

7) Kerne, Kernzerfälle und Kernmodelle

Atomkerne werden durch effektive Restwechselwirkung der starken Kraft gebunden. Eine Beschreibung der Kernkraft durch fundamentale QCD ist aber sehr schwierig.

7.1 Tröpfchenmodell

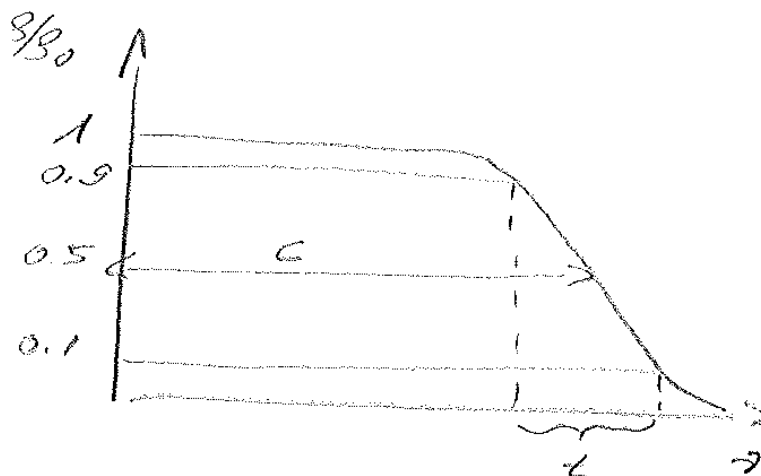
Erinnerung: Was wissen wir über Atom-Kerne aus der Elektron-Kernstreuung? (s. Kapitel 4)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = |F(q^2)|^2$$

F: Formfaktor

q^2 : 3er Impulsübertrag

Der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung. Durch Vergleich der Fouriertransformierten Verteilung verschiedener Kernmodelle wurde gefunden, dass eine Fermiverteilung die meisten Kerne (insbesondere für große A) gut beschreibt.



Radiale Ladungsverteilung

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

c: Halbdichtenradius $c \approx (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$

t: Oberflächendichte $4 \ln 3 a = 4.4 a$

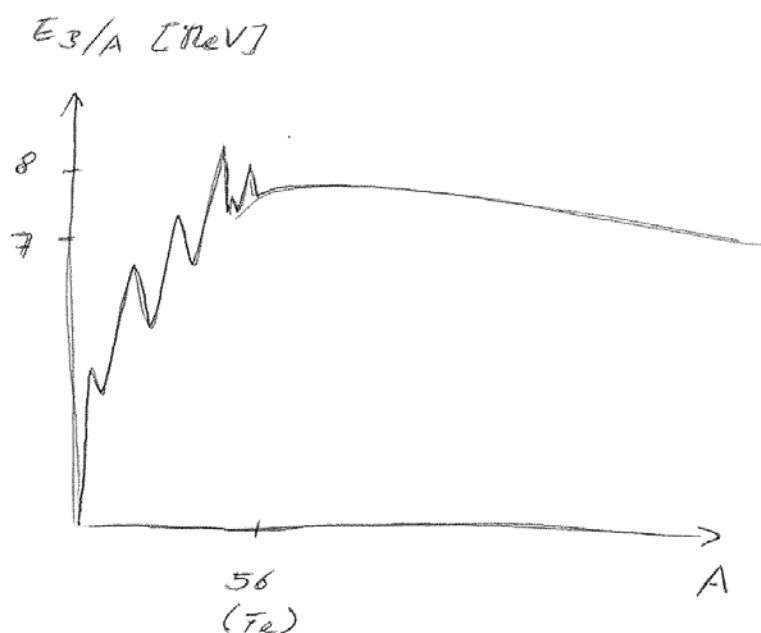
$a \approx 0.545 \text{ fm}$

Bindungsenergie von Kernen

$$M(Z, A)c^2 = Z m_p c^2 + \underbrace{(A - Z)}_n m_n c^2 - E_B(Z, A)$$

[In dieser Definition ist $E_B > 0$]

