4. Kern- und Nukleonstruktur

Streuexperimente und ihre Interpretation sind Schlüssel zur Struktur von Kernen und Nukleonen (Protonen).

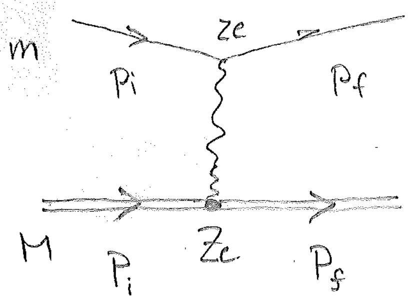
4.1 „Rutherford-Streuung" an punktförmiger Ladungsverteilung

H. Geiger et al., 1909-1913: s. Fig. 4.1

Frage: Warum hat Rutherford geschlossen, daß Kerne „punktf" sind?
Was würde man für ausgedehnte Kerne beobachten?

a) Theoretische Behandlung:

Elastische Streuung eines leichten „spinlosen" Teilchens mit Ladung ze an einem schweren (ruhendem) „spinlosen" Streuzentrum mit Ze:



Übergangsamplitude:

$$A_{fi} = \frac{ze\,Ze}{q^2}\cdot\frac{(\hbar c)^2}{c^2} \qquad \text{(s. Kap. 2)}$$

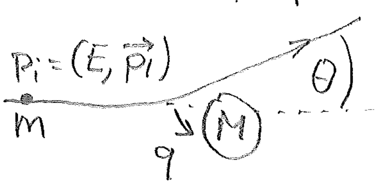
[bzw $|A_{fi}|^2 = \left(\frac{zZ\alpha}{q^2}\right)^2 (4\pi)^2 \frac{(\hbar c)^6}{c^4}$

(Vereinfachung gegenüber e^+e^-: keine Spins!)]

Mit der Wirkungsquerschnittsformel aus Kap 2.3b:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{(\hbar c)^4}\cdot\frac{p_f^2 c^2}{\beta_i\beta_f}\underbrace{\left\{\left(\frac{zZ\alpha^2}{q^2}\right)^2 (4\pi)^2\frac{(\hbar c)^6}{c^4}\right\}}_{|A_{fi}|^2}$$

Kinematik: q^2 für elastische Streuung



$$q^2 = (p_i - p_f)^2 = (E_i - E_f)^2 - (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2$$
$$= -(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = -\vec{q}^{\,2} < 0 \quad (!)$$
$$= -2|\vec{p}_f|^2(1-\cos\theta) \quad \text{s.u.}*$$
$$= -4|\vec{p}_f|^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

für $M \gg m$
Rückstoß vernachlässigbar
$E_i = E_f$
$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$, $\beta_i = \beta_f$

bzw: $|\vec{q}| = 2|\vec{p}_f|\sin\frac{\theta}{2}$

(*) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

mit $\beta_i = \beta_f$ folgt für $d\sigma/d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\, p_f^2 c^2}{\beta_f^2} \cdot \left(\frac{zZ\alpha}{q^2}\right)^2 \frac{(\hbar c)^2}{c^4} \sim \frac{1}{q^4}$$

(Photon-Propagator)

$$= \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4|\vec{p}_f|^2 \beta_f^2} \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{(\hbar c)^2}{c^2} \sim \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

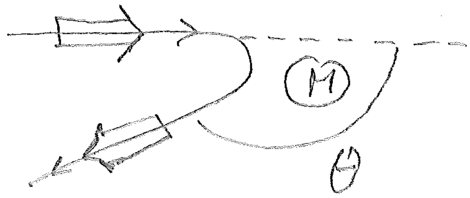
$$\left.\begin{array}{l} E_{kin} = \frac{1}{2}\cdot pv = \frac{1}{2} p\beta_f c \\ \to 2E_{kin} = |\vec{p}_f|\,\beta_f \cdot c \end{array}\right\} \to \quad = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16\, E_{kin}^2 \cdot \sin^4\frac{\theta}{2}} \cdot (\hbar c)^2$$

Bemerkungen:
1) endliche Wahrscheinlichkeit für Rückwärtsstreuung
2) für kleine Streuwinkel $\theta \to 0$ $(q \to 0)$: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ steigt an; allerdings: max Stoßparameter $\to$ mindest q (bzw θ).
3) Stoßpartner solange „punktförmig" wie $\lambda = \frac{\hbar}{|\vec{q}|} > R_{Streuer}$

b.) Streuung von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen (z.B. e^-) an Kernen (Mott-Streuung)

Bisher wurde Spin des streuenden Teilchens nicht berücksichtigt. Häufig werden Streuexperimente mit Elektronen (Spin $\frac{1}{2}$) durchgeführt. Für hochrelativ. Teilchen $(\beta \to 1)$ ist die Helizität = Projektion des Spins auf Impulsrichtung, eine Erhaltungsgröße.

