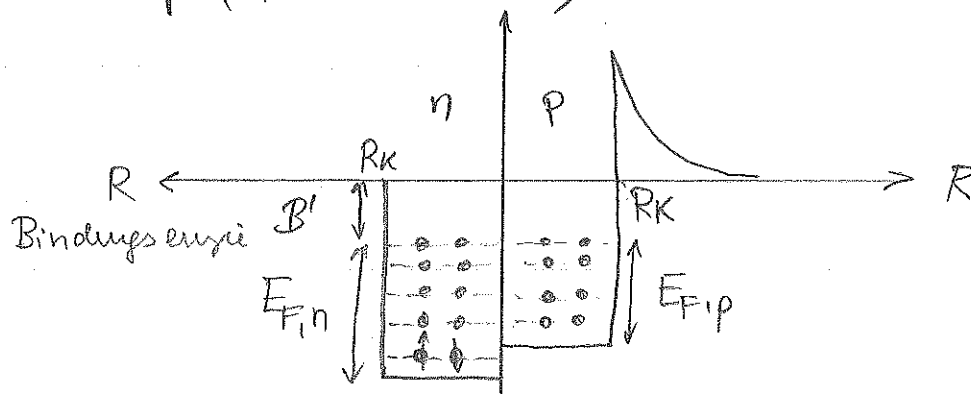


7.3 Fermi-Gas-Modell des Kerns

Eine Reihe von Kerneigenschaften lassen sich besser durch Modell unabh. Teilchen in einem „effektiven Potential“ als durch das Modell stark miteinander WW. Nachbarn des Tröpfchen-Modells beschreiben.

Einfachster Ansatz zur Behandlung des Nukleons:

- Kern = Fermi-Gas freier Nukleonen, die sich innerhalb Kugel mit Radius $R_K = R_0 \cdot A^{1/3}$ bewegen.
- Protonen + Neutronen unterliegen der Pauli-Regel
- Beschreibung durch je einen Potentialtopf für n (nur starke WW) und p (+ Coulomb WW):



Die Temperatur des Fermi-Gases wird so niedrig angenommen, daß alle Fermionen die niedrigsten Energiezustände bis zur Fermi-Energie E_F besetzen: „entartetes Fermi-gas“

Zur Berechnung der Fermi-Energien muß die Zustandsdichte und die Zahl der Nukleonen berücksichtigt werden.

Die Zustandsdichte ergibt sich aus 6-dim. Phasenraum,
 → Zahl der Zustände dn für Nukleonen mit $p \in [p, p+dp]$:

$$dn = \frac{V \cdot 4\pi \cdot p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (\text{s. Kap 2.})$$

→ Gesamtzahl der Zustände n mit $p < p_F = \sqrt{2mE_F}$

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \Rightarrow \text{Zahl von } p+n: \left\{ N, Z = \frac{V (p_F^{n,p})^3}{3\pi^2 \cdot \hbar^3} \right.$$

x 2 wegen Spin ↑↓

Mit $R_K = R_0 \cdot A^{1/3}$ ergibt sich $V = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \cdot A$.

Für symmetrische Kerne $Z = N = \frac{A}{2}$ ergibt sich dann für $p_F^{n,p}$:

$$p_F^{n,p} = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \cdot \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}$$

bzw. $E_F^{n,p} = \frac{(p_F^{n,p})^2}{2m_{n,p}} \approx 33 \text{ MeV}$ ↑ Erinnerung: Unschärfe Relation:
 $\rightarrow \sim 200 \text{ MeV für } R_0 \approx 1 \text{ fm}$

Bem: [Nucleonen bewegen sich also mit relativ großem Impuls frei im Kern:] Berechneter Fermi-Impuls wird durch quasi-elastische e-Kern-Streuung in der Tat bestätigt!

