Landeslehrerprüfungsamt

Außenstelle beim Regierungspräsidium Karlsruhe

Zweite Staatsprüfung für die Laufbahn des höheren Schuldiensts am Gymnasium

Unterrichtsentwurf zur Lehrprobe

Name: David Sauer

Schule: Gymnasium Walldorf

Datum: 18.01.2018

Zeit: 11:25 – 12: 10

Klasse: 10 B

Fach: Mathematik

Thema: Einführung Vektoren

Ich versichere, dass ich den Lehrprobenentwurf selbstständig gefertigt, nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Datum: Unterschrift:

I Unterrichtsplanung

a) Unterrichts- und Lernvoraussetzungen

Die Klasse wird von mir im ersten Lehrprobenzeitraum als Leihklasse unterrichtet und besteht aus 18 Schülerinnen und Schülern (SuS). Ein Schüler wurde erst nach den Weihnachtsferien in die Klasse aufgenommen. Eine Schülerin wird auf eigenen Wunsch und in Absprache mit der Klassenleitung, mit der männlichen Version ihres Namens angesprochen. Weiterhin gilt ein Schüler als hochbegabt, ist allerdings auch in der Vergangenheit wiederholt durch destruktives Verhalten aufgefallen. Ein anderer Schüler besitzt eine nur schwach ausgeprägte Impulskontrolle. Außerdem hat eine Schülerin eine Essstörung, wodurch ihre Leistung im Unterricht stark schwankt. Es gibt einige leistungsstarke SuS in der Klasse, nur wenige leistungsschwache SuS und ein breites Mittelfeld.

Eingeführtes Lehrbuch ist „Lambacher Schweizer 10 Mathematik für Gymnasien“ des Klett-Verlags.

Bei der beschriebenen Stunde handelt es sich um die dritte Stunde der Unterrichtseinheit zur analytischen Geometrie. Themen der vorangegangen Stunden waren die Lage und Abstände von Punkten im dreidimensionalen Raum. Die SuS können Punkte in dreidimensionalen Koordinatensystemen einzeichnen und Abstand und Mittelpunkt zweier Punkte bestimmen.

Der Vektorbegriff ist für die folgenden Stunden immens wichtig, da die gesamte analytische Geometrie auf diesem Begriff fußt. Aus diesem Grund wird er in den darauffolgenden Stunden weiter vertieft, indem der Betrag eines Vektors definiert und angewandt wird. Die SuS lernen zudem, den Vektorbegriff auf elementare Probleme der analytischen Geometrie anzuwenden, sowie Vektoren zu addieren und mit einem Skalar zu multiplizieren. Mittelfristig stellt die vektorielle Beschreibung von Geraden ein wichtiges Werkzeug dar. Die SuS lernen außerdem, die gegenseitige Lage von Geraden rechnerisch zu bestimmen. Die erworbenen Kompetenzen ermöglichen es, komplexere Alltagssituationen, wie z.B. die Bewegung eines Flugzeugs, vektoriell zu modellieren. Die Vorgehensweise in der Unterrichtseinheit ist weitgehend identisch mit der Reihenfolge der Kapitel im eingeführten Lehrbuch.

b) Didaktisch-methodische Überlegungen

<u>Sachanalyse</u>

Als Vektor bezeichnet man ein Element eines K-Vektorraums V, wobei K ein Körper ist.

In der analytischen Geometrie betrachtet man im Besonderen den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$, mit $K = \mathbb{R}$.

Nach Wahl von Basisvektoren $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \in V$ lässt sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen:

$$\vec{v} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + a_3 \cdot \overrightarrow{e_3}, \text{ mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

(vgl. Fischer, 2008, S. 75/86/87)

Üblich ist hierfür auch die Komponentenschreibweise: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Zu zwei gegebenen Punkten $B(b_1|b_2 \mid b_3)$ und $C(c_1|c_2 \mid c_3)$ definiert man den Verbindungsvektor $\overrightarrow{BC}$ folgendermaßen:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1-b_1 \\ c_2-b_2 \\ c_3-b_3 \end{pmatrix}$$

(vgl. Baum, 2016, S. 72 f.)