$\to$ Drehimpuls- und Helizitätserhaltung unterdrückt Rückwärtsstreuung:



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Spin} = \left(\quad\right)_{ohne\ Spin} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2}$$

Für den Fall $\beta < 1$ ist die Spinausrichtung (Helizität) keine erhaltene Observable. Man erhält dann für den diff WQ:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \cdot \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

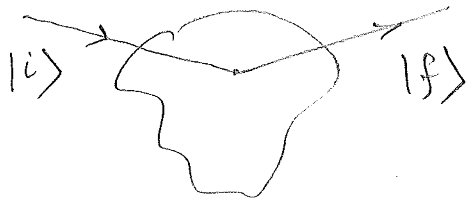
Mott-Streuung beschreibt Streuung punktf. Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen an punktf. Spin 0 Target.

c.) Nachtrag: Feynman-Propagator $\frac{1}{q^2}$ und WW-Potential

Der Propagator $\frac{1}{q^2}$ wurde in der Vorlesung ad-hoc und ohne Bezug auf das WW-Potential eingeführt. In der Tat existiert aber ein tiefer Zusammenhang der im Folgenden erläutert wird.

↳ s. Slides:

Streuung an stationärem sphärisch symmetrischem Potential



$V(\vec r) = V(r)$

Born'sche Näherung:
Ein- und auslaufende Wellen werden als ebene Wellen des freien Teilchens beschrieben.

$$\psi_{i,f} = \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\vec p_{i,f} \cdot \vec r - E_{i,f}\, t\right)\right)$$

Übergangsamplitude: $A_{fi} = \langle f \,|\, V(r) \,|\, i \rangle =$

$$= \frac{1}{V} \cdot \iint_{t\;V} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\vec p_f \vec r - E_f \cdot t\right)\right) V(r) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\vec p_i \vec r - E_i t\right)\right) dt\, d\vec r$$

Zeitintegration bringt Energieerhaltung: $\delta(E_f - E_i)$

$$A_{fi} \sim \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\underbrace{\left(\vec p_i \vec r - \vec p_f \vec r\right)}_{\vec q \cdot \vec r}\right) d\vec r$$

$$\sim \int V(\vec r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \vec q \cdot \vec r\right) d\vec r$$

= Fourier-Transformierte des Potentials im Impulsraum.

Für $V(r) = \frac{c}{r}$ findet man $A_{fi}(\vec q^{\,2}) \sim \frac{c}{\vec q^{\,2}}$ ⇒ Propagator

d.h. $\frac{1}{q^2}$-Propagator = Fourier-Transformierte des $\frac{1}{r}$-Potentials.

Interessantes Potential:

$$V(r) = \frac{c}{r} \cdot e^{-r/a} \rightarrow A_{fi}(\vec q^{\,2}) = \frac{c}{\vec q^{\,2} + (\hbar/a)^2}$$

4.2 Streuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen und Kernstruktur

a) Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung $\rho(r)$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi} \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'$$

[Erinnerung:
Elektr. Potential $\phi(\vec{r})$
$V(\vec{r}) = e\,\phi(\vec{r})$
$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})$