Mit der mittleren Bindungsenergie eines Nucleons von $\sim 8 \text{ MeV}$ ergibt sich also eine Potentialtopf-Tiefe V_0 :

$$V_0 = E_F + B' \approx 33 \text{ MeV} + 8 \text{ MeV} = 41 \text{ MeV}$$

Kinetische Energie der Nucleonen ist also mit Potentialtopftiefe vergleichbar (\rightarrow relativ seltsam die Bindung der Nucleonen).

7.4 Schalenmodell der Kerne

Evidenzen für eine Schalenstruktur der Kerne:

- (i) Kernspektroskopie zeigt Anregungszustände der Kerne, die unter Aussenden von γ -Quanten zerfallen
- (ii) Nuklide mit magischer Zahl (2, 8, 20, 28, 50, 82) von Protonen und Neutronen sind besonders stabil: deutet auf sehr stabile abgeschlossene Schalen hin.
(große Energie um Nukleon aus Kern zu lösen, für $A+1$ hin gegen wenig Energie)

Um die Schalenstruktur zu verstehen, muß die Schrödingergl. gelöst werden, wobei man verschiedene Ansätze eines radial-symmetrischen Potentials machen kann: Nukleon im effektiven Potential der Rest-Nukleonen.

↳ Für radial-symmetrisches Potential kann die Nukleon-Wellenfunkt. in Radialteil $R_{nl}(r)$ und in Winkelanteil $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ zerlegt werden:

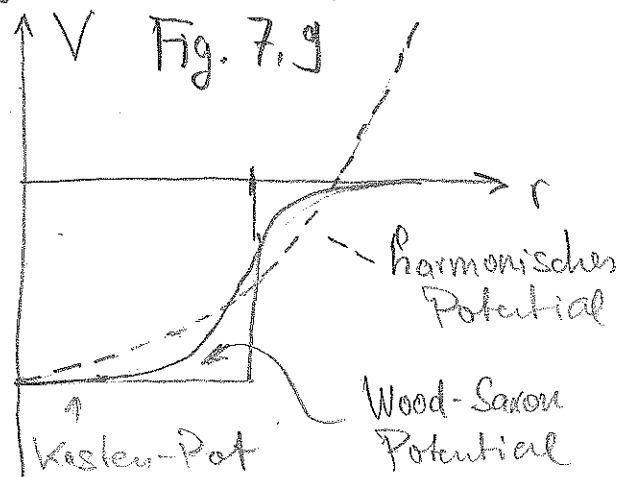
Potentialansätze:

Aufgrund der kurz-reichweitigen Kernkräfte sollte Potential in etwa der Dichteverteilung der Nukleonen folgen:

- (i) Kastenpotential
- (ii) Woods-Saxon-Potential (folgt Dichteverteilung)

$$V(r) = -V_0 \left(1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \right)^{-1}$$

- (iii) harmon. Potential



Am einfachsten zu berechnen: 3-dim. Harmon. Oszillator

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad \text{mit } \hbar \omega_0 \approx 41 \text{ MeV A}^{-1/3}$$

$$\rightarrow E_N = \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega_0 \quad \text{mit } N = 2(n_r - 1) + l$$

$N_x + N_y + N_z \rightarrow$ ($n_r = \text{Zahl der Knoten in Radial richt.} = 1, 2, \dots$)

Erläuterung des 3-dim. harmon. Oszillators (siehe Lit.):

$$g(N) = \frac{1}{2} (N+1)(N+2) \quad \text{Zustände für } E_N$$

wobei jedes Zustand mit je 2 Protonen od. Neutronen besetzt werden kann:

$$\rightarrow \text{„Schalen“: } 2, 8, 20, 40, 70, 112$$

\neq magische Zahlen

$$\begin{cases} 2 \\ 2+6 = 8 \\ 8+12 = 20 \\ +20 = 40 \end{cases}$$

Auch der alternative Ansatz eines Kasten- od. Woods-Saxon Potentials löst das Problem nicht. Schalen für Woods-Saxon: 2, 8, 18, 20, 34

\rightarrow man kann immer nur die ersten magischen Zahlen erklären.