<u>Didaktische Analyse</u>

Die SuS lernen in der Stunde, mithilfe von Vektoren „geometrische Objekte im Raum analytisch [zu] beschreiben und ihre Lagebeziehungen [zu] analysieren" (s. Bildungsplan 2004, S. 99, Leitidee „Raum und Form"). Die Vektoren dienen dabei zur „rechnerischen Behandlung geometrischer Fragestellungen[…]" (s. Bildungsplan 2004, S.99, Leitidee „Zahl"). Vektoren bilden eine wichtige Grundlage zur Modellierung physikalischer Prozess (s. Bildungsplan 2004, S.100, Leitidee „Modellieren") und stellen die Grundlage zahlreicher technischer Anwendungen dar, z.B. GPS oder Vektorgrafiken. Durch diese Anwendungen kann der Bezug zur Alltagswelt der SuS hergestellt werden. Die SuS lernen weiterhin mit neuen symbolischen Elementen in der Mathematik umzugehen, wie der Tupel-Schreibweise für Vektoren.

Zur Veranschaulichung der in der Stunde betrachteten Problemstellungen wird im Unterricht ein Modell eines dreidimensionalen Koordinatensystems benutzt (s. Anhang). Das Modell dient der Veranschaulichung der auf dem Arbeitsblatt gestellten Aufgaben und hilft den SuS bei der Entwicklung dreidimensionalen Denkens. Mithilfe dieses Modells können die perspektivischen Fehlvorstellungen und Probleme vermieden werden, die bei der Darstellung eines dreidimensionalen Koordinatensystems auf einer Fläche (z.B. Tafel oder Arbeitsblatt) auftreten. Abstände und Verschiebungen im Raum können in diesem Modell leicht mithilfe von Zollstöcken dargestellt werden. Vektoren können mühelos mit Pfeilen dargestellt werden. Die Verwendung des Modells bietet weiterhin den großen Vorteil, ein geometrisches Objekt aus unterschiedlichen Perspektiven zu betrachten. Eine Alternative zur Nutzung des beschriebenen Modells wäre die Verwendung des Programms Geogebra, mit dem sich ebenfalls Vektoren und Punkte in dreidimensionalen Koordinatensystemen darstellen lassen. Durch die Nutzung diese Programms ist man bei der Darstellungen von Punkten und Objekten in dreidimensionalen Koordinatensystemen flexibler, als bei der rein zeichnerischen Darstellung auf Papier, da sich die Koordinatensysteme drehen lassen und man die Szene aus verschiedenen Perspektiven betrachten kann. Bei der Nutzung dieses Programms im Klassenzimmer besteht allerdings die Gefahr, dass die SuS nur passiv der Präsentation des Lehrers folgen, sodass keine Schüleraktivierung stattfindet. Für eine eigenständige Nutzung des Programms durch die SuS im Computerraum ist eine gewisse Erfahrung im Umgang mit dem Programm nötig, die die Klasse zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht besitzt.

Eine unter SuS weit verbreitete Fehlvorstellung ist die Idee, dass Vektoren an bestimmte Punkte im Raum gebunden sind. In der dargelegten Unterrichtsstunde werden Vektoren als „Verschiebungen" im Raum eingeführt. Dies geschieht in dem Bestreben, den SuS zu vermitteln, dass zwei Vektoren identisch sind, wenn sie dieselbe Verschiebung beschreiben und dass dies unabhängig vom Angriffspunkt der Vektoren im Raum ist. Die SuS lernen den Verschiebungs-Charakter von Vektoren in der Motivationsphase zunächst in zwei Dimensionen kennen, da eine solche Darstellung zunächst leichter zu verstehen ist.

Angestrebte Kompetenzen

- Die SuS können den Verbindungsvektor zweier Punkte berechnen.
- Die SuS kennen die Tupel-Schreibweise von Vektoren und können diese anschaulich interpretieren.
- Die SuS können eine Verschiebung im Raum mithilfe von Vektoren beschreiben.

