

**Die Bedeutung der Resonanzkoerper fuer die Saiteninstrumente**  
**Hans J. Specht**  
**Physikalisches Institut der Universitaet Heidelberg**

## 1. Einfuehrung

Alle Musikinstrumente mit schwingenden Saiten wie Pianos, Gitarren oder die Familie der 4 Streichinstrumente benoetigen zur effektiven Tonerzeugung die Kopplung an einen sogenannten "Resonanzkoerper". Bei den Tasteninstrumenten sind dies hoelzerne, an den Raendern fest eingespannte Platten, bei den Zupf- und Streichinstrumenten nahezu geschlossene Holzkaesten. Ziel des vorliegenden Berichts ist es, dies auf moeglichst elementare Weise physikalisch zu begruenden und anhand der Beispiele Fluegel und Violine im einzelnen zu erlaeuern.

Eine isolierte schwingende Saite ist nahezu unhoerbar, d.h. sie strahlt kaum Schallenergie an die umgebende Luft ab. Grund dafuer ist nicht nur der kleine Durchmesser, sondern der "Dipolcharakter" der Quelle: Vorder- bzw. Rueckseite der Quelle bewegen sich mit "entgegengesetzter Phase" (Kompression bzw. Depression der Luft), so dass sich die beiden unmittelbar benachbarten Teile nahezu gegenseitig ausloeschen. Die Kopplung der Saiten an einen Korpus ueber hoelzerne Stege loest dieses Problem durch Uebertragung der Schwingungen auf den Korpus, und es sind dessen Schwingungen, die auf sehr viel effektivere Weise die zugehoerige Bewegungsenergie auf die umgebende Luft weiter uebertragen und damit die Schallwellen erzeugen, die schliesslich das Ohr erreichen. Die verbesserte Effektivitaet ist nicht nur auf die viel groessere schwingende Oberflaeche zurueckzufuehren (trotz kleinerer Amplitude verglichen mit der Saite). Der Korpus selbst kann auch frei schwingen ("Eigenmoden"), und die Uebertragung der Schwingungsenergie der Saite auf den Korpus ist immer dann besonders effektiv, wenn die Frequenz der schwingenden Saite in der Naeheliegt. Physikalisch laeuft dies unter dem Begriff "resonante Anregung" des Korpus in einer "erzwungenen Schwingung" durch die schwingende Saite als Erreger.

## 2. Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Es ist nuetzlich, diesen Vorgang an dem einfachen Beispiel eines schwingungsfahigen Systems mit einer einzigen Eigenfrequenz als Funktion der variablen Frequenz eines aeusseren Erregers naeher zu erlaeuern. Das zentrale Ergebnis ist in Bild 1 gezeigt (Quelle: Wikipedia Artikel ueber "Erzwungene Schwingungen" und "Resonanz"). Hier ist ein "Harmonischer Oszillator" vorausgesetzt, bei dem die Amplitude des freien Schwingers mit einer einfachen Sinus-Funktion als Funktion der Zeit beschrieben wird, aber auch die Kraft des Erregers mit seiner variablen Frequenz sinusfoermig als Funktion der Zeit auf den Schwinger einwirkt. Dies entspricht exakt der Situation bei Musikinstrumenten fuer die einzelnen sinusfoermigen Teiltonen, aus denen ein komplexer musikalischer Ton zusammengesetzt ist (s.u.). Aufgetragen in Bild 1 ist das Verhaeltnis der Amplituden von Schwinger und Erreger auf der vertikalen Achse, und das Verhaeltnis

der Frequenzen des Erregers zur Eigenfrequenz des Schwingers auf der horizontalen. Der Parameter  $D$ , der die verschiedenen Kurven voneinander unterscheidet, ist ein Mass fuer den Verlust von Schwingungsenergie waehrend der Schwingung durch "Daempfung", z.B. bei den schwingenden Resonanzkoerpern durch innere Reibung im Holz und durch die Abstrahlung von Schallenergie.

Alle Kurven beginnen beim Amplitudenverhaeltnis 1, d.h. die Amplitude des Schwingers spiegelt exakt die des Erregers wider. Bei steigender Frequenz des Erregers VERGROESSERT sich jedoch bei nicht zu starker Daempfung die Amplitude, erreicht ein Maximum (5-fach bei  $D=0.1$  in diesem Bild!) und faellt danach wieder ab. Dieses Verhalten wird als "Resonanzkurve" oder auch "Vergroesserungsfunktion" der erzwungenen Schwingung bezeichnet. Das Maximum liegt immer unterhalb der Eigenfrequenz des Schwingers. Die Abweichung wird mit zunehmender Daempfung immer groesser und zugleich das Maximum immer niedriger, bis es im "aperiodischen Grenzfall" bei der Frequenz Null ganz verschwindet (und damit die Schwingung selbst). Die Musikinstrumente profitieren jedoch eher vom anderen Extrem schwacher Daempfung und entsprechend hoher Vergroesserungsfaktoren, und deshalb spiegelt der Name "Resonanzkoerper" die Funktion des Korpus als ein effektiv verstaerkendes Element auch in perfekter Form wider.