Bisher wurde allerdings der Nukleon-Spin und die resultierende Spin-Bahnkopplung für die Energi-Niveaus nicht berücksichtigt.

Führt man zusätzlich zum „statischen“ Kernpotential $V_{\text{stat}}(r)$ auch einen möglichen Spin-Bahnkopplungs-Anteil zum Potential ein:

$$V(r) = V_{\text{stat}}(r) + V_{\text{is}}(r) \cdot \frac{\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle}{\hbar^2}$$

führt dies zu einer Aufspaltung des ansonsten entarteten Niveaus:

$$j = l \pm 1/2$$

Experimentell fand man, daß es sich bei $V_{\text{is}}(r)$ um ein sehr starkes attraktives Potential handelt.

→ Energieaufspaltung:

$$n, l \left[\begin{array}{l} j = l - \frac{1}{2} \\ j = l + \frac{1}{2} \end{array} \right. \begin{array}{l} - \frac{l+1}{2} V(r) \\ l/2 V(r) \end{array} \left. \right] \frac{2l+1}{2} \cdot V_{es}$$

Das Schalenmodell mit adäquater Spin-Bahn-Kopplung (Haxel, Jensen*, Suess, Goepfert-Meyer*, 1949) beschreibt sowohl die magischen Zahlen als auch *) Nobelpreis 1963 Drehimpulse, Anregungen und magn. Momente der Kerne korrekt. → Fig 7.10, 7.11

7.5 Elementsynthese

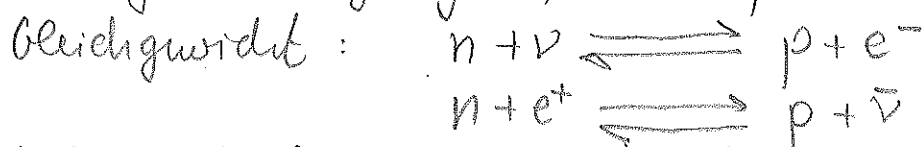
Urknall vor $13.7 \cdot 10^9$ Jahren

a) Primordiale Elementsynthese

In ersten μsec bestand die Materie aus freien Quarks, Gluonen, Leptonen sowie allen anderen Austauschbosonen. Durch Ausdehnung des Universums fand eine Abkühlung statt.

Bei $t \approx 10 \mu\text{sec}$ nach Urknall, $kT \approx 150 \text{ MeV}$ d.h. $T = 10^{12} \text{ K}$ fand die Kondensation zu Hadronen aus dem Quark-Gluon-Plasma statt.

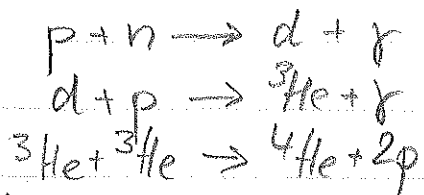
Die Hadronen zerfallen und es bleiben am Ende nur noch p und Neutronen bzw. ihre Antiteilchen übrig. Aufgrund einer Materieüberschusses (10^{-9}) dominieren Protonen und Neutronen des heutigen Universums übrig. Solange T hoch genug ist, stehen p und n in therm.



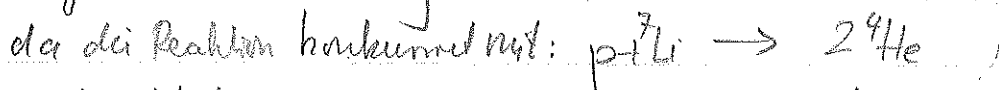
Nach $t \approx 1 \text{ s}$ ($kT = \mathcal{O}(1 \text{ meV})$) entkoppeln die Neutrinos und diese Reaktion ist nicht mehr möglich.