$E_B(Z, A)$ = Bindungsenergie



Die Bindungsenergie pro Nukleon (E_B/A) hat ein Maximum bei $A = 56$ von 8.7 MeV und fällt dann nur leicht ab (z. B. $E_B(U^{235})/A \sim 7.6$ MeV)

Zwei Beobachtungen führten zur Einführung des Tröpfchenmodells:

(Nahezu) konstante Bindungsenergie modulo Oberflächeneffekten und konstante Dichte im Inneren des Kerns sind sehr ähnlich zu den Eigenschaften einer nicht kompressibaren Flüssigkeit.

=> Ein Atomkern kann durch einen Flüssigkeitstropfen beschrieben werden

Aus diesem Modell kann eine semi-empirische Massenformel (Bethe-Weizsäcker-Formel) hergeleitet werden, die viele Eigenschaften sehr gut beschreibt (z. B. E_B/A auf $\pm 1.5\%$)

Bethe-Weizäcker-Massenformel

$$E_B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 / A^{1/3} - a_{sym} \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta / A^{1/3}$$

Volumenbeitrag $a_v A$:

Jedes Nukleon ist nur mit seinen Nachbarn gebunden (Abstand zu Nachbarn $\sim 1-2$ fm). Das ist das Ergebnis der kurzen Reichweite der starken WW.

Oberflächeneffekte: $-a_s A^{2/3}$

Nukleonen an Oberfläche weniger stark gebunden.

Coulombabstoßung: $-a_c Z^2 / A^{1/3}$

Jedes Proton WW mit jedem anderen Proton im Kern. Effekt hängt vom mittleren Abstand der Protonen ab $\sim A^{1/3}$

Asymmetrie-Term: $-a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$

bei leichten Kernen sind Isobare (gleiches A, unterschiedliches Z) mit $N \approx Z$ stabiler, bei schweren Kernen solche mit $N > Z$.

Paarungs-Term: $\delta / A^{1/3}$

Gerade Anzahl von p und n erhöhen Kernstabilität

$$\delta = \begin{cases} + 11.2 \text{ MeV} & \text{Z, N gerade: gg-Kerne} \\ 0 & \text{Z oder N ungerade: gu oder ug-Kerne} \\ - 11.2 \text{ MeV} & \text{Z und N gerade} \end{cases}$$

Man findet empirisch

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}$$

$$a_s = 17.2 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0.7 \text{ MeV}$$

$$a_{sym} = 22.5 \text{ MeV}$$

Schwächen des Modells:

- Es beschreibt nicht die Spinausrichtung der Nukleonen
- Es beschreibt keine mögliche Deformation von der Kugelform, die zu dem in der Natur beobachteten Quadrupolmoment führt
- Alle QM Effekte (z. B. Anregungszustände) nicht beschrieben

=> Trotz einiger Mängel ist die Massenformel eine sehr nützliche (und genaue) Beschreibung der frei werdenden Energie bei Kernprozessen (α , β -Zerfall, Kernspaltung, Kernfusion). Das Tröpfchenmodell ist die Basis für unser Verständnis der Kernsynthese in der Sternentstehung.

β -Zerfall

$$\beta^- \text{-Zerfall: } X(Z, A) \rightarrow Y(Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\beta^+ \text{-Zerfall: } X(Z, A) \rightarrow Y(Z-1, A) + e^+ + \nu_e$$

Elektronen-Einfang (Electron Capture EC)

$$\text{Einfang eines Elektrons aus der Atomhülle } e^- + X(Z, A) \rightarrow Y(Z-1, A) + \nu_e$$

