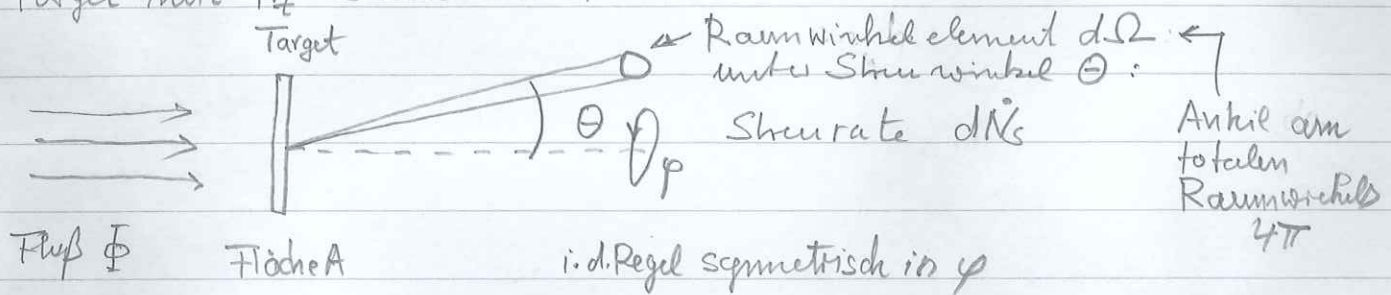


2.2 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsraten

a) Wirkungsquerschnitt eines Streuprozesses

Streuprozesse liefern Informationen über die Dynamik der WW zwischen Projektil und Target. Wichtigste Größe zur Beschreibung von Streuprozessen ist der Wirkungsquerschnitt (WQ):
= Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen Streupartnern.

● Betrachte Streuung eines monoenergetischen Teilchenstrahls an einem Target mit N_t Streuzentren:



- einfallender Teilchenfluß Φ :

$$\Phi = \frac{\dot{N}_i}{A} = n_i v_i \quad \text{mit} \quad \begin{cases} N_i = \text{Rate der auf A einfallenden Teilchen} \\ n_i = \text{Teilchendichte im Strahl} \\ v_i = \text{Teilchengeschw. im Strahl} \end{cases}$$

- Rate dN_s der nach $d\Omega(\varphi, \theta)$ gestreuten Teilchen:

$$dN_s(\varphi, \theta) \sim \Phi \cdot N_t \cdot d\Omega(\varphi, \theta)$$

Proportionalitätskonstante bezeichnet man als differentiellen WQ $\sigma(\varphi, \theta)$

$$\sigma(\varphi, \theta) := \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN_s(\varphi, \theta)}{\Phi \cdot N_t \cdot d\Omega}$$

Den totalen WQ erhält man aus der Gesamtrate \dot{N}_s der gestreuten Teilchen

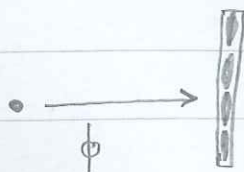
$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\dot{N}_s}{\Phi N_t} = \int_{4\pi} \sigma(\varphi, \theta) d\Omega$$

Dimension des WQ: $\frac{\text{Rate}}{\text{Rate/Fläche}} = \text{Fläche}$

Einheit $[\sigma] =$
 $1b = 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$

Veranschaulichung: Geometrischer Querschnitt

- (1) Pktförmiges Projektil auf sehr dünnes Target (\rightarrow kein Überlapp der Streuer), nur Kontaktwechselwirkung:



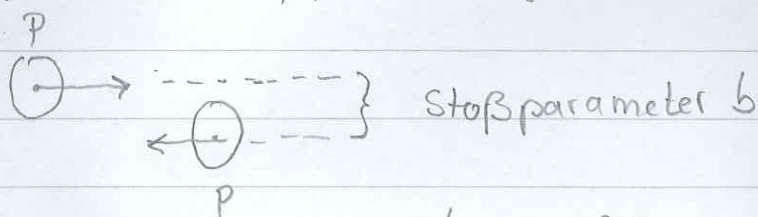
Gesamtrate der gestreuten Teilchen:

$$\dot{N}_s = \phi N_t \cdot A_t, \quad \text{mit } A_t = \text{Querschnitt der Streuer} \\ = \pi \cdot R_t^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = \frac{\dot{N}_s}{\phi \cdot N_t} = A_t = \pi R_t^2$$

d.h. der totale WQ entspricht dem Querschnitt eines Streuzentrums.

