

# Entropie in der Schule

Jörg Hüfner und Rudolf Löhken

**Zusammenfassung:** Es wird vorgeschlagen, die Entropie in der Schule über die Vorstellung der molekularen Unordnung einzuführen. Der Begriff der Unordnung und ihre quantitative Beschreibung werden an zwei Beispielen ausführlich erklärt. Der Übergang zur Entropie ergibt sich dann relativ zwanglos. Anschließend werden die Gleichungen für die Änderung der Entropie bei Wärmezufuhr und Volumenänderung abgeleitet und diskutiert. Ferner wird vorgeschlagen, bei der Behandlung der Entropie in der Schule auch das Leben von Ludwig Boltzmann zu schildern, weswegen eine kurze Biographie eingefügt ist.

## Vorbemerkung

Entropie ist ein schwieriger Begriff. Der Schule gelingt es i.a. nicht, diesen so zu vermitteln, dass er „hängen“ bleibt. Das liegt wohl auch daran, dass die Lehrer damit selbst nicht genügend vertraut sind. Da aber das Wissen der Lehrer durch die Vorlesungen an der Universität geprägt wurde, ist letztlich die Universität für den Missstand verantwortlich. Ihr ist es offenbar bisher nicht gelungen, die Entropie so anschaulich zu vermitteln, dass diese Größe in das Denken und das Vokabular der Lehrer, der Schüler und des täglichen Lebens eingegangen ist. Ganz anders ist es mit der Energie. Sie ist heute schon Teil des öffentlichen Vokabulars, d.h. sie wird in den Medien und in Gesprächen gebraucht und sogar in den meisten Fällen richtig. Da auch Entropie eine wichtige Rolle im Verständnis der Naturvorgänge spielt, sollten auch sie und die mit ihr verbundenen Phänomene Eingang in das naturwissenschaftliche Grundwissen der Gymnasiasten finden. Das ist keine wissenschaftliche, sondern eine pädagogische Herausforderung an Universität und Schule.

Der vorliegende Beitrag ist ein Vorschlag, wie man die Entropie im Unterricht der Sekundarstufe II einführen könnte. Die unanschauliche Entropie wird auf die aus dem Alltag vertraute Unordnung zurückgeführt. Dazu muss man sich allerdings auf die Ebene der Atome und Moleküle begeben. Dieser Gedanke ist natürlich nicht neu, sondern geht u.a. auf Ludwig Boltzmann zurück. In vielen Schulbüchern wird diese Sicht der Entropie erst am Ende der Wärmelehre „nachgeschoben“. In dem vorliegenden Artikel wollen wir zeigen, wie man im Unterricht den Begriff Unordnung einführen kann und welche konzeptionellen Vorteile der mikroskopische Zugang hat. Da selbst auf diesem Weg die Entropie ein schwieriger Begriff bleibt, raten wir davon ab, sie schon im Physik-Anfangsunterricht einzuführen. Dort sollte man sich auf die Temperatur und die Wärme beschränken.

## Wärme

In der Wärmelehre treten drei neue physikalische Größen auf: Temperatur, Wärme und Entropie. Wir werden sie in dieser Reihenfolge diskutieren.

Die Empfindungen heiß und kalt sind Erfahrungen des täglichen Lebens. Ihre physikalische Präzisierung führt auf den Begriff der Temperatur, die ein Maß für den Wärmezustand eines Körpers ist und mit einem Thermometer gemessen werden kann. Ihre tiefere Bedeutung wird erst klar, nachdem ein Zusammenhang mit der Entropie hergestellt ist (siehe unten).

Als Graf Rumford (1753 - 1814) die Wärmeentwicklung beim Aufbohren von Kanonenrohren beobachtete, erahnte er einen Zusammenhang zwischen Wärme und Energie: Wärme ist eine Form der Energie.

Wodurch unterscheidet sich Wärme - genauer Wärmeenergie - von anderen Energieformen, wie der Bewegungsenergie, der potentiellen Energie oder der elektrischen Energie? Wenn einem Körper Wärme zugeführt wird, erhöht sich (außer bei einem Phasenübergang) seine Temperatur, aber es treten i.a. keine weiteren sichtbaren Veränderungen des Körpers auf. Diese Beobachtung, die natürlich schon recht alt ist, führte Graf Rumford zu der Vermutung, dass Wärme eine Art innerer Energie sei. Er schrieb sie der vibrierenden Bewegung der Teilchen zu, aus denen der erwärmte Körper besteht. Um 1800, als die Physiker die Vorstellung von der atomaren Struktur der Materie noch kaum akzeptiert hatten, war dies eine außerordentlich weitsichtige Hypothese.