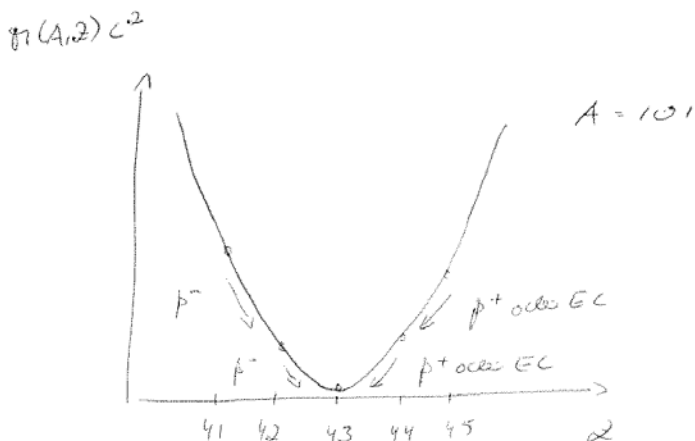
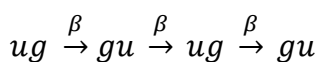
β -Zerfall bzw. EC ändern die Atommassenzahl nicht, d. h. das sind Übergänge zwischen Isobaren.

Für konstantes A lässt sich die Massenformel als Funktion von Z schreiben.

$$M(A, Z) c^2 = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - E_B(2A) = \alpha + \beta Z + \gamma Z^2 + \delta / A^{1/2}$$

Koeffizienten α , β , γ kommen aus Bethe-Weizsäcker-Formel

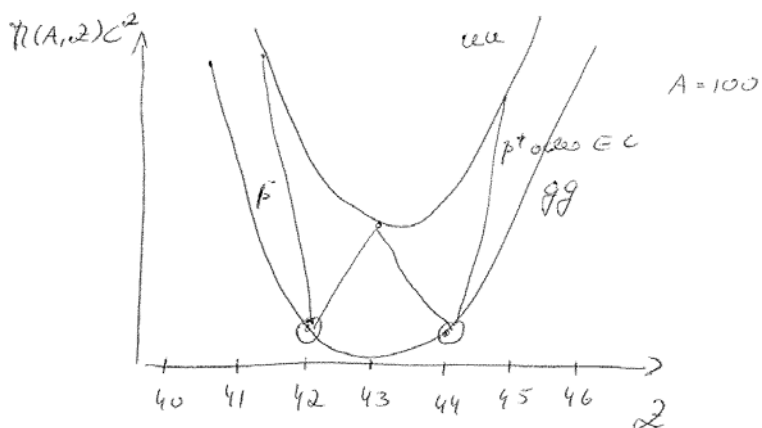
1) Bsp. für β -Zerfall für ug-Kerne



Ruthenium ist der einzig gegen β -Zerfälle stabile Isobar für $A = 101$.

2) Bsp. für β -Zerfall für gg/uu Kerne

Aufgrund des Paarungsterms gibt es 2 Parabeln.



In diesem Beispiel gibt es 2 gegen β -Zerfall stabile gg-Kerne und keinen stabilen uu-Kern. Je nach Steilheit der Parabeln kann es aber auch stabile uu-Kerne geben.