### 3. Musikalische Toene als "Harmonische Reihen"

Das vollstaendige Verstaendnis der Kopplung zwischen den schwingenden Saiten und dem jeweiligen Resonanzkoerper muss noch einen weiteren Aspekt von uebertragender Bedeutung beruecksichtigen, die "Obertoene". Jeder periodische Ton eines Musikinstruments besteht aus Grundton und Obertoenen, d.h. einer "Harmonischen Reihe" von einfachen harmonischen (Sinus-)Toenen, die ganzzahlige Vielfache des Grundtons sind. Die Frequenz des Grundtons bestimmt die musikalische "Tonhoehe", und die individuelle Mischung der vielen Obertoene ist als "Klangfarbe" charakteristisch fuer ein bestimmtes Instrument. Dies ist dynamisch zu sehen, mit durchaus unterschiedlichen Zeitabhaengigkeiten fuer die Teiltonoe bei vielen Instrumenten. Dass man all diese Teiltonoe nicht separat hoert, sondern nur reduziert auf einen gesamtheitlichen Ton mit Tonhoehe und Klangfarbe, ist eines der grossen Wunder der fruehen Hirnverarbeitung von Ohrsignalen.

-> ANREGUNG fuer alle Interessierten:

Man nehme irgendein Smartphone, Tablet, Laptop, was immer, lade eine der vielen existierenden Apps zur Spektralanalyse, druecke auf den Knopf (das ueberall eingebaute Mikrofon wird automatisch angekoppelt), spreche, singe oder spiele einen Einzelton auf einem x-beliebigen Instrument, und schon kommt man aus dem Staunen nicht heraus, was da an vielen Einzeltoenen gleichzeitig erscheint, zappelt, kommt und geht - eine ungleich reichere Erfahrung als jedes Bild eines Frequenzspektrums in einem noch so guten Buch!

Ein Beispiel fuer das Spektrum eines Pianotons, hier fuer einen Boesendorfer Imperial Konzertfluegel und mit einem professionellen Kugelmikrofon aufgenommen (linear bis 10 Hz hinunter), findet sich in Bild 2. Es bezieht sich auf eine

Zeit von 2s nach dem Hammeranschlag. Die horizontale Achse entspricht der Frequenz in Hz, die vertikale dem Schalldruck in db (relative Einheiten). Der musikalische Ton ist hier ein A. Der Grundton hat also eine Frequenz von 110 Hz, und die Obertöne liegen (direkt ablesbar) bei 220 Hz (eine Oktave höher), 330 Hz (Oktave + Quint höher), 440 Hz (2 Oktaven höher), 550 Hz (2 Oktaven + grosse Terz höher) und so fort [durchaus kein Zufall, dass hier die elementaren harmonischen Intervalle der Musik sichtbar sind]. Die Zahl der Obertöne in diesem Spektrum ist etwa 50(!). Im Tiefbass sind es sogar mehr als 100, beim Kammerton a' (440 Hz) nur noch 10-15, und weiter hoch im Diskant sind es nur noch wenige. Bei den anderen Saiteninstrumenten sind die Zahlen verschieden, aber nicht sehr viel anders bezogen auf die jeweils niedrigste Tonlage.

#### 4. Kopplung von Saiten und Resonanzkörpern bei Musikalischen Tönen

Die Grundtöne der verschiedenen musikalischen Töne sind bei den schwingenden Saiten durch ihre Länge, Massenbelegung und Spannung festgelegt. Die Obertöne, die "höheren Schwingungsmoden", sind durch die primäre Anregung mit einem Hammer bzw. mit Zupfen oder Streichen bereits automatisch als Überlagerung enthalten. Die Einspannung der Saite an den Enden (gegebenenfalls manuell verkürzbar) stellt sicher, dass nur ganzzahlige Vielfache der Frequenz des Grundtons physikalisch möglich sind ("Schwingungsknoten" an den Enden).

Die hölzernen Bodenplatten der Tasteninstrumente und die Holzkästen der Zupf- und Streichinstrumente können ebenfalls mit definierten Eigenfrequenzen frei schwingen, aber die Hauptrolle dieser "Eigenmoden" ist ihre resonante Anregung in erzwungenen Schwingungen durch die gekoppelten Saiten. Die erste Visualisierung der Eigenmoden von Platten geschah durch die Chladni'schen Klangfiguren von 1787, die schon Napoleon imponierten und die auch heute noch im Schulunterricht vorkommen. Einfache numerische Regeln für Grund- und höhere Moden wie bei den Saiten gibt es dabei aber nicht, wegen der zwei Dimensionen, der vielfältigen Formen und der komplizierten Randbedingungen. Das Spektrum aller Moden reicht jedoch auch hier immer von einer Grundmode bis zu sehr hohen Moden im Bereich mehrerer 1000 Hz, mit stark schwankenden Abständen zwischen Nachbarn.