Rumfords Vermutung wurde später von Ludwig Boltzmann (1844 - 1906) und James Maxwell (1831 - 1879) zu einer konsistenten Theorie, der kinetischen Theorie der Gase, ausgearbeitet. Nach dieser besteht ein Gas, das in einem Volumen eingeschlossen ist, aus kleinsten Teilchen (Atomen oder Molekülen), die sich unabhängig voneinander „kreuz und quer“ durch den Raum bewegen. Gelegentlich werden diese Teilchen an den Wänden reflektiert oder ändern ihre Geschwindigkeiten, wenn sie gegeneinander stoßen. Würde man in regelmäßigen Abständen Bilder von dem Gas machen, so ergäbe sich jeweils eine Situation höchster Unordnung, d.h. die einzelnen Teilchen sind ungleichmäßig über den Raum verteilt und auch ihre Geschwindigkeiten lassen keine Regelmäßigkeiten erkennen. Diese Unordnung wird manchmal auch durch den anschaulichen Begriff „Kleingewimmel“ beschrieben [1].

Der Zustand der Unordnung ändert sich auch nicht wesentlich, wenn dem System Wärme zugefügt wird. Nur die Geschwindigkeiten der Moleküle werden im Mittel größer. Es ist üblich, zwischen der inneren Energie eines Körpers und der dem Körper zu- oder abgeführten Wärme zu unterscheiden. Die innere Energie eines Körpers ist diejenige Energie, die in der ungeordneten Bewegung seiner Teilchen (Atome oder Moleküle) steckt. Die Wärme hingegen ist diejenige Energie, die durch Wärmekontakt einem Körper zu- oder von ihm abgeführt wird und dadurch dessen innere Energie verändert. Die innere Energie charakterisiert den Zustand eines Körpers oder Systems und ist daher eine Zustandsgröße. Die Wärme hingegen ist - ähnlich wie die Arbeit - eine Übergangsgröße, die den Zuwachs oder die Abnahme an innerer Energie angibt. Bei der Beschreibung des inneren Zustandes eines erwärmten

Körpers tritt der Begriff Unordnung auf, der eng mit der Entropie zusammenhängt und zunächst einmal definiert werden muss.

### Geordnete und ungeordnete Bewegung

Im Gegensatz zur ungeordneten Bewegung in einem Gas wird eine Bewegung von Teilchen geordnet genannt, wenn diese alle mit gleicher Geschwindigkeit und in die gleiche Richtung fliegen, sozusagen in „Reih und Glied“ wie beim Formationsflug einer Flugzeugstaffel. Die Mechanik ist der Teil der Physik, der sich mit geordneten Bewegungen beschäftigt. Wenn ein Stein zu Boden fällt, bewegen sich, wenn man von der ungeordneten Eigenbewegung absieht, alle seine Teilchen mit der gleichen Geschwindigkeit und in die gleiche Richtung. Die zugehörige Energie, die kinetische Energie des Steins, berechnet sich aus seiner Gesamtmasse  $M$  und seiner Geschwindigkeit  $v$  zu:

$$E_{\text{Stein}} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot N \cdot m \cdot v^2, \quad (1)$$

wobei angenommen wurde, dass der Stein aus  $N$  Teilchen der Masse  $m$  besteht.

Auch dem Gas in einem ruhenden Behälter lässt sich eine Energie zuordnen. Auch sie berechnet sich als die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Teilchen

$$E_{\text{Gas}} = \sum_i (\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2), \quad (2)$$

wobei die  $v_i$  die Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen sind, die sich allerdings voneinander in Richtung und Größe unterscheiden. Würden sich alle Teilchen in die gleiche Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, gälte  $v_i = v$ , und man erhielte die Gleichung (1). Um eine geordnete Bewegung vollständig zu beschreiben, benötigt man nur die Kenntnis *einer* Geschwindigkeit, während der Zustand eines Gases zu einem bestimmten Zeitpunkt erst vollständig bestimmt ist, wenn die Geschwindigkeiten *aller* Teilchen bekannt sind.