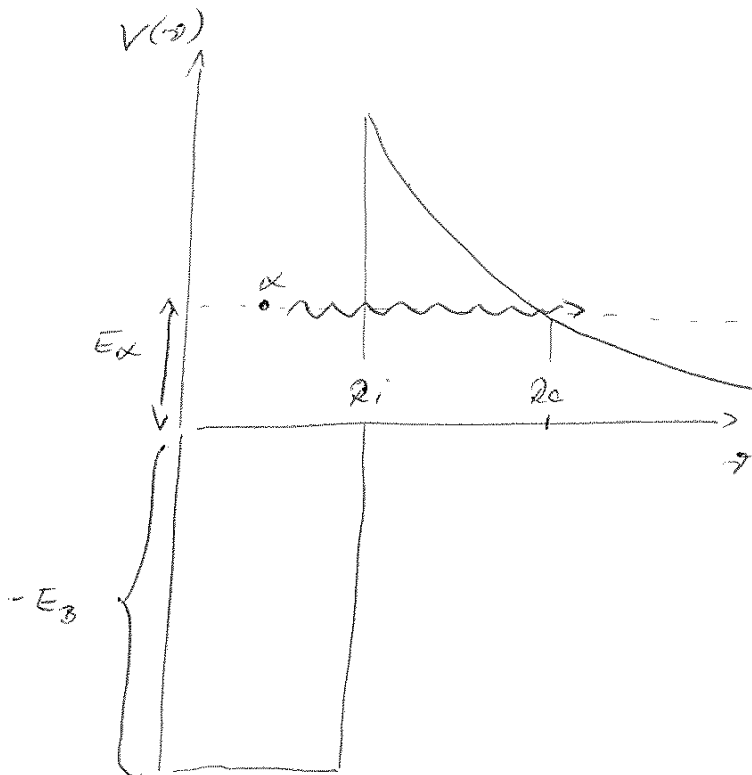
α -Zerfall

Protonen und Neutronen sind mit 8-9 MeV/A gebunden und können nicht aus dem Kern entweichen. Oft ist allerdings die Emission eines ${}^4\text{He}$ -Kerns (2n, 2p) möglich, was an der starken Bindung des ${}^4\text{He}$ liegt.

Sobald das α -Teilchen den Kern verlässt, erfährt es Coulomb-Abstoßung.

$$V_{\text{Coulomb}}(r) = \underbrace{2}_{\text{He}} \frac{(Z-2)}{\text{Rest}} \frac{\alpha \hbar c}{r}$$

Im Inneren des Kerns herrscht ein stark anziehendes Kernpotential das näherungsweise durch einen Potentialtopf beschrieben wird. Durch die Bildung des α -Teilchens wird Bindungsenergie frei, die dazu führt, dass das α -Teilchen auf ein Energie-Niveau E_α angehoben wird (das durch die Massenformel berechnet werden kann). Auf diesem Energie-Niveau ist tunneln durch die Coulombbarriere möglich. Nach der Emission entspricht E_α der kinetischen Energie des α -Teilchens.



Für das Coulombpotential findet man die Tunnelwahrscheinlichkeit T (Transmissionskoeffizient) $T = e^{-2G}$ mit

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_{R_i}^{R_o} \sqrt{2m c^2 (V(r) - E(\alpha))} dr \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines α -Teilchens

$$\Gamma \sim \frac{1}{\tau} = \lambda_0 T$$

λ_0 : Wahrscheinlichkeit, ein α -Teilchen zu bilden und dass es gegen die Potentialwand läuft

$$\Rightarrow \ln \tau \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Durch α -Zerfälle werden 4 Zerfallsreihen festgelegt.

c) Kern-Spaltung

Da Bindungsenergie pro Nukleon für ^{56}Fe maximal, können sich schwere Kerne mit $A > 56$ prinzipiell in zwei mittelschwere Kerne spalten.

i) spontane Spaltung

- Verformung der Nukleonenverteilung zu Ellipsoiden
- Bindungsenergie verringert sich wegen vergrößerter Oberfläche
- Gleichzeitig sinkt Coulombabstoßung

[Situation ähnlich zu α -Zerfall, jedoch E_Q (freiwerdende Energie der Spaltprodukte) größer, aber auch V_c wegen größerer Ladung der beiden Tochterkerne im Vergleich zum α -Zerfall größer.

$E_f = V_c - E_Q$ ist die benötigte Aktivierungsenergie der Spaltung (höhe der Tunnelbarriere). Diese ist kleiner als beim α -Zerfall, jedoch ist die Tunnelwahrscheinlichkeit bei schweren Teilchen ebenso kleiner, d. h. spontane Spaltung ist sehr selten.]

ii) Stoßinduzierte Spaltung

Hinzufügen von Aktivierungsenergie von außen durch Beschuss von Neutronen optimal, da diese keine Coulombbarriere überwinden müssen.