Begründung des methodischen Vorgehens

Zu Beginn des Unterrichts werden zunächst die Hausaufgaben besprochen, was der Wiederholung des behandelten Stoffs dient. Zu diesem Zweck schreiben zwei Schüler ihre Lösungen an die Tafel. Diese Lösungen werden anschließend kurz im Plenum diskutiert. Im Anschluss an die Hausaufgabenbesprechung folgt die Motivationsphase. Die SuS bekommen hierzu ein Arbeitsblatt ausgeteilt, dass den Stadtplan der Stadt Mannheim zeigt. Die SuS bearbeiten das Arbeitsblatt in Partnerarbeit. Die SuS erarbeiten sich mithilfe des Arbeitsblatts einen vorläufigen Vektor-Begriff. Die Sozialform Partnerarbeit fördert die Kommunikation zwischen den SuS. Außerdem können sich die SuS so gegenseitig helfen, falls einer der Partner Probleme beim Bearbeiten der Aufgabe hat. Die auf dem Arbeitsblatt gestellte Aufgabe wird anschließend unter Einsatz des Overhead-Projektors (OHP) im Plenum besprochen, sodass sich alle SuS in der folgenden Erarbeitungsphase auf demselben Wissensstand befinden. Für die Erarbeitungsphase bekommen die SuS ein zweites Arbeitsblatt, zum Thema Vektoren, ausgeteilt. Der Übergang vom ersten zum zweiten Arbeitsblatt wird dadurch motiviert, dass auf dem ersten Arbeitsblatt Bewegungen bzw. Verschiebungen in einer Ebene betrachtet wurden. Will man zusätzlich Aussagen über das Stockwerk machen, in der sich eine Person befindet, ist das Hinzuziehen einer weiteren Koordinatenachse unumgänglich. Außerdem kommt in dieser Phase das oben beschriebene Modell zum Einsatz. Zunächst wird gemeinsam die Lage der in Aufgabe 1 beschriebenen Punkte im Modell ermittelt. Anschließend trägt jeder Schüler für sich die Lage der Punkte auf dem Arbeitsblatt ein. Im Anschluss daran, wird die Lage dieser Punkte mithilfe des OHP verglichen. Durch diese Vorgehensweise werden die SuS aktiviert, außerdem werden grundlegende Fertigkeiten im Umgang mit dreidimensionalen Koordinatensystemen wiederholt. Als nächstes bearbeiten die SuS Aufgabe 2 des Arbeitsblatts zunächst in Einzelarbeit, dürfen sich aber anschließend mit ihrem Sitznachbar beraten (Think-Pair-Share-Methode). So wird sichergestellt, dass sich jeder der SuS mit der Aufgabe auseinandersetzt. Anschließend wird die Aufgabe im Plenum besprochen und mithilfe des Modells die beschriebene Verschiebung veranschaulicht. Dadurch wird erreicht, dass auch leistungsschwächere SuS, die die Aufgabe nicht „im Kopf“ lösen konnten, mitgenommen werden. Als Abschluss der Erarbeitungsphase zeichnen die SuS noch den Vektor, der die Verschiebung beschreibt, in das Schaubild ein (Aufgabe 3).

Als Ergebnissicherung wird im Lehrer-Schüler-Gespräch und unter Einsatz des OHP, der auf dem Arbeitsblatt aufgedruckte Merkkasten ausgefüllt. Auf diese Weise kann man sich in der Sicherungsphase auf die wesentlichen Ergebnisse konzentrieren und die Stunde wird zeitlich etwas entspannt, sodass noch genügend Zeit für eine Übungsphase bleibt.

