3. Symmetrien

Noether Theorem *) (E. Noether, 1917): „Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße."

Symmetrietransformationen

- Kontinuierliche Symmetrie-Transformationen → additiven Erhaltungsgrößen
  - Raum-Zeit Symmetrien
    Bsp: Translationsinvariant → Impulserhaltung
  - Innere Symmetrien:
    Globale Phasentransformationen in 1dim ($U(1)$), in 2 dim ($SU(2)$), in 3 dim ($SU(3)$)
    → Erhaltung von „generalisierten" Ladungen:
    $U(1)$ → elektr. Ladung, $SU(2)$ → (Iso)Spin, $SU(3)$ → Farbladungen

- Diskrete Symmetrie-Transformationen → multiplikativen Erhaltungsgrößen
  - Ort, Zeit, Ladungsumkehr: P, T, C

Erhaltungsgröße

Eine Observable ist Erhaltungsgröße, wenn für den zugehörigen Operator O gilt: $[H, O]$.
(Es gibt Eigenfkt. zu H die auch Eigenfkt zu O sind, und sich mit den entsprechenden Eigenwerten $o = \langle o|O|o\rangle$ sortieren lassen: o = erhaltene Quantenzahl)

---

*) Noether Theorem wurde formuliert + bewiesen für Lie-Gruppen:
Theorem: Ist ein System invariant unter den Transformationen einer Lie Gruppe, so existiert eine Erhaltungsgröße zu jedem Element der Lie-Algebra

3.1 Kontinuierliche Raum-Zeit-Symmetrien:

Betrachte kontinuierliche Trf. $\mathcal{U}$: $\psi(\vec{r},t) \mapsto \psi'(\vec{r},t) = \mathcal{U}\,\psi(\vec{r},t)$

$\mathcal{U}$ ist unitär: $\mathcal{U}^{+} = \mathcal{U}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{U}\mathcal{U}^{+} = 1$, i.a. nicht hermitsch $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}^{+}$

a.) Räumliche Translation:

$$\mathcal{U}\,\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}+\delta\vec{r},t)$$

- infinitesimale Trf: (durch Impulsoperator)

$$\psi'(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t) + \delta\vec{r}\cdot\frac{d}{d\vec{r}}\psi(\vec{r},t) = \left(1+\delta\vec{r}\,\frac{i}{\hbar}\vec{p}\right)\psi(\vec{r},t)$$

- endliche Trf durch wiederholte Anwendung:

$$\psi(\vec{r}+\Delta\vec{r},t) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\Delta\vec{r}}{n}\frac{i}{\hbar}\cdot\vec{p}\right)^{n}\psi(\vec{r},t)\right]$$

$\Delta\vec{r} = n\cdot\delta\vec{r}$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\vec{r}\,\vec{p}\right)}_{\mathcal{U}}\cdot\psi(\vec{r},t)$$

Invarianz unter $\mathcal{U} \Leftrightarrow [H,\vec{p}] \Rightarrow \vec{p}$ = Erhaltungsgröße

b.) Räumliche Rotationen:

$$\mathcal{U} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\varphi\,\vec{J}\right)$$ mit Drehimpulsoperator $\vec{J}$

3.2 Innere Symmetrien:

(a) 1-dim Phasentransformationen

Falls Phase unbeobachtbar ist → Invarianz unter Phasen-Trf.

$$\psi'(\vec{r},t) = e^{-i\delta}\psi(\vec{r},t)$$

$\delta = \text{const}$: globale Phasentransformation

$\delta = \delta(\vec{r})$: lokale Phasentransformation

(U(1) Invarianz = Eichgruppe in QED)

Invarianz unter einer globalen Phasentransformation ist mit der Erhaltung einer additiven „Ladung" verknüpft.
(„Lady" = generalisierte Lady, nicht unbedingt elektr. Lady)

Bsp. <u>Elektr. Ladungsoperator $\hat{Q}$:</u> $\hat{Q}|e^\pm\rangle = \pm 1|e^\pm\rangle$

Ladung bildet mit anderen simultan beobachtbaren Eigenschaften einen Satz von Quantenzahlen die den Teilchenzustand $|\psi\rangle$ festlegen

Analog zu Impuls / Drehimpuls-Operator läßt sich auch mit $\hat{Q}$ eine Transformation U definieren:

$$U = \exp(-i\alpha\hat{Q})$$

Angewendet auf $|\psi\rangle$:

$$U|\psi\rangle = \exp(-i\alpha\hat{Q})|\psi\rangle = \exp(-i\alpha Q)|\psi\rangle$$

$$\uparrow\ \hat{Q}|\psi\rangle = Q|\psi\rangle$$

Ist der Hamiltonian invariant unter U:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left(\exp(-i\alpha\hat{Q})\psi\right) = H\left[\exp(-i\alpha\hat{Q})\psi\right]$$

so gilt $[\hat{Q}, H] = 0$ d.h. die Ladung ist erhalten.

a) Verallgemeinerte Ladungen

Analog zum Ladungsoperator kann man Leptonzahloperator $\hat{L}$ und Baryonzahloperator $\hat{B}$ benutzen.

→ Erhaltung entsprechender additiver Quantenzahlen

1.) Leptonzahlerhaltung

Sieht man von Neutrinomixing ab so sind experimentellen Befunde konsistent mit der Annahme der Leptonzahlerhaltung

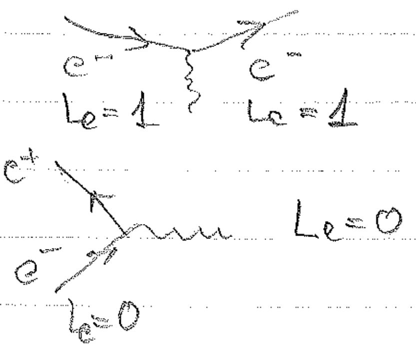
Totale Leptonzahl $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ wobei L_i als Elektron, Myon od. Tauleptonzahl bezeichnet wird.

