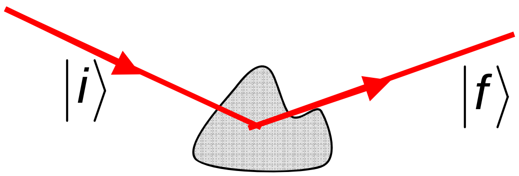
4.1c) Propagator $1/q^2$ und Wechselwirkungs-Potential

Streuung an stationärem sphärisch-symmetrischem Potential



$$V(\vec{r}) = V(r) \qquad \text{statisch}$$

<u>Bornsche Näherung:</u>
Ein- und auslaufende Wellen werden als ebene Wellen eines freien Teilchens beschrieben.

$$\psi_{i,f}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}_{i,f}\vec{r} - E_{i,f}\,t\right)\right)$$

V = Normierungsvolumen

Übergangsamplitude $\quad \mathcal{A}_{fi} = \langle \psi_f | V(r) | \psi_i \rangle$

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{V}\iint \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}_f\vec{r} - E_f t\right)\right) V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}_i\vec{r} - E_i t\right)\right) dt\, d\vec{r}$$

Zeitintegration führt zur Energieerhaltung: $\quad \delta(E_f - E_i)$

$$\mathcal{A}_{fi} \sim \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}_i\vec{r} - \vec{p}_f\vec{r}\right)\right) d\vec{r} = \underbrace{\int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\,\vec{r}\right) d\vec{r}}_{\text{Fourier-Transformierte von V(r)}} \qquad \vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$$

Für $V(r) = \frac{c}{r}$ findet man gerade $\mathcal{A}_{fi}(\vec{q}^2) \sim \frac{c}{\vec{q}^2}$

d.h. der $1/q^2$ Propagator entspricht der Fourier-Transformierten des 1/r Potentials

Interessantes modifiziertes Potential (mit Dämpfung):

$$V(r) = \frac{c}{r}\, e^{-r/a} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{fi}(\vec{q}^2) = \frac{c}{\vec{q}^2 + \left(\hbar/a\right)^2}$$