Die Kopplung zwischen den Eigenmoden der Saiten und den Eigenmoden der Resonanzkörper erfolgt nach dem Zufallsprinzip: jede Saitenmode führt zu eigenen erzwungenen Schwingungen in der Nähe einer passenden Korpusmode innerhalb der jeweiligen Resonanzbreite. All diese Vorgänge finden parallel zur gleichen Zeit statt. Die Überlagerung dieser vielen gleichzeitig erfolgenden erzwungenen Schwingungen führt einen gegebenen musikalischen Ton homogenisiert weitgehend die Abstrahlung in Richtung Ohr, mit nur noch geringen Schwankungen von Gesamtpegel oder Klangfarbe oder beidem. Bei den Streichinstrumenten oder der Gitarre können solche verbleibenden Schwankungen im Bereich der wohlgetrennten niedrigliegenden Resonanzen eher förderlich statt störend sein und sind eine von mehreren Einflüssen, die die Qualität

bestimmen.

## 5. Beispiel Fluegel

Bild 3 zeigt die Moden der Grundplatte eines grossen Konzertfluegels, mit typischerweise 2.8-2.9 m Laenge (Quelle: Fletcher and Rossing, s.u.). Die Eigenfrequenz der niedrigsten Mode ist hier 52 Hz, bei anderen Autoren (Wogram/ Braunschweig) mehr als 60 Hz, aber in jedem Fall erheblich oberhalb des niedrigsten Pianotons A<sub>1</sub>, bei 27.5 Hz (beim Boesendorfer sogar C<sub>1</sub>, bei 16.4 Hz). Die Grundfrequenz ist dabei vollstaendig festgelegt durch die Laenge der Platte und damit universell fuer alle Konzertfluegel. Die hoeheren Eigenmoden folgen dann dicht aufeinander mit immer komplizierteren Mustern von (Teil-)Schwingungen der Platte.

Die Diskrepanz zwischen den niedrigsten Basstoenen (27.5 oder gar 16.4 Hz fuer den Grundton) und der Frequenz der Grundschiwingung der Bodenplatte (mehr als 50 Hz) macht resonante erzwungene Schwingungen in diesem Bereich schlicht unmoeglich. Dies fuehrt zu dramatischen Konsequenzen. Bild 4 zeigt das Spektrum des Tons C<sub>1</sub>, des Boesendorfer Fluegels, hier logarithmisch aufgetragen zur besseren Sichtbarkeit des Tiefbass-Bereichs (Oktaven sind dann wie bei der Klaviertastatur aequidistant). Der Grundton bei 16.4 Hz und die ersten zwei Obertoene bei 33 und 49 Hz sind gegenueber den Teiltoenen bei hoeheren Frequenzen, wo die Eigenmoden der Bodenplatte als Resonanzen angeregt werden koennen, um 30 db unterdrueckt. Dies ist gleichbedeutend mit einer Reduktion der Schalleistung auf nur 0.1Werte weiter oben! Zugleich ist die Abklingzeit dieser Teiltoene wegen der nur schwachen Kopplung sehr viel laenger als die der hoeheren, ca. 1/2 min fuer einen Abfall um 20 dB. Dies kann man direkt an der Saite beobachten, solange die entsprechende Taste niedergedrueckt bleibt.

Bild 5 zeigt eine quantitative Analyse des Sachverhalts. Der ganz oben aufgetragene Gesamtpegel der Teiltoene ist im Rahmen der Homogenitaet des Fingerschlags innerhalb weniger db konstant. Die niedrigen spektralen Komponenten  $f$  und  $2f$  zeigen dagegen den grossen Pegelverlust unterhalb der Platten-Grundschiwingung ( $3f$  ist hier nicht aufgetragen). Erst die Komponente  $4f$  ist von vornherein resonant beteiligt. In der Literatur sind solche spektralen Betrachtungen zur Resonanzanalyse so gut wie unbekannt, aber klarer kann man die Resonanzverstaerkung bei Saiteninstrumenten kaum demonstrieren. Der blosse Klangunterschied im Bassbereich zwischen einem grossen Konzertfluegel und einem kleinen Klavier ist fuer jeden Laien hoerbar: die Abschnidegrenze des Resonanzbodens liegt beim Klavier sogar deutlich oberhalb von 100 Hz, so dass die abgestrahlte harmonische Reihe des niedrigsten musikalischen Tons A<sub>1</sub>, (27.5 Hz) erst beim 5. Teilton beginnt!

Pointe: Wieso erkennt man akustisch ohne die geringsten Zweifel die Tonhoehe des Grundtons in diesem Tiefbassbereich, obwohl die Teiltoene erst viel hoeher einsetzen? Es ist die oben schon zitierte fruehe Hirnverarbeitung, die die (empfundene) Tonhoehe des (fehlenden) Grundtons aus den Teiltoenen erzeugt, aber seine physische Existenz ueberhaupt nicht erfordert. Die infolge der vielen fehlenden Teiltoene verdorbene (duenne) Klangfarbe eines kleinen Klaviers kann

aber auf keine Weise repariert werden.

## 6. Beispiel Violine

Die Violine steht hier stellvertretend fuer alle Saiteninstrumente mit nahezu geschlossenen Resonanzkaesten. Bild 6 zeigt das Spektrum des niedrigsten musikalischen Tons (g) einer Violine mit dem Grundton bei 196 Hz, gespielt von einer professionellen Violinistin auf einer historischen Stainer-Geige innerhalb einer Testserie aller Violintoene in 1/4-Ton Abstaenden. Die Aufnahme erfolgte mit einem professionellen Nierenmikrofon. Auch hier erkennt man mehr als 50 Obertoene. Die Pegelschwankungen zwischen ihnen reflektieren die Kopplung an den Geigenkoerper mit seinen ganz unterschiedlichen Resonanzen nach Lage und Staerke.