Mit elektr. Potential $\phi(\vec{r})$ und Green'schem Theorem für skalare Felder u, v:

$$\int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\vec{r} = 0$$

sowie $\Delta e^{i\vec{q}\vec{r}} = -\vec{q}^{\,2} e^{i\vec{q}\vec{r}}$ folgt:

$$\mathcal{M}_{fi} = \int V(\vec{r})\, e^{(i/\hbar\,\cdot\,\vec{q}\vec{r})}\, d\vec{r}$$

$$\int \phi(\vec{r})\left(-\vec{q}^{\,2} e^{i\vec{q}\vec{r}}\right) d\vec{r} = \int \Delta\phi(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

$$= -\frac{e\hbar^2}{\vec{q}^{\,2}} \cdot \int \Delta\phi(\vec{r})\, e^{i/\hbar\,\vec{q}\vec{r}}\, d\vec{r}$$

$$= +\frac{e}{\vec{q}^{\,2}} \cdot \hbar^2 \cdot \int \rho(\vec{r})\, e^{i/\hbar\,\vec{q}\vec{r}}\, d\vec{r}$$

{mit $\rho(r) = -e f(r)$
und $\int f(r)\,d\vec{r} = 1$

$$= \frac{e^2}{\vec{q}^{\,2}} \cdot \hbar^2 \int f(\vec{r})\, e^{i/\hbar\,\vec{q}\vec{r}}\, d\vec{r} = \frac{e^2}{\vec{q}^{\,2}} \hbar^2 \cdot F(\vec{q}^{\,2})$$

$$= \frac{e^2\hbar^2}{\vec{q}^{\,2}} \cdot F(\vec{q}^{\,2})$$

mit $F(\vec{q}^{\,2}) =$ Fourier Trf der auf 1 normierten Ladungsverteilung $f(r)$
$=$ Formfaktor

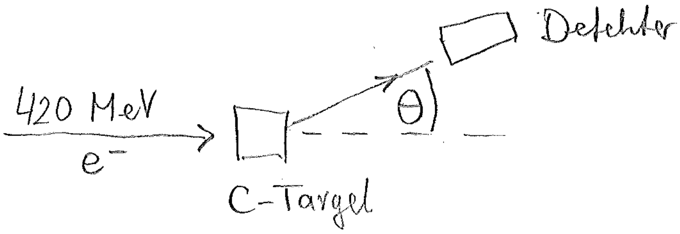
d.h. für den WQ der Streuung eines pktf. Teilchens an einer ausgedehnten Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ erhält man:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{pktf}} \cdot |F(\vec{q}^{\,2})|^2$$

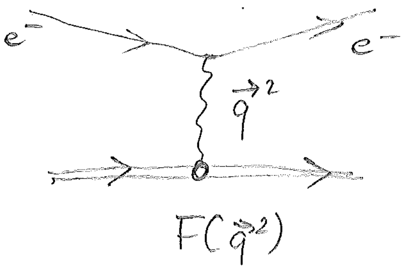
Bemerkung: (1) $|F(\vec{q}^{\,2})|^2 < 1$, d.h. WQ ist immer kleiner als pktf. WQ

(2) für kleines $\vec{q}^{\,2} \rightarrow$ ausgetauschtes Photon hat große Wellenlänge: $|F(\vec{q}^{\,2})|^2 \rightarrow 1$

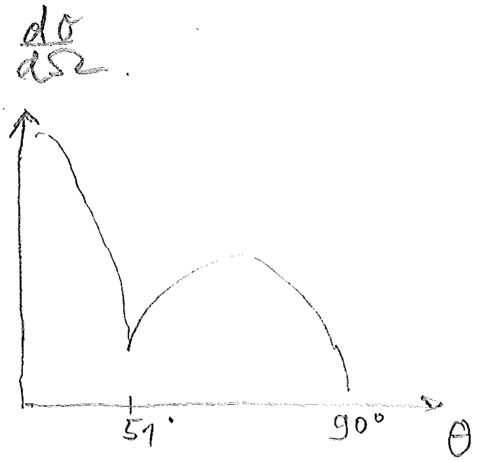
b) Elektron-Kern-Streuung



Hofstadter 1957
Stanford 500 MeV Linearbeschl.
s.a. Fig. 4.2 4.3



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot |F(\vec{q}^{\,2})|^2$$



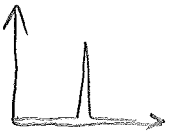
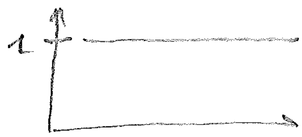
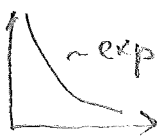
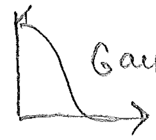
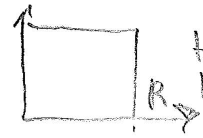
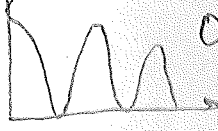
Aus $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}$ läßt sich $|F(\vec{q}^{\,2})|^2$ bestimmen. Ein einfache Rücktransf. zur Ermittlung der Ladungsverteilung ist aber nicht möglich.