In der Übungsphase lernen die SuS, den neuen Vektorbegriff anzuwenden. Die Puffer-Aufgabe kann zusätzlich von schnellen SuS bearbeitet werden.

c) Quellen

Literatur

Bildungsplan 2004, Allgemein bildendes Gymnasium, Bildungsstandards für Mathematik, Baden-Württemberg, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport

Baum, M. : *Lambacher Schweizer 10, Mathematik für Gymnasien Baden-Württemberg*, 1. Auflage, Ernst Klett Verlag GmbH Stuttgart, 2016

Fischer, G. : *Lineare Algebra*, 16. Auflage, Vieweg Teubner GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Internetquellen

Kölzer.eu (2018), Zugriff am 17.01.2018 unter

https://kölzer.eu/koordinatensystem

II Verlaufsplan

Zeit	Phase	Lehrer-/Schüleraktivität	Sozialform	Medien
5 min	Einstieg	Begrüßung	Plenum	
5 min	Einstieg	Besprechung der Hausaufgaben: Schüler schreiben Lösung an die Tafel	Plenum	Tafel
2 min	Motivation	Die SuS bearbeiten das Arbeitsblatt: „Stadtplan von Mannheim“	Partnerarbeit	
3 min	Sicherung	Besprechung des Arbeitsblatts	Plenum	OHP
10 min	Erarbeitung	- Motivation: Übergang von zweidimensionaler Betrachtung zur dreidimensionalen Sichtweise - Austeilen des Arbeitsblatts: „Vektoren“ - Gemeinsames Ermitteln der Lage, der auf dem zweiten Arbeitsblatt beschriebenen Punkte im Modell - SuS bearbeiten Aufgabe 1 des Arbeitsblatts - Besprechen von Aufgabe 1 - SuS bearbeiten Aufgabe 2 des Arbeitsblatts (Think-Pair-Share-Methode) - Besprechen von Aufgabe 2 und Veranschaulichung der beschriebenen Verschiebung mithilfe des Modells - SuS bearbeiten Aufgabe 3 des Arbeitsblatts	Plenum /Einzelarbeit	Modell/OHP
5 min	Sicherung	Gemeinsames Ausfüllen des Merkkastens auf dem Arbeitsblatt „Vektoren“	Plenum	OHP
10 min	Übung	Buch, S. 73 Nr. 2 a), b) und Nr. 3a), b)	Einzelarbeit	
5 min	Sicherung	Besprechung der Übungsaufgaben	Plenum	Tafel
	Puffer	Buch S. 74 Nr. 7		
	Hausaufgabe	Buch, S. 73 Nr. 1a), b), Nr. 2 c), d) und Nr. 3c), d)		

Anhang

- Arbeitsblatt: Stadtplan von Mannheim
- Arbeitsblatt: Vektoren
- Musterlösungen zu den Arbeitsblättern
- Fotografie des verwendeten Modells

Aufgabe: Stadtplan von Mannheim

In der Abbildung ist der Stadtplan der Innenstadt von Mannheim dargestellt. Der Weg vom Park (B3) zum Marktplatz (G1) kann durch das Zahlenpaar (2; 5) angeben werden.

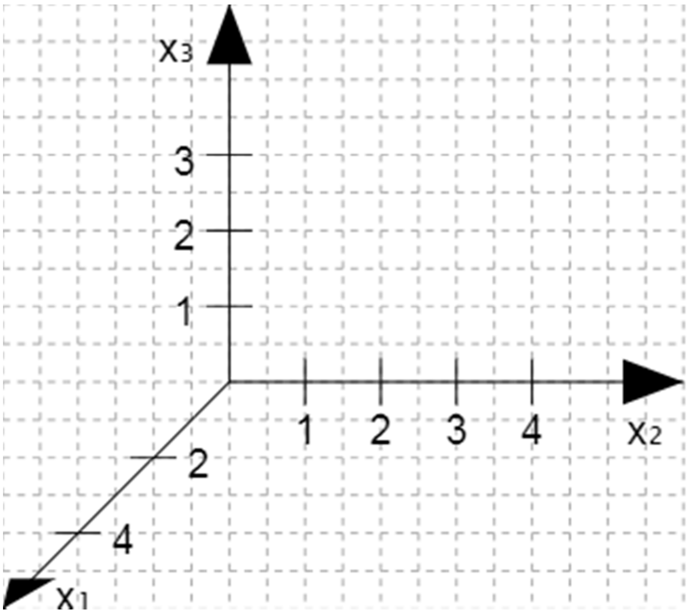
Beschreibe ebenso den Weg von C1 nach F4.

