2}\right)^{-2}$ Dipol
Gauß $\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{-a^2 r^2}{2}\right)$	$\exp\left(\frac{-q^2}{2a^2}\right)$ Gauß
homogene Kugel $\begin{cases} C & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$	$3 \alpha^{-3} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ oszillierend (mit $\alpha = qR$)



Bemerkungen zum Formfaktor:

- Je ausgedehnter die Ladungsverteilung desto stärker fällt Formfaktor ab.
- Je punktförmiger die Ladungsverteilung desto glatter ist der Formfaktor.
- Bei Streuung an scharf begrenzten Ladungsverteilungen kommt es zur Ausbildung von scharfen Beugungsmaxima.

Bei homogenen Kugeln erhält man Maximum bei:

$$\frac{|\vec{q}|R}{\hbar} \approx 4.5$$

Herleitung: s. Übungsblatt

Beispiel: Streuung an Kohlenstoff, Beugungsminimum bei $\theta \approx 51^\circ$

Elektronenenergie $E = 420 \text{ MeV}$

$$q^2 = 4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = (362 \text{ MeV})^2$$

$$q/\hbar c = \frac{362 \text{ MeV}}{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} = 1.8 \text{ fm}^{-1}$$

$$R \approx \frac{4.5}{1.8} \text{ fm} = 2.5 \text{ fm}$$

Bemerkungen zum Formfaktor:

- Außer aus Beugungsmaxima kann man auch aus dem Verlauf von $|F(\vec{q}^2)|^2$ bei $q^2 \rightarrow 0$ Information über die Ladungsverteilung gewinnen:

Formfaktor für kleine q^2

$$\begin{aligned} F(\vec{q}^2) &= \int f(r) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r \\ &= \int f(r) \left[1 + i\vec{q}\vec{r} - \frac{1}{2}(\vec{q}\vec{r})^2 + \dots \right] d^3r \\ &= 1 - \frac{1}{6} \vec{q}^2 \underbrace{\int \vec{r}^2 f(r) d^3r}_{\langle \vec{r}^2 \rangle} \end{aligned}$$

$\langle \vec{r}^2 \rangle$ = mittlerer quadratischer Radius der Ladungsverteilung

→ $\langle \vec{r}^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF(\vec{q}^2)}{d\vec{q}^2} \right|_{\vec{q}^2 \rightarrow 0} \times \hbar^2$ in SI Einheiten