(1) $F(\vec{q}^{\,2})^2$ nicht für alle $\vec{q}^{\,2}$ gemessen (für ausgedehnte Kern fällt $|F(\vec{q}^{\,2})|^2$ für große $\vec{q}^{\,2}$ stark ab → schwer zu messen)

(2) Man braucht auch die Phase!

Stattdessen: Modellansätze zur Beschreibung der Ladungsverteilung. Fourier Trf. der Modellansätze wird an Daten angepasst

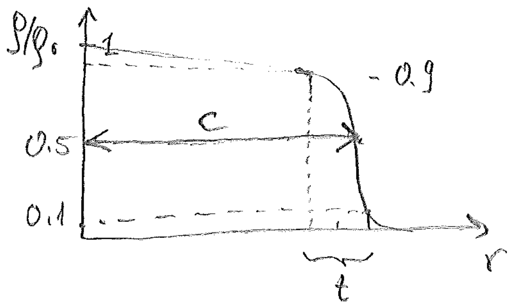
Beispiele: (Fig. 4.4 & Fig. 4.5)

Ladungsverteilung $f(\vec{r})$		Formfaktor $F(\vec{q}^{\,2})$	
	$\frac{\delta(r)}{4\pi}$		konst = 1
 ~exp	$\left(\frac{a^3}{8\pi}\right)\exp(-ar)$	 Dipolform:	$\left(1+\frac{\vec{q}^{\,2}}{a^2\hbar^2}\right)^{-2}$
 Gauß	$\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{-a^2r^2}{2}\right)$	 Gauß	$\exp\left(\frac{-\vec{q}^{\,2}}{2a^2\hbar^2}\right)$
 $C = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1}$ Harte Kugel	$\begin{cases} C & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	 Oszillierend	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$, $\alpha = \vert\vec{q}\vert R/\hbar$

c) Ladungsverteilung von Kernen:

Generelle Schwierigkeit:
Je größer die Ausdehnung der Ladungsverteilung, desto stärker fällt $|F(\vec{q}^2)|^2$ für große Winkel (große $\vec{q}^2$) ab ... sehr eindrucksvoller Effekt ausgedehnter Kerne.

Für eine Vielzahl von Kernen wurde die Ladungsverteilung bestimmt:
Kerne werden gut durch „Fermi-Verteilung" beschrieben (s. Fig. 4.6):



Radiale Ladungsverteilung:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

$\Rightarrow$ „weicher Rand"

c = Halbdichte-Radius $\approx (1.18\, A^{1/3} - 0.48)$ fm

t = Oberflächendicke (90% ... 10%) $= 4 \ln 3 \cdot a = 4.4\, a \approx 2.4$ fm

$a \approx 0.545$ fm

Mit $\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r)\, d^3r = \int 4\pi r^4 \rho(r)\, dr$ folgt:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0.94 \cdot A^{1/3}\ \text{fm}$$

Oft wird der Kern aber näherungsweise durch Kugel mit „hartem Rand" beschrieben für die $\langle r^2 \rangle$ gegeben ist durch:

$$\langle r^2 \rangle_{hart} = \int_0^R r^2 \rho(r)\, d^3r = 4\pi \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3}}_{\text{Dichte homogene Kugel}} \int_0^R r^4\, dr = \frac{3}{5} R^2$$

für $\underbrace{\langle r^2 \rangle_{hart} \overset{!}{=} (0.94\, A^{1/3}\ \text{fm})^2}_{\text{Erwartungswert der harten Kugel soll gerade } \langle r^2 \rangle \text{ für reale Kerne mit weichem Rand entsprechen.}} \Rightarrow R_{hart} = \frac{5}{3} \cdot 0.94\, A^{1/3}\ \text{fm} = 1.2\, A^{1/3}\ \text{fm}$

Bem: Für Nukleonendichte von Kernen findet man:

$$\rho_N = 0.17\ \text{Nukleonen/fm}^3$$