Quelle: Lambacher Schweizer 10, Mathematik für Gymnasien Baden-Württemberg, 1. Auflage, 2016, Ernst Klett Verlag GmbH Stuttgart, S. 72

Arbeitsblatt: Vektoren

Gegeben seien die Punkte $A(2|0|3)$ und $B(4|4|6)$.

Aufgabe 1: Trage die Punkte *A* und *B* in das Koordinatensystem ein.



Quelle: http://kölzer.eu/koordinatensystem

Aufgabe 2: Angenommen, man will von *A* nach *B* gelangen, darf sich aber nur parallel zu den Koordinatenachsen bewegen:

Wie weit muss man sich von *A* aus in x_1 – Richtung bewegen? _________

Wie weit muss man sich von *A* aus in x_2 – Richtung bewegen? _________

Wie weit muss man sich von *A* aus in x_3 – Richtung bewegen? _________

Kurzschreibweise: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Zeichne in das Koordinatensystem einen Pfeil ein, der von *A* nach *B* zeigt.

Merke:

Ein **Vektor** $\vec{v}$ beschreibt eine ____________________________ im Raum und kann durch einen

_________________ dargestellt werden.

Schreibweise: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Zu zwei Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ verschiebt der **Verbindungsvektor**

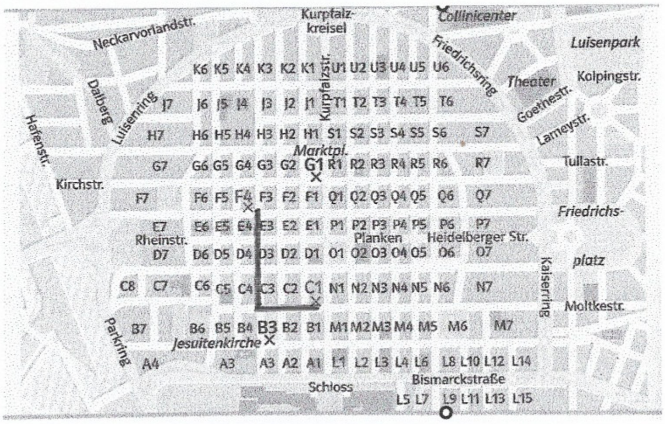
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ den Punkt A auf den Punkt B.

Quelle: Nach Lambacher Schweizer 10, Mathematik für Gymnasien Baden-Württemberg, 1. Auflage, 2016, Ernst Klett Verlag GmbH Stuttgart

Aufgabe: Stadtplan von Mannheim

In der Abbildung ist der Stadtplan der Innenstadt von Mannheim dargestellt. Der Weg vom Park (B3) zum Marktplatz (G1) kann durch das Zahlenpaar (2; 5) angeben werden.

Beschreibe ebenso den Weg von C1 nach F4. (-2; 3)



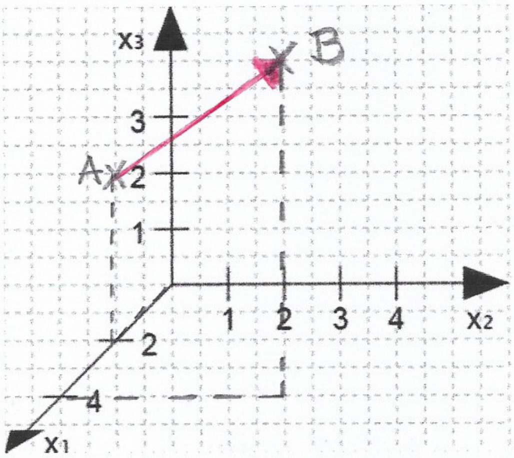
Quelle: Lambacher Schweizer 10, Mathematik für Gymnasien Baden-Württemberg, 1. Auflage, 2016, Ernst Klett Verlag GmbH Stuttgart, S. 72

Abbildung 1: Musterlösung zum Arbeitsblatt: „Stadtplan von Mannheim“

Arbeitsblatt: Vektoren

Gegeben seien die Punkte $A(2|0|3)$ und $B(4|4|6)$.

Aufgabe 1: Trage die Punkte A und B in das Koordinatensystem ein.