Die Unordnung in einem Gas hat zwei Ursprünge: die Vielzahl der möglichen Orte und die Vielzahl der möglichen Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen. Bei einem Festkörper ist das etwas anders, da dort alle Moleküle oder Atome fest an bestimmte Orte gebunden sind. Sie schwingen um ihre Ruhelagen, wobei die Richtung und die Stärke der Schwingung von Teilchen zu Teilchen variieren. Das ist ihre Form von Unordnung.

Die mikroskopische Beschreibung eines Gases durch die ungeordnete Bewegung seiner Teilchen ist zwar sehr anschaulich, aber völlig unpraktisch. Denn wollte man diesen Zustand vollständig beschreiben, stünde man vor einer unüberwindlichen Schwierigkeit: Wegen der Vielzahl der Moleküle (unter Normalbedingungen  $N = 6 \cdot 10^{23}$  in einem Mol) ist es völlig unmöglich, die Geschwindigkeiten aller Teilchen zu einem festen Zeitpunkt zu kennen und ihre zukünftige Bewegung zu berechnen.

Glücklicherweise ist es für viele Anwendungen gar nicht nötig, alle Details der Unordnung in einem Gas zu kennen. Der Grad der Unordnung lässt

sich nämlich durch eine neue Größe, die Entropie, charakterisieren. Hierzu benötigt man (in einem gewählten Einheitensystem) nur eine einzige Zahl.

In diesem Zusammenhang bietet sich ein Demonstrationsexperiment zur Brownschen Bewegung an. Darin wird die ungeordnete Bewegung von Molekülen eines Gases oder einer Flüssigkeit durch eine Zitterbewegung beobachtbarer Teilchen sichtbar gemacht.

### Wie definiert man Unordnung?

Jeder glaubt intuitiv zu wissen, was Ordnung ist, hätte aber Schwierigkeiten, dem Ordnungszustand eines Systems eine Zahl zuzuordnen. Hat die Unordnung auf meinem Schreibtisch den Wert 7 oder 12 000? Welchen Wert hat die Unordnung in einem Kinderzimmer vor und nach einem Kindergeburtstag? Diese Fragen sind vielleicht etwas merkwürdig, lassen sich aber beantworten.

Um der Quantifizierung von Unordnung näher zu kommen, betrachten wir als Beispiel eine Bibliothek mit  $N$  Büchern. Der ordentlichste und erwünschte Zustand der Bibliothek ist hergestellt, wenn alle  $N$  Bücher nach dem Alphabet angeordnet sind. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit. Wir wollen die Zahl der Möglichkeiten, die Bücher anzuordnen, mit dem Buchstaben  $W$  bezeichnen. Dann gilt für die alphabetische Anordnung

$$W_0 = 1. \quad (3)$$

Entnimmt nun ein Leser ein Buch und stellt es nach dem Lesen zurück, ohne darauf zu achten wohin, so ist die Bibliothek in Unordnung gekommen. Der unaufmerksame Leser könnte das Buch an  $N$  mögliche Plätze gestellt haben, nämlich vor, zwischen oder hinter die verbleibenden  $N-1$  Bücher. Also würden wir den Grad der Unordnung durch

$$W_1(N;a) = N \quad (4)$$

beschreiben. In dem Argument der Funktion  $W_1$  gibt  $N$  die Gesamtzahl der Bücher in der Bibliothek an und der Buchstabe  $a$  beschreibt, welches Buch verstellt ist. Wenn zwei Leser ihre Bücher  $a$  und  $b$  an beliebige Positionen zurückstellen, gibt es dafür genau

$$W_2(N;a,b) = N \cdot (N-1) \quad (5)$$

Möglichkeiten.

Wenn aber überhaupt keine Ordnung d.h. maximale Unordnung bei den Büchern vorliegt, dann können die  $N$  Bücher in jeder möglichen Reihenfolge vorliegen, wobei die Zahl dieser Reihungen

$$W_{\max}(N) = N! \quad (6)$$

beträgt. Bei der Funktion  $W_{\max}(N)$  muss man nicht mehr angeben, welche Bücher verstellt wurden, da es ja alle sind. Mit wachsendem  $N$  wird  $W_{\max}(N)$  schnell sehr groß: Für eine Bibliothek mit nur 10 Büchern erhält man  $W_{\max} = 3,6 \cdot 10^6$  Möglichkeiten.