Sowohl L als auch L_i sind erhalten (bis auf ν-Mixing)

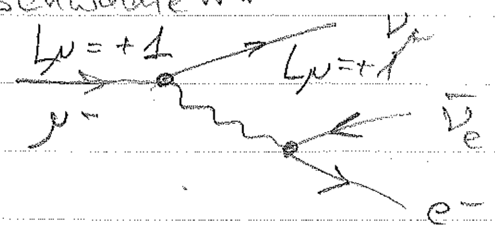
Bsp:	μ^-	$\longrightarrow$	e^-	$\bar{\nu}_e$	$+\ \nu_\mu$
L_μ:	+1		0	0	+1
L_e:	0		1	-1	0
L:	+1		$\underbrace{}_{+1}$		

Die Leptonzahl ist an allen Vertices aller WW erhalten:

QED

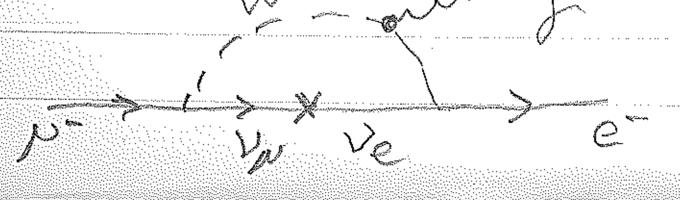


Schwache WW



Aufgrund der Existenz von Neutrinomixing ($\nu_i \leftrightarrow \nu_j$) kann es aber zu leptonzahlverletzenden Prozessen kommen:

Bsp



Zerfallsverhältnis (Theorie): $BR(\mu^- \to e^- \gamma) < 10^{-53}$

exp Limit: $BR < 10^{-11}$

2) Baryonenzahl $\tilde{B}$:

$$\tilde{B} = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3} \qquad n_{\bar{q}} = \text{Zahl der Quarks}$$

Baryonen: $p, n, \Lambda, \Delta \rightarrow \tilde{B} = +1$
Anti-Baryonen: $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda} \rightarrow \tilde{B} = -1$

Obwohl in vielen „GUT"-Theorien Baryonzahlverletzung möglich ist, läßt das Standardmodell keine $\tilde{B}$-Verletzung zu. Experimentell wird die Baryonenzahlerhaltung beispielsweise durch die Suche nach dem Protonzerfall getestet:

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+ \quad (\text{verletzt } \tilde{B} \text{ und } L)$$

Bisher: Protonlebensdauer $> 10^{32}$ Jahre!

b.) Phasentransformationen in zwei Dimensionen: Iso-Spin

1) Spin für nicht-relativistische Elektronen (Wiederholung)

Beschrieben durch 2-dim Spinor: $\psi_e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \psi_0$

Ohne ein äußeres Magnetfeld ist Spin nicht beobachtbar und das System ist invariant unter 2-dim Trf im Spinraum:

$$\psi_e \rightarrow \psi_e' = U \psi_e = U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \psi_0$$

mit 2-dim Operator $U = \exp(i \vec{\alpha} \vec{\sigma})$ wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ = Pauli-Matrizen.

- Spin für zusammengesetzte Systeme: geb. e^+e^- = Positronium

↳ Spinzustände: Gesamtspin $J=1$: Triplett
$J=0$ = Singulett

$$J=1 \;\text{Triplett} \begin{cases} J_z = 1 & |\uparrow\uparrow\rangle = \left|\overset{S}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{S_z}{+\tfrac{1}{2}}\right\rangle_1 \cdot \left|\overset{S}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{S_z}{+\tfrac{1}{2}}\right\rangle_2 \\ J_z = 0 & = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ J_z = -1 & |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

$$J = 0 \;\text{Singulett} \qquad J_z = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

Triplett : symmetrisch gegen Vertauschung $1 \Leftrightarrow 2$
Singulett : antisymmetrisch

2) „starker" Iso-Spin

Starker Isospin ist ein „historisches Konzept" (heute durch die Quarkflavor-Quantenzahl ersetzt) das 1932 von Heisenberg vorgeschlagen wurde: Proton und Neutron erscheinen für die starke WW (Kernkraft) als 2 verschiedene Zustände des gleichen Teilchens (Nukleon).
Konzept macht nur Sinn, wenn man die e.m. WW ignoriert und man gleiche Massen für p und n annimmt (verhältnismäßig gut erfüllt).
$\rightarrow$ Starke WW ist invariant unter Trf im 2-dim Iso-Spin-Raum:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} |p\rangle &\doteq \left|I=\tfrac{1}{2},\ I_3 = +\tfrac{1}{2}\right\rangle \\ |n\rangle &\doteq \left|I=\tfrac{1}{2},\ I_3 = -\tfrac{1}{2}\right\rangle \end{aligned}$$

Invarianz $\Leftrightarrow$ die starke WW erhält den Isospin.

Ähnlich zu (p,n) kann man die 3 Pionen $\pi^\pm, \pi^0$ als Zustände eines Isospintripletts auffassen:

$$\pi: \begin{cases} \pi^+ = |I=1,\ I_3 = +1\rangle \\ \pi^0 = |I=1,\ I_3 = 0\rangle \\ \pi^- = |I=1,\ I_3 = -1\rangle \end{cases}$$

Frage aufgrund von Symmetrien: Gibt es auch einen $I=0$ Singulett Zustand?
Ja: $\eta = |I=0,\ I_3 = 0\rangle$