- (2) geometrischer pp-Wirkungsquerschnitt



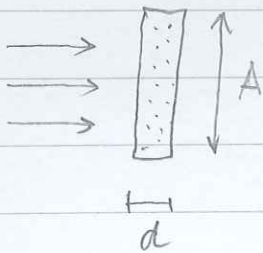
$$b_{\text{max}} = 2R_p = 2 \cdot 0.8 \text{ fm} = 1.6 \text{ fm}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi b_{\text{max}}^2 = \pi \cdot (1.6 \text{ fm})^2 \approx 80 \text{ mb}$$

Experimentelle WQ-Werte: ^{*}) $\sigma_{pp} (10 \text{ GeV}) \approx 40 \text{ mb}$

^{*}) totaler WQ = $\sigma_{pp} (1 \text{ TeV}) \approx 80 \text{ mb}$
inelastischer + elastischer WQ

d.h. geometrische Ausdehnung der Protonen ist vergleichbar mit der Reichweite der für die WW verantwortlichen starken WW ($\rightarrow \sim 1 \text{ fm}$, s.o.)

b.) Freie Weglänge und Strahlabschwächung

Betrachte „dickes“ Target:

$$\text{Zahl der Strahlzentren: } N_t = n_t \cdot A \cdot d$$

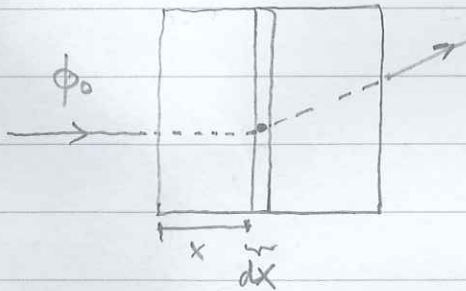
$$\text{mit der Targetdichte: } n_t = \frac{\rho \cdot N_A}{M_{\text{mol}}} \quad (*)$$

(ρ = Dichte, N_A = Avogadro-Zahl, M_{mol} = Molargew.)

$$\text{Streuverte: } \dot{N}_s = \phi \cdot N_t \cdot \sigma$$

$$= \dot{N}_i \cdot n_t \cdot d \cdot \sigma \quad \text{wg. } \phi = \frac{\dot{N}_i}{A} \quad \text{und } n_t = \frac{N_t}{A \cdot d}$$

Streuwahrscheinlichkeit für dickes Target:



Wahrscheinlichkeit für Reaktion in dx nach x :

$$dW(x) = \frac{\dot{N}_s(x)}{\dot{N}_i(x)} = n_t \cdot \sigma \cdot dx$$

→ Abnahme des einfallenden Flusses ϕ :

$$-d\phi(x) = \phi(x) (n_t \sigma \cdot dx)$$

$$\text{Integration: } \phi(x) = \phi_0 e^{-x(n_t \sigma)}$$

$$= \phi_0 e^{-x/\lambda}$$

→ Mittlere freie Weglänge des Projektils im Target:

$$\lambda = \frac{1}{n_t \cdot \sigma}$$

$$*) \frac{1}{\text{cm}^3} = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1}{\text{Mol}} \cdot \frac{\text{Mol}}{\text{g}} = \frac{1}{\text{cm}^3}$$

c.) Zerfallsgesetz und Zerfallsbreite von Teilchen

Radioaktives Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

τ = Lebensdauer des Teilchens / Zustandes
(mittlere ($\tau = t_{1/2} / \ln 2$))