Für ein ganz allgemeines System definieren wir: Der Grad der Unordnung eines Systems wird durch die Zahl  $W$  der möglichen Zustände beschrieben, die das System einnehmen kann.  $W = 1$  bedeutet maximale Ordnung. Beispiel: Wenn es auf meinem Schreibtisch 10 Orte gibt, wo 10 verschiedene Dinge abgelegt werden können, ich aber nicht darauf achte, was ich wohin lege, so hätte meine persönliche Unordnung den Wert  $3,6 \cdot 10^6$ .

Der Grad  $W$  der Unordnung lässt sich auch durch eine andere uns aus dem Alltag vertraute Größe, die Wahrscheinlichkeit, charakterisieren: Wenn  $W$  die Anzahl der möglichen Zustände ist, dann ist der Kehrwert  $1/W$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer dieser Zustände realisiert ist. Für den einfachen Fall, dass nur das Buch  $a$  verstellt wurde, gibt die Größe  $1/W_1(N;a)$ , die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ich dieses Buch an einer beliebigen, von mir gewählten Stelle finde. Wenn zwei Bücher  $a$  und  $b$  verstellt wurden, gibt  $1/W_2(N;a,b)$  die Trefferwahrscheinlichkeit dafür an, die Bücher  $a$  und  $b$  an zwei bestimmten Stellen zu finden usw.

Aus unserer Erfahrung mit Bibliotheken (auch unseren eigenen) sind wir bereits mit einigen Eigenschaften der Unordnung vertraut.

- Wird eine Bibliothek sich selbst, d.h. den Lesern, überlassen, nimmt die Unordnung mit der Zeit zu. Es kann natürlich manchmal passieren, dass der unachtsame Leser zufällig ein Buch an den richtigen Platz stellt. Dann würde die Unordnung zwar reduziert, jedoch um einen vernachlässigbaren Betrag.
- Es gibt einen Maximalwert  $W_{\max}$  der Unordnung, nämlich den, wenn alle Bücher verstellt sind. Auch wenn sich durch weitere Benutzer der Bibliothek die Reihung der Bücher verändert, bleibt der Grad der Unordnung bestehen, weil von keinem Buch bekannt ist, wo es steht.
- Je größer die Unordnung ist, desto weniger wert ist eine Bibliothek.
- Nur durch ein Eingreifen von außen, z.B. durch das Personal der Bibliothek, kann die Unordnung wieder abnehmen.

Bei dem Beispiel der Bibliothek war das Abzählen der möglichen Anordnungen einfach, weil es sich um ein eindimensionales Problem mit unterscheidbaren Objekten handelt. Wie aber zählt man die möglichen Zustände eines Gases mit  $N$  Molekülen ab? Das soll im nächsten Abschnitt an einem Beispiel gezeigt werden.

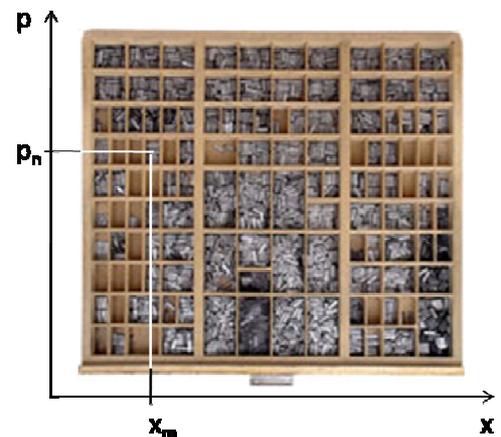


Abb. 1: Der Setzkasten als Modell für den Phasenraum einer eindimensionalen Bewegung. Zum Beispiel nimmt das Fach mit den Koordinaten  $(x_m, p_n)$  alle Teilchen auf, die diese Orts- und Impulswerte haben.

## Unordnung in einem Gas

Wir wollen uns die Aufgabe etwas erleichtern, indem wir ein Modellgas betrachten, das zwar nicht ganz realistisch ist, dafür aber den Vorteil hat, dass die Mathematik einfach wird. Zunächst nehmen wir an, dass die Gaspartikel sich nicht in drei, sondern nur in einer Raumdimension bewegen können und auch dort nur in einem beschränkten Bereich zwischen  $-L/2$  und  $+L/2$ . Dann lässt sich die augenblickliche Position des  $i$ -ten Teilchens durch eine Zahl  $x_i$  mit  $-L/2 \leq x_i \leq +L/2$  beschreiben. Das ist vergleichbar mit den Positionen der Bücher in den Regalen. Im Unterschied zu den ruhenden Büchern gehört zu den Teilchen aber auch noch eine Geschwindigkeit  $v_i$  (oder ein Impuls  $p_i$ ). Dazu wollen in unserem Modellgas weiter annehmen, dass die Werte der möglichen Impulse nach oben und unten durch  $(-P/2 \leq p_i \leq +P/2)$  beschränkt sind. Dann lassen sich auch die Impulse  $p_i$  nach ihrer Größe ordnen. Will man nun die Moleküle nach ihren Orten *und* Impulsen ordnen, kann man sich einen Setzkasten mit vielen einzelnen Fächern vorstellen (Abb. 1). Zu vorgegebenen Werten  $x_m$  des Ortes und  $p_n$  des Impulses gehört ein Fach, worin alle Teilchen mit diesen Orts- und Impulswerten abgelegt werden. Ein solcher Setzkasten heißt in der Physik (zweidimensionaler) Phasenraum, und die einzelnen Fächer nennt man die Zellen des Phasenraums. Man sollte darauf hinweisen, dass sich der Phasenraum nicht nur auf den vertrauten Ortsraum bezieht, sondern darüber hinaus den abstrakten Raum der Impulsvektoren einschließt. Zur Beschreibung einer im Ortsraum eindimensionalen Bewegung hat der Phasenraum deshalb zwei Dimensionen. Zu Bewegungen im üblichen dreidimensionalen Ortsraum gehört ein sechsdimensionaler Phasenraum.

Da Orts- und Impulsvariable kontinuierliche Größen sind, würde man zunächst vermuten, dass der zu dem Gas gehörige Phasenraum unendlich viele Zellen hat. Weil es dann unendlich viele Möglichkeiten gäbe, wäre die Unordnung immer unendlich groß, sogar schon für *ein* Teilchen. Das verhindert die Quantenphysik, was zunächst völlig unerwartet ist. Aber wir sollten nicht vergessen, dass in der Mikrowelt, der Welt der Atome und Moleküle, häufig die Quantenphysik das entscheidende Wort spricht. Für unseren Phasenraum ergibt sich aus der Quantenphysik:

Der Flächeninhalt einer nicht mehr teilbaren Elementarzelle mit den Seitenlängen  $\Delta x$  (in Ortsrichtung) und  $\Delta p$  (in Impulsrichtung) ist gleich dem Wert der Planckschen Konstante  $h$ , d.h.  $\Delta x \cdot \Delta p = h$ . Dieses Ergebnis erinnert an die Heisenbergsche Unschärferelation.

Damit berechnet sich die Zahl  $M$  der Zellen im Phasenraum für unser eindimensionales Modellgas zu

$$M = (L \cdot P / h). \quad (7)$$

Diese Zahl hat eine einfache Bedeutung. Sie ist der Quotient aus dem Flächeninhalt des zugelassenen Phasenraumes  $L \cdot P$  und der Fläche  $h$  der Elementarzelle. Die Zahl der Zellen hängt also von der Ausdehnung im Ortsraum und im Impulsraum ab.

Achtung:  $M$  ist eine sehr große Zahl! Für eine Länge  $L = 0,3$  m und für Stickstoffmoleküle mit der maximalen Geschwindigkeit  $V = P/m = 970$  m/s ergibt sich  $M = 2 \cdot 10^{10}$ . Im realistischeren Fall, bei dem sich die Gasmoleküle in drei Dimensionen bewegen, erhöht sich diese Zahl auf  $M^3 \approx 10^{31}$ . Füllt man das Volumen  $V = L^3$  mit  $N = 6 \cdot 10^{23}$  Molekülen, dann entspricht die Wahl von  $V$ ,  $P$  und  $N$  einem Mol Stickstoffgas unter Normalbedingungen. Die Zahl  $M^3$  der Phasenraumzellen dieses Systems ist wesentlich größer als die Anzahl  $N$  der Moleküle in dem Gas, so dass die meisten Zellen leer bleiben, wenn die  $N$  Moleküle auf die  $M$  Zellen des Phasenraums verteilt werden. Eine ähnliche Situation liegt in einer Bibliothek vor, die auf Zuwachs angelegt ist und in der noch viele Regalplätze unbesetzt sind.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es,  $N$  unterscheidbare Moleküle auf  $M^3$  Fächer zu verteilen? Für *ein* herausgegriffenes Molekül  $a$  ergeben sich genau  $W_1(N;a) = M^3$  Möglichkeiten, für zwei Moleküle  $a$  und  $b$  erhält man  $W_2(N;a,b) = (M^3)^2$  Möglichkeiten. Für alle  $N$  Gasmoleküle findet man dann

$$W_{\max}(P, L, N) = (M^3)^N = (L \cdot P/h)^{3 \cdot N}, \quad (8)$$

wobei hier angenommen wird, dass jedes Fach mehrere Moleküle aufnehmen kann. Die Größe  $W_{\max}$  hängt nicht mehr davon ab, welche Moleküle an der Unordnung beteiligt sind, sondern nur von den von außen vorgegebenen Abmessungen  $P$  und  $L$  des Phasenraums, also von makroskopischen Größen.

Wenn schon die Zahlen  $M$  und  $N$  der Fächer und der Moleküle groß sind, so ist  $W_{\max}$  eine riesige Zahl, die jedes Vorstellungsvermögen übersteigt, weil der Exponent  $N$  so unvorstellbar groß ist: Für ein Mol Stickstoff ist  $W_{\max}$  eine Zahl mit  $10^{25}$  Ziffern; das ist eine Zahl, die man selbst dann nicht ausschreiben könnte, wenn man länger als das Universum leben würde.

Man sollte sich die Verteilung im Phasenraum jedoch nicht statisch vorstellen. Die einzelnen Teilchen bewegen sich, d.h. sie verändern ständig ihren Ort, gleichzeitig finden Stöße zwischen den Teilchen statt, wobei sich deren Impulse verändern. Nach dem Stoß belegen die am Stoß beteiligten Teilchen jeweils neue Zellen im Phasenraum. Bei einem Stoß zwischen zwei Gasmolekülen passiert dasselbe wie in einer Bibliothek, wenn ein unaufmerksamer Leser zwei Bücher aus den Regalen herausnimmt und sie an zwei neue Positionen wieder einstellt. In einem Gas unter Normalbedingungen stößt z.B. jedes einzelne Teilchen etwa  $10^{11}$  Mal in der Sekunde mit anderen Teilchen zusammen; da ebenso auch alle andern Teilchen stoßen, verändern sich die Verteilungen im Phasenraum  $N \cdot 10^{11} = 10^{34}$  Mal in der Sekunde. Auch wenn diese Zahl sehr groß ist, ist sie immer noch winzig im Vergleich mit der Gesamtzahl  $W_{\max}$ , die  $10^{25}$  und nicht nur 34 Ziffern hat.

Solange im Gas noch eine teilweise Ordnung vorliegt, führen die Stöße dazu, dass die Unordnung im Laufe der Zeit zunimmt. Eine teilweise Ordnung liegt z.B. in einem Gas vor, dessen Dichte ortsabhängig ist. Die Tendenz zur Unordnung lässt sich für Systeme mit wenigen Molekülen in Modellrechnungen nachvollziehen. Dass diese Tendenz eine ganz allgemeine Eigenschaft physikalischer Systeme ist, wird im Zweiten Hauptsatz der Wärmelehre ausgesagt. Der Zustand maximaler Unordnung, der mit dem Be-

griff der Entropie verknüpft ist, wird erst nach einer gewissen Zeit erreicht, wobei diese Zeit von Eigenschaften des Systems abhängt.

Da man meist keinen Setzkasten zur Verfügung hat, kann man die Besetzung im Phasenraum und ihre Veränderung auch mit einem Eierkarton in Palettenform und einigen Tischtennisbällen veranschaulichen: Man legt einige Bälle in die Vertiefungen und erhält damit eine der möglichen Konfigurationen. Schüttelt man den Karton vorsichtig, so dass die Bälle von einer Vertiefung in die andere springen können, ergeben sich neue Besetzungsmöglichkeiten.

## Entropie

Im Folgenden betrachten wir ein abgeschlossenes System, d.h. ein System, das von der Umwelt isoliert ist und in dem die innere Energie  $E$ , das Volumen  $V$ , die Teilchenzahl  $N$  und evtl. andere makroskopische Parameter konstant gehalten werden. Beispiele hierfür sind eine sich selbst überlassene Präsenzbibliothek, aus der keine Bücher entliehen werden dürfen, oder ein Gas mit festem Volumen, undurchlässigen Wänden und fester Energie. Nicht nur die Zahl  $W$  der Möglichkeiten, in denen die Bücher in den Regalen oder die Gasteilchen im Phasenraum verteilt sein könnten, ist ein Maß für die Unordnung, sondern auch jede monoton wachsende Funktion  $f(W)$ . Diese Freiheit hat man benutzt und hat unter den vielen möglichen monotonen Funktionen  $f$  die Logarithmusfunktion ausgewählt. Durch den Ausdruck

$$S(E, V, N) = k \cdot \ln W_{\max}(E, V, N) \quad (9)$$

wird die Entropie  $S$  definiert. Man beachte, dass sie ein Maß für die *maximale* Unordnung eines Systems ist, aber nicht von Details des mikroskopischen Systems, sondern allein von wenigen makroskopischen Variablen z.B.  $E$ ,  $V$ ,  $N$  abhängt. Nach einer für jedes System charakteristischen Zeit wird ein abgeschlossenes System von selbst in den Zustand maximaler Unordnung übergehen. Erst dann darf man dem System einen Wert für die Entropie zuordnen. Dieser wird sich aber – solange das System abgeschlossen bleibt – auch nicht weiter ändern. Deshalb ist die Entropie eine Größe, die den Zustand des Systems beschreibt, weswegen auch sie zu den Zustandsgrößen gehört. Man sieht hier zum ersten Mal einen Vorteil des mikroskopischen Zugangs. Denn es ist unmittelbar und ohne Rechnungen einsichtig, dass die Entropie eine Zustandsgröße sein muss.

Der Wert der multiplikativen Konstanten  $k$  in der Definition der Entropie ist zunächst nicht festgelegt. Identifiziert man  $k$  jedoch mit der Boltzmann Konstanten, werden viele Beziehungen einfacher. Dieser Name für  $k$  wurde übrigens durch Planck eingeführt, und er war es auch, der sich dafür

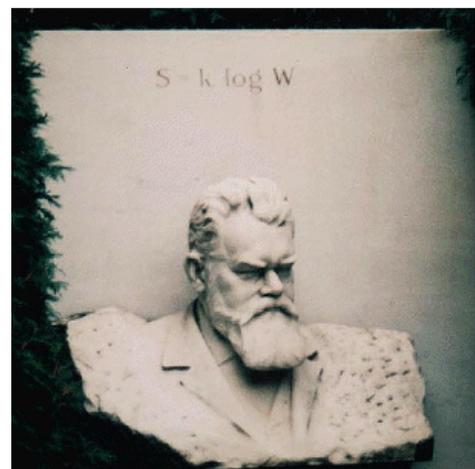


Abb. 2: Boltzmanns Grabstein auf dem Wiener Zentralfriedhof.

einsetzte, dass der Ausdruck Gl. (9) für die Entropie auf Boltzmanns Grabstein eingemeißelt wurde (Abb. 2).

Für unser Beispiel des dreidimensionalen Modellgases (MG) ergibt sich für die Entropie:

$$S_{MG}(P, V, N) = k \cdot \ln (L \cdot P / h)^{3N} = k \cdot N \cdot [3 \cdot \ln P + \ln V - 3 \cdot \ln h]. \quad (10)$$

Das ist ein erstaunlich einfacher Ausdruck für eine Größe, die sich auf ein völlig ungeordnetes System mit viel Kleingewimmel bezieht. In diesem Ausdruck hängt die Entropie  $S$  von den drei Variablen  $P$ ,  $V = L^3$  und  $N$  ab. Die Größe des maximalen Impulses  $P$  für ein einzelnes Teilchen hängt mit der gesamten inneren Energie  $E$  des Systems zusammen. Denn  $E$  ist die Summe der Bewegungsenergien der einzelnen Teilchen, deren Impulse zwischen den Werten  $-P/2$  und  $P/2$  gleichverteilt sind ( $E = N \cdot P^2 / (8 \cdot m)$ ).

Die Herleitung der Gleichung (10) für die Entropie eines eindimensionalen Gases lässt sich vermutlich auch von Schülern nachvollziehen. An ihr sieht man unmittelbar, dass die Entropie mit der Energie dem Volumen und der Teilchenzahl zunimmt.

Neben der Annahme, dass die Werte der Impulse der einzelnen Moleküle durch  $\pm P/2$  beschränkt sind, wurde