Quelle: http://kölzer.eu/koordinatensystem

Aufgabe 2: Angenommen man will von A nach B gelangen, darf sich aber nur parallel zu den Koordinatenachsen bewegen:

Wie weit muss man sich von A aus in x_1 – Richtung bewegen? 2

Wie weit muss man sich von A aus in x_2 – Richtung bewegen? 4

Wie weit muss man sich von A aus in x_3 – Richtung bewegen? 3

Kurzschreibweise: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Zeichne in das Koordinatensystem einen Pfeil ein, der von A nach B zeigt.

Merke:

Ein **Vektor** $\vec{v}$ beschreibt eine Verschiebung im Raum und kann durch einen Pfeil dargestellt werden.

Schreibweise: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ← Verschiebung in x_1-Richtung ← Verschiebung in x_2-Richtung ← Verschiebung in x_3-Richtung

Zu zwei Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ verschiebt der **Verbindungsvektor**

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ den Punkt A auf den Punkt B.

Quelle: Nach Lambacher Schweizer 10, Mathematik für Gymnasien Baden-Württemberg, 1. Auflage, 2016, Ernst Klett Verlag GmbH Stuttgart

Abbildung 2: Musterlösung zum Arbeitsblatt: „Vektoren"

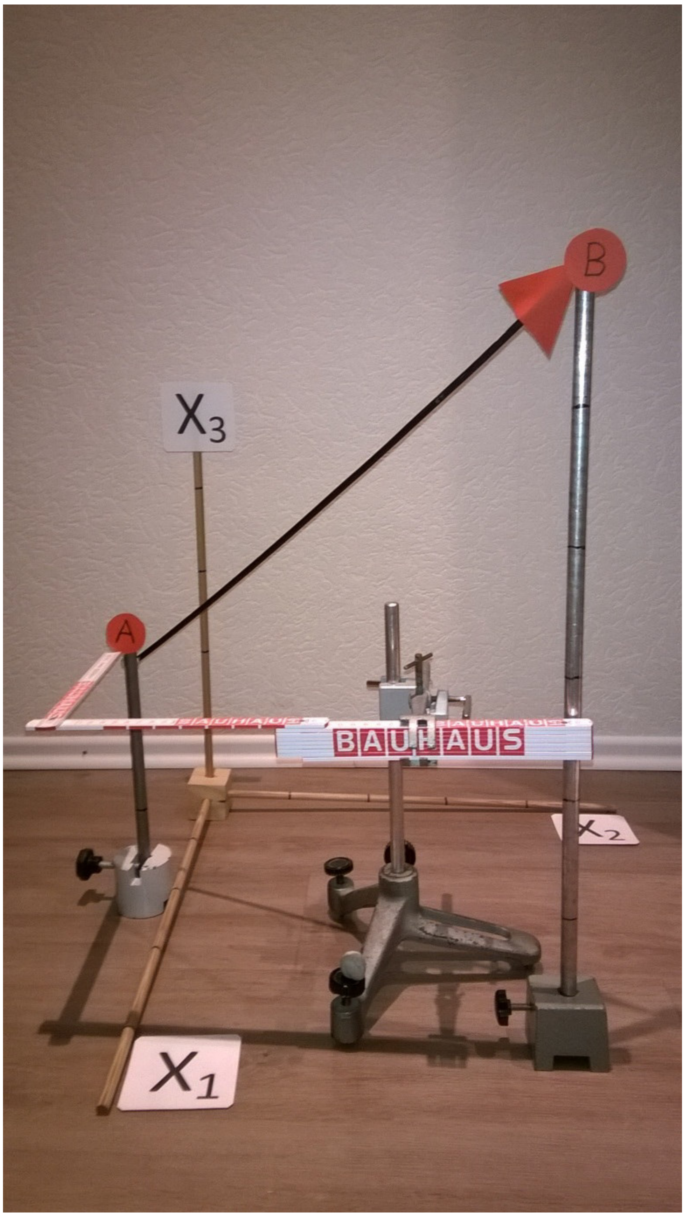


Abbildung 3: Verwendetes Modell für dreidimensionales Koordinatensystem