Zeitabh. Wellenfunktion eines instabilen Teilchens

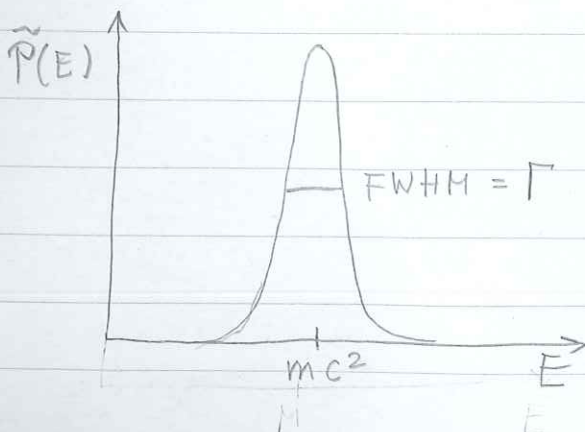
Wellenfkt für stabiles Teilchen: $\psi(t) = \psi_0 e^{-iE/\hbar t}$
 im Ruhesystem: $E = mc^2 \rightarrow \psi(t) = \psi_0 e^{-i mc^2/\hbar t}$
 \rightarrow Wahrscheinlichkeit $P(t) \sim |\psi(t)|^2 = \text{const.}$

Wellenfkt. für instabiles Teilchen: $P(t) \sim |\psi(t)|^2 \sim e^{-t/\tau}$
 $\Rightarrow \psi(t) = \psi_0 e^{-i mc^2/\hbar t - t/2\tau}$
 also: $E = mc^2 - i\frac{\Gamma}{2}$ mit $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$

Wie sieht die Energieverteilung des Teilchens aus?

Die Teilchenverteilung im Energierraum ergibt sich durch Fourier-Trf der zeitabh. Wellenfkt. Man findet (zur Ableitung s. Frauenfelds & Henley):
 S. 94

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\psi}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t) e^{-iE/\hbar t} dt \sim \frac{e^{-i\hbar t}}{(E - mc^2) + i\Gamma/2} \\ \tilde{P}(E) &\sim |\tilde{\psi}(E)|^2 \sim \frac{\hbar^2}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \quad \int \tilde{P}(E) dE = 1 \\ \tilde{P}(E) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{mit Berücksichtigung der Normierung}) \end{aligned} \right.$$



Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt das Teilchen eine „Energiebreite“
 $\Delta E = \Gamma$ mit $\Gamma \cdot \tau = \hbar$

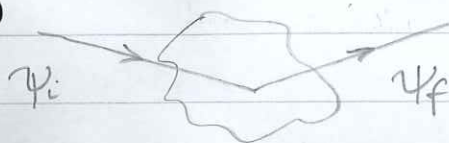
$$\left[\begin{aligned} \text{Bsp.: } g \rightarrow \pi^+ \pi^- \text{ Siehe Fig-2.1} \\ \Gamma_g = 150 \text{ MeV} \Leftrightarrow \tau_g \approx 0.4 \cdot 10^{-23} \text{ s} \end{aligned} \right.$$

2.3 Übergangswahrscheinlichkeit und Fermi's Goldene Regel

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ω bestimmt den WQ eines Streuprozesses, bzw. die Lebensdauer eines Teilchenzustandes:

$$\omega = \frac{\dot{N}_s}{N_i \cdot N_t} = \frac{(n_i v_i \cdot N_t) \sigma}{n_i \cdot V \cdot N_t} = \frac{v_i \sigma}{V} \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \text{Normierungsvolumen} \\ = 1, \text{ fällt aus} \\ \text{Rechnungen heraus} \end{array} \right.$$

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ergibt sich mittels Fermi's Goldener Regel