Ein herausragendes Beispiel fuer den Reichtum von Korpusresonanzen, hier allein fuer die Oberplatte, ist in Bild 7 enthalten (Quelle: D.E.Oliver, V.Balan, G.Bissinger and R.Rowe, Conf. IMAC-XXV 2007). Anders als Bild 3 fuer einen Fluegel zeigt dieses Bild wohl unterschiedene Eigenmoden bis hinauf zu 5000 Hz! Dies entspricht der Vorbemerkung in Abschnitt 4, dass erzwungene Schwingungen mit Resonanzcharakter ueber den gesamten Bereich der Obertoene parallel stattfinden. Aufgetragen ist hier die sog. "Mobilitaet" der Eigenmoden in Einheiten von [Geschwindigkeit/ausloesende Kraft] fuer die lokal vibrierende Oberflaeche, angeregt durch einen kleinen Schlag auf den Steg. Die Messmethode dafuer ist der "letzte Schrei" auf diesem Gebiet: "3D Scanning-Laser-Doppler-Vibrometers" (SLDV's), mit denen die winzigen Bewegungen der Korpusoberflaeche praezise (interferometrisch) vermessen werden koennen. Ein enormer Fortschritt seit Chladni und den aehnlich erzeugten Bildern schwingender Geigenkoerper von B. Hutchins in den sechziger Jahren, die sich noch heute mehrheitlich in den Fachbuechern finden. Die Worte "Plowden" und "Curtin", die die zwei unterschiedlichen Datensaeetze in Bild 7 bezeichnen, beziehen sich auf eine Guarnerius del Gesu aus dem 18. Jahrhundert im Vergleich zu einer modernen Violine. Eine weitere Erleuchtung zu den beruehmten Klangunterschieden hat aber auch das noch nicht gebracht.

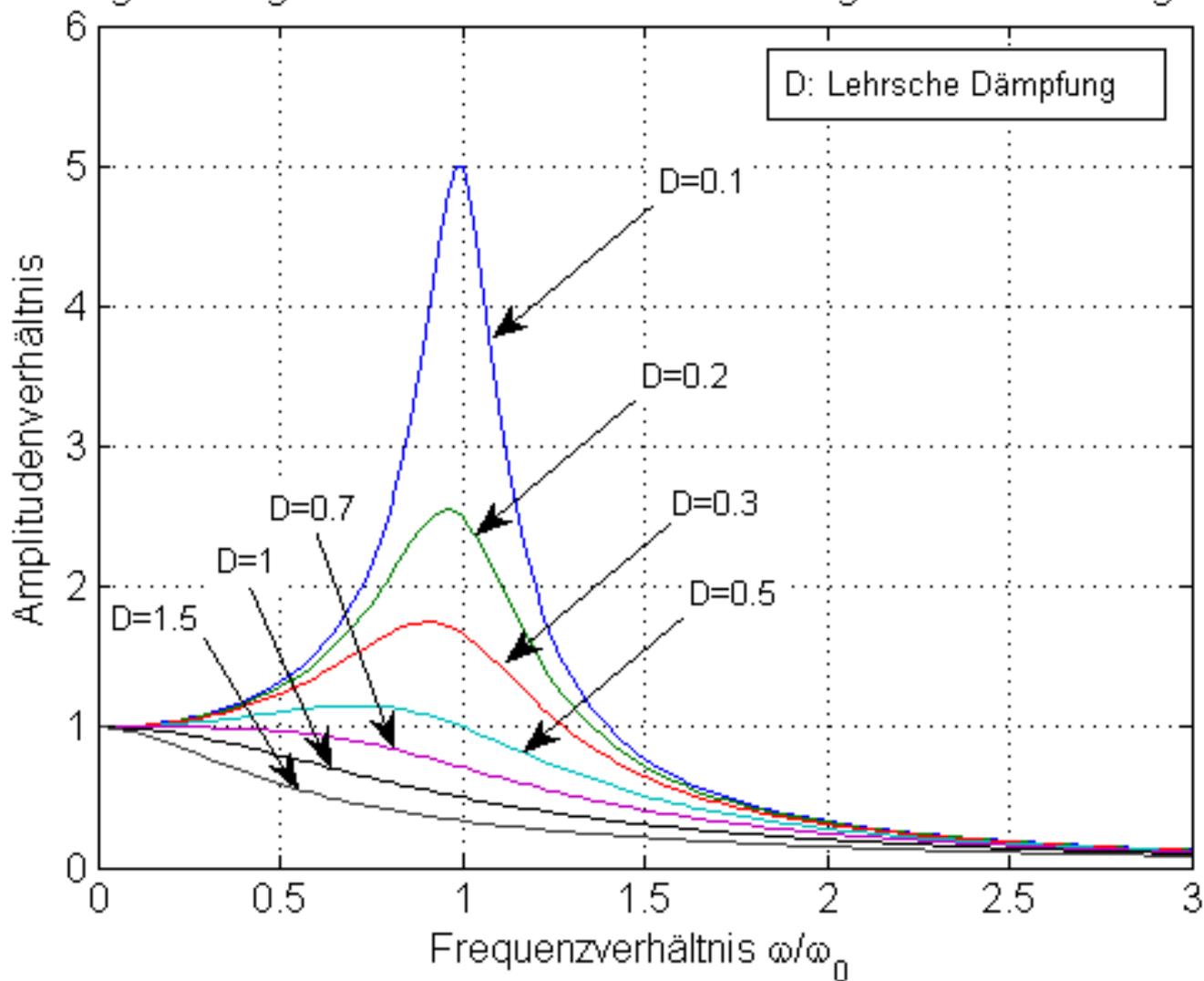
Zum Abschluss auch hier eine Diskussion des Bereichs der tiefsten moeglichen Toene, wo sich (in abgemildeter Form) der Sachverhalt des Pianos wiederholt. Das Spektrum in Bild 6 kuendigt den Effekt bereits an: der Grundton des niedrigsten musikalischen Tons g bei 196 Hz ist gegenueber den darueberliegenden Teiltoenen um mehr als 20 db unterdrueckt, weil auch hier die niedrigsten Eigenmoden des Resonanzkastens darueber liegen. Bild 8 zeigt eine quantitative Analyse dazu. Der Gesamtpegel als Summe ueber alle Teiltoene ist auch hier relativ flach, zeigt aber im tiefen Bereich eine Ueberhoehung bei etwa 280 Hz. Der im Spektrum isolierbare Grundton, hier  $f_1$  genannt, zeigt die Ursache. Der Korpus aller Streichinstrumente (wie auch der Gitarre) hat wohldefinierte Loecher auf der Oberflaeche, bei der Violinfamilie wegen ihrer Form "f-Loecher" genannt. Eine relativ duenne Luftschicht in der Ebene dieser Loecher kann durch die Kopplung mit der schwingenden g-Saite in eine resonante Schwingung gebracht werden, bei der die ruecktreibende Kraft von der im Hohlraum des Korpus enthaltenen Luft aufgebracht wird ("f-Loch-" oder "Helmholtz-Resonanz").