Zu dieser Zeit: $\frac{N_n}{N_p} \Big|_{t \approx 1s} = \exp\left(-\frac{m_n - m_p}{kT}\right) \approx 0.2$

Sobald $kT < 1 \text{ MeV}$ ist bilden sich die ersten Kerne



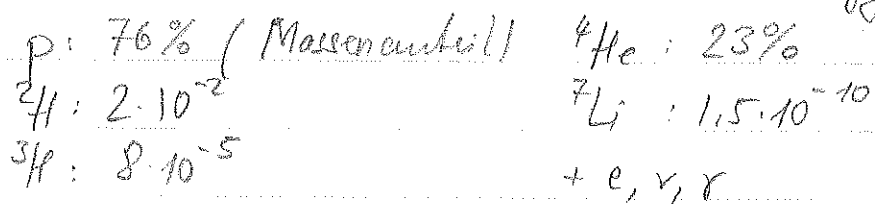
Da es keine $A=5, 8$ Kerne gibt, bricht die Reaktion hier ab: es gibt nur sehr wenig ${}^7\text{Li}$: ${}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^7\text{Li}$



Sobald alle Nukleonen aufgebraucht sind

($\frac{\#n}{\#p} \approx 20\%$ $\xrightarrow{t=300s}$ $\frac{\#n}{\#p} = 13.5\%$) stoppt die Nukleosynthese ($t=300s$).

Die so entstandene Elementhäufigkeit läßt sich noch heute nachweisen und wird als primordiale Elementhäufigkeit bezeichnet:



Das Universum expandierte und kühlte sich weiter ab.

Bei $T \approx 3000 \text{ K}$ ($\nu \text{ eV}$) werden nach $t = 4 \cdot 10^5 \text{ a}$ durch

Einfang von Elektronen die neutralen Atome gebildet.

Zu diesem Zeitpunkt "entkoppeln" die Photonen. Sie

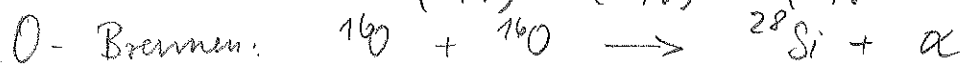
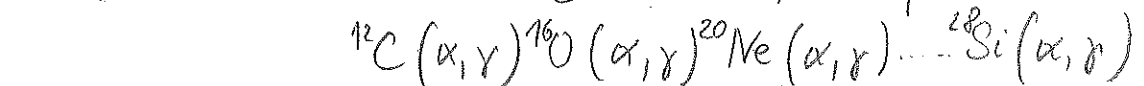
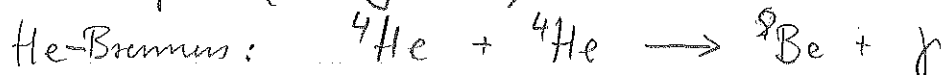
sind heute als kosmischer Hintergrundstrahlung ("3K")

nach vorhanden (\rightarrow "rot-Verdchiebung" durch Expansion).

b) Elementsynthese in Sternen.

Nach $\sim 10^8$ Jahren ist der Gasdruck gering genug, daß Gravitation p und He-Gas zu einem prästellaren Nebel einfangen und verdichten kann. Durch Gravitation erwärmt sich Nebel im Innern bis Temp. und Dichte ausreicht bei $T \approx 10^7$ K den pp-Fusionszyklus zu zünden. Der Strahlungsdruck im Innern des Sterns wirkt dem Gravitations-Kollaps entgegen:
 → Stabile Brennphase: Wasserstoff-Brennen.

Nach pp-Phase können sich weitere Brennphasen anschließen (s. Fig.): :



Durch Fusionsprozesse in Sternen können alle Elemente bis Fe/Ni gebildet werden. Alle anderen Elemente werden durch Neutroneneinfang und β -Zerfall gebildet:

In Super-Nova-Explosionen: rapid-neutron capture: r-Prozess
 od. zB. in roten Riesen : slow-neutron-capture: s-Prozess

(Neutroneneinfangzeit schnelle/langsame als β -Zerfallszeit)

Diese Prozesse sind allerdings noch Gegenstand aktueller Forschung.