$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |A_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

$$A_{fi} = \langle f | H_{ww} | i \rangle$$

wird mittels Feynman-Regeln berechnet

$$\rho(E_f) = \text{Zustandsdichte} = \frac{dN}{dE}(E_f)$$

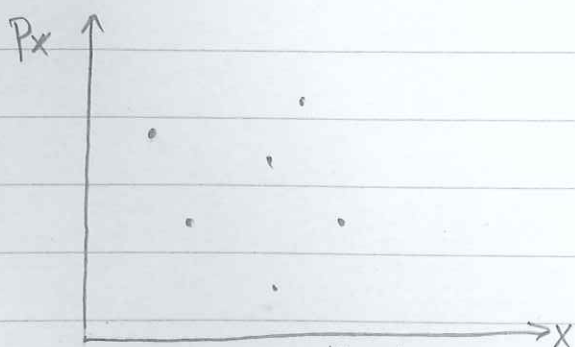
$$= \text{Zahl der Zustände in } [E_f, E_f + dE]$$

a) Phasenraum und Zustandsdichte

Um einen Teilchenzustand zu beschreiben muß Ort und Impuls des

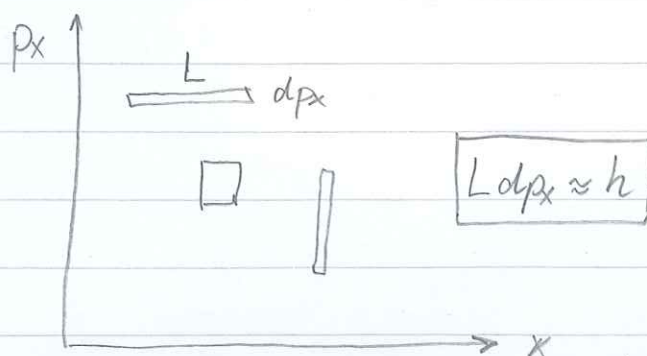
Teilchens bestimmt und angegeben werden: Im „ein-dimensionalen“ Impuls-Ortraum (= Phasenraum): x, p_x

Klassische Mechanik



Teilchenzustände werden durch Phasenraumpkt. beschrieben

Quantenmechanik



Jenach Messung werden Zustände durch verschiedene Phasenraumzellen beschrieben: Form verschieden, Phasenraumvolum gleich.

$$L dp_x = h$$

Wieviele Zustände passen in ein Phasenraumvolumen $L dp$?

$$1\text{-dim.} : dN^{1D} = \frac{L dp}{h} \quad N^{1D} = \frac{L \cdot \int dp}{h}$$

$$3\text{-dim.} : dN^{3D} = \frac{V \cdot d^3 p}{h^3} \quad N^{3D} = \frac{V \cdot \int d^3 p}{h^3} = \frac{V \cdot \int d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

$\underbrace{h^3}_{h = \frac{h}{2\pi}} \quad \uparrow$

benötigt wird aber die Zustandsdichte

1-Teilchen-Zustandsdichte (3D):

$$N_1^{3D} = \frac{V \int d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \quad g_1 = \frac{dN_1}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3 p_1$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int p_1^2 dp_1 d\Omega_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wg. } E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ \rightarrow \frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \cdot \frac{d}{dp} \end{array} \right\} \rightarrow = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{E_1 p_1}{c^2} \int d\Omega_1$$

2-Teilchen Zustandsdichte *)

weg. Korrelation $\rightarrow p_2$ im CMS
 $\leftarrow p_1$
 \cong "1-Teilchen"

$$\text{aber } E = E_1 + E_2$$

$$g_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{d}{dE} \int d^3 p_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Integration} \\ \text{über } \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \\ \text{nicht alles ab.} \end{array} \right.$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot p_1 \int d\Omega_1$$

n-Teilchen Zustandsdichte:

$$g_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \cdot \frac{d}{dE} \left(\int d^3 p_1 \dots d^3 p_{n-1} \right)$$

Bemerkung:

Der hier angegebene Phasenraumfaktor ist nicht Lorentzinvariant ($d^3 p$ ändert sich unter Lorentztrf.), Ein invariantes Maß hingegen ist $\frac{d^3 p}{2E}$ - welches in Lorentz Invarianten Phasenraum (LIPS) verwendet wird

*) siehe auch Fraufelds & Kenley, S. 280 ff.

(s. PDG)