Dies ist die niedrigste Eigenmode der Violine, perfekt in Bild 8 fuer den Grundton  $f_1$  erkennbar (Nomenklatur  $A_0$ ), waehrend die erste Holzresonanz erst im Bereich um 400 Hz (Nomenklatur  $T_1$ ) sichtbar wird. Ein absolut genialer Trick der fruehen Entwickler, den Beitrag des Grundtons trotz viel zu kleiner Dimension der Violine so weit nach unten zu schieben, dass auch noch in diesem Bereich ein sonorer Ton erzeugt werden kann. Unterhalb der Resonanz geht's dann aber endgueltig bergab: Der Grundton im Spektrum der freien g-Saite bei 196 Herz ist um 30 db unterdrueckt, ebenso viel wie beim Piano, so dass auch hier erst das Hirn auf der Basis der Obertoene, die den Gesamtpegel erzeugen, die musikalische Tonhoehe g erkennt.

## 7. Literaturhinweise

Das Buch "Musikalische Akustik" (D.E.Hall, in Deutsch bei Schott 1997) behandelt den Gesamtbereich der musikalisch relevanten Akustik, nicht nur die Musikinstrumente. Es hat ein hohes Niveau, setzt aber keine Spezialkenntnisse voraus und verzichtet auf jegliche Mathematik. Das fuehrende Standardwerk der Fachliteratur "The Physics of Musical Instruments" (N.H.Fletcher and T.D.Rossing, Springer 1998) ist wirklich fuer Physiker geschrieben, enhaelt aber auch zahlloses Material in Form von Bildern mit Beschreibungen, das interessierten Laien zugaenglich ist. Die Bilder 2,4,5,6 und 8 im vorliegenden Bericht stammen vom Autor und sind (bisher) nicht publiziert.

Vergrößerungsfunktion des 1-Massen Schwingers bei Kraftanregung

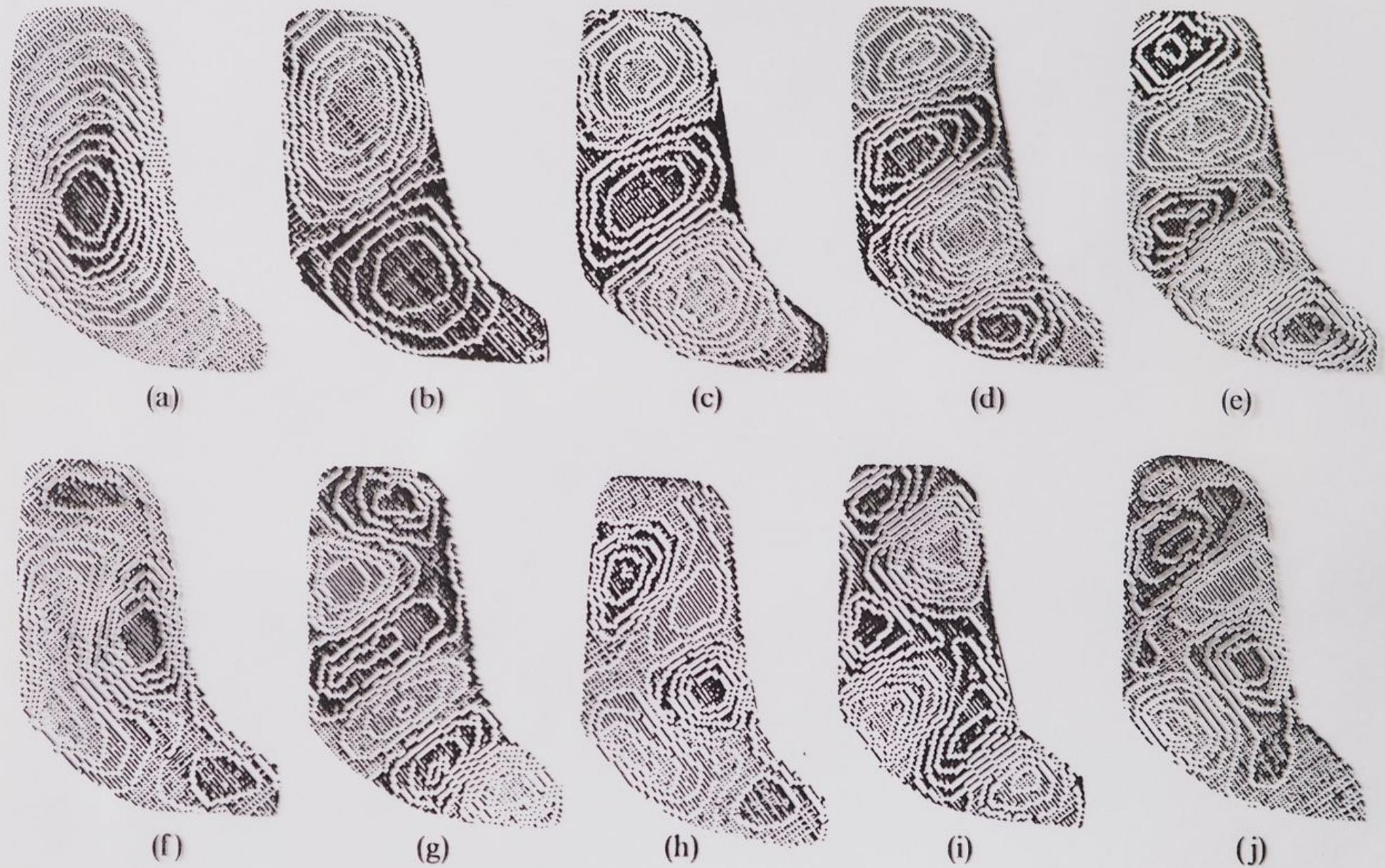


SignalScope Source: USB Input

Ch1: Freq: 110.0 Hz Mag: -47.09 dBV



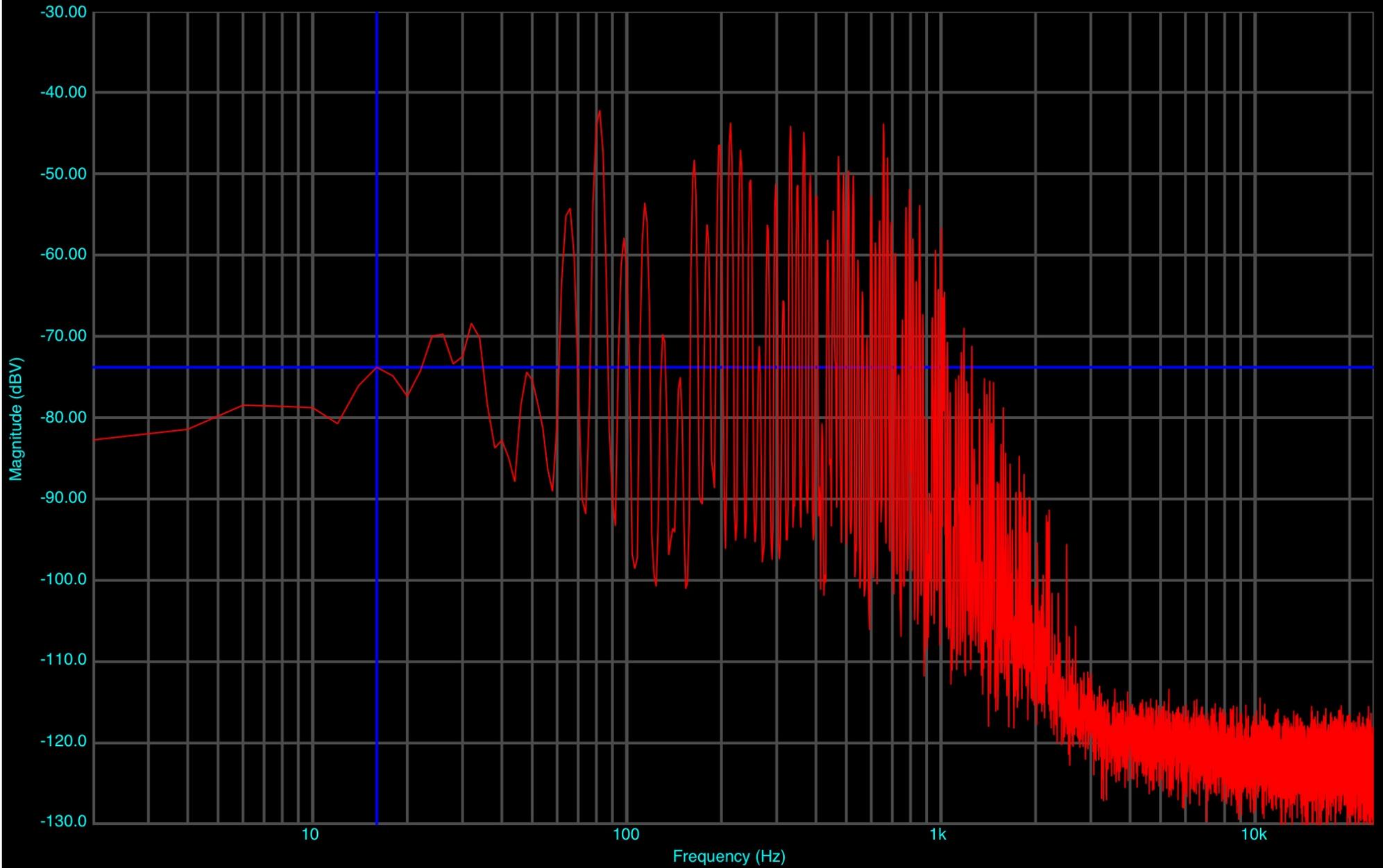
Notes: Bosendorfer Imperial A (110 Hz)



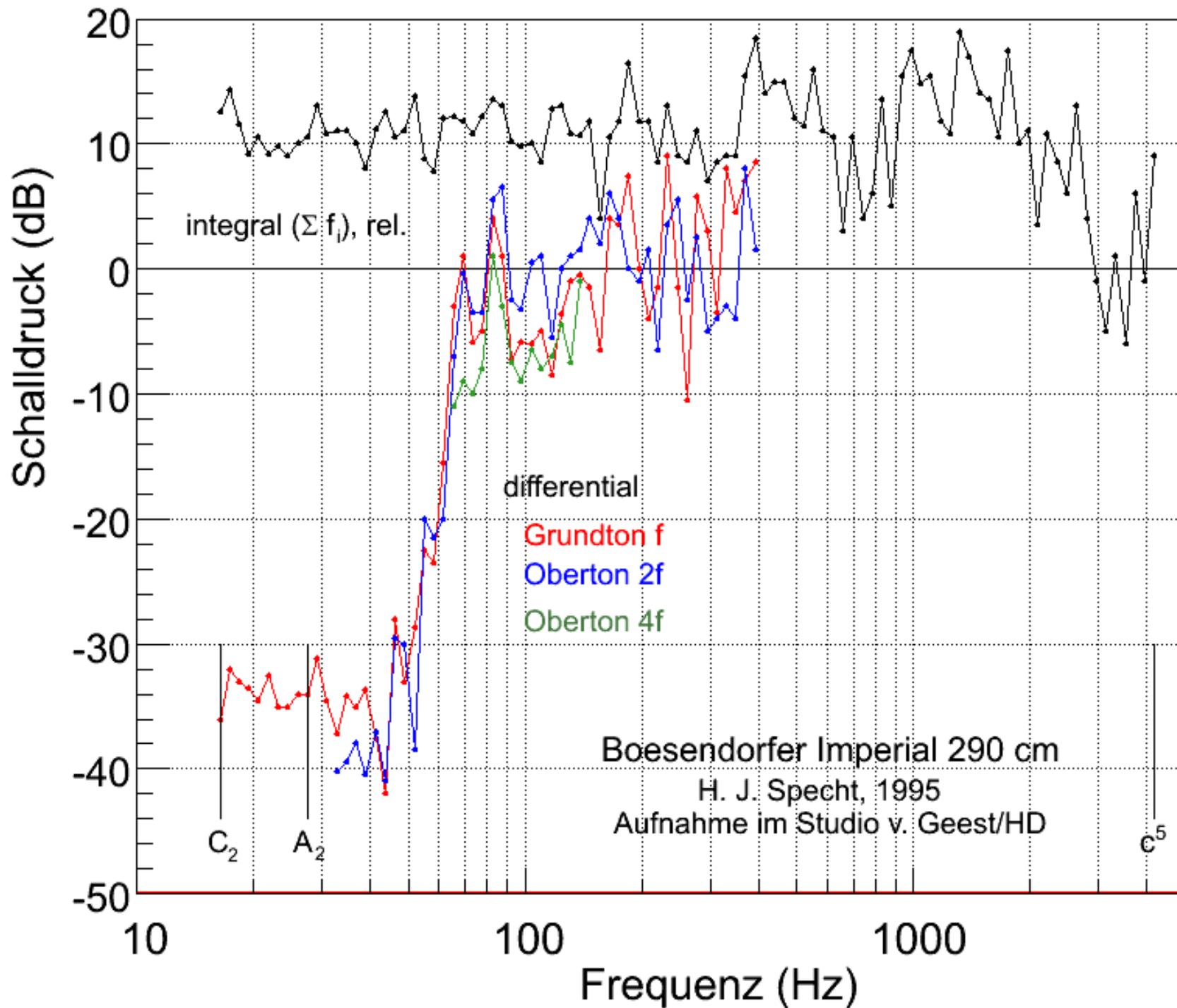
**Fig. 12.28.** Mode shapes on the soundboard of a 9-ft concert grand piano: (a) 52 Hz; (b) 63 Hz; (c) 91 Hz; (d) 106 Hz; (e) 141 Hz; (f) 152 Hz; (g) 165 Hz; (h) 179 Hz; (i) 184

SignalScope Source: USB Input

Ch1: Freq: 16.00 Hz Mag: -73.81 dBV

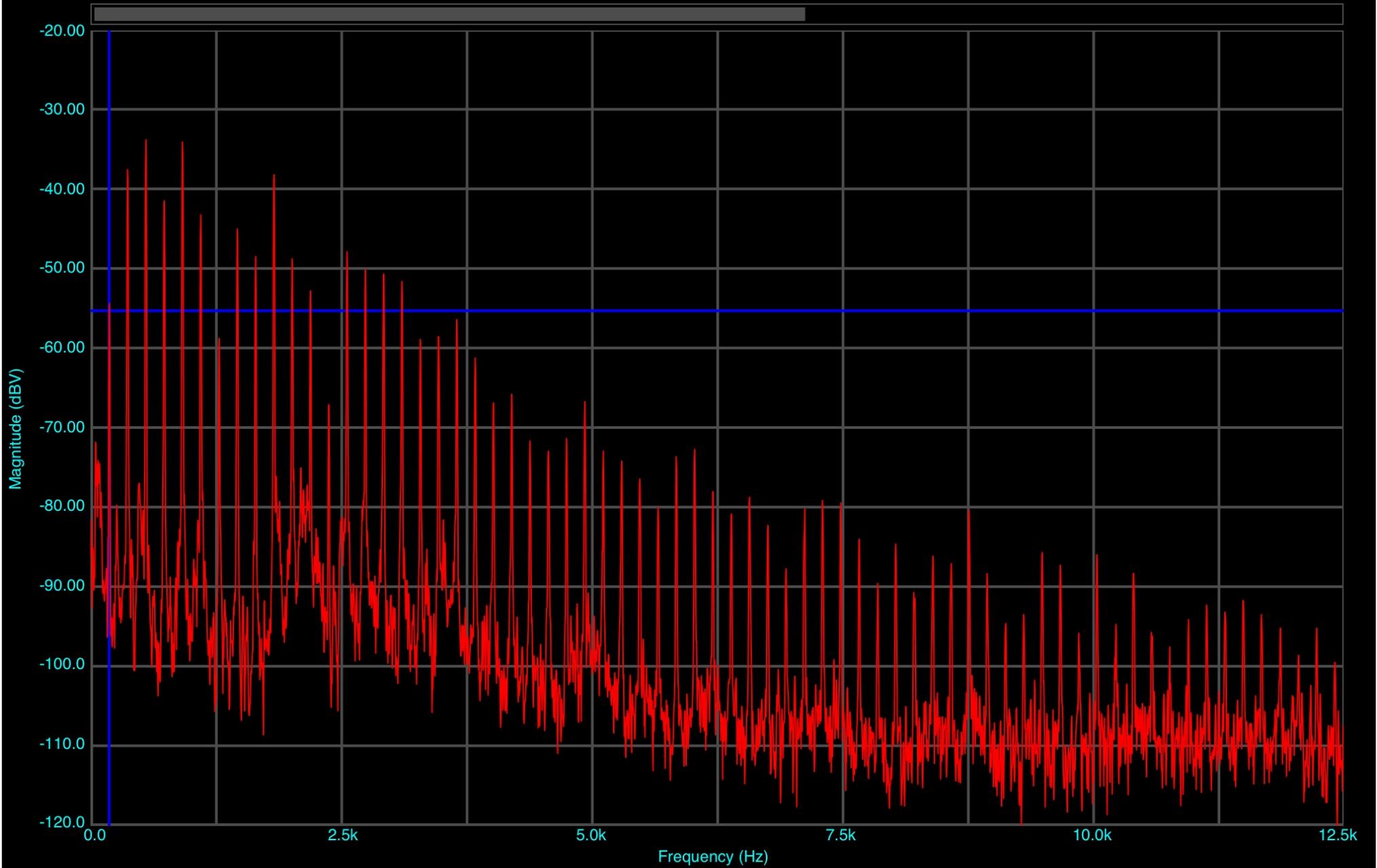


Notes: Boesendorfer Imperial C,, (16.4 Hz)



SignalScope Source: USB Input

Ch1: Freq: 196.0 Hz Mag: -55.32 dBV



Notes: Stainer Geige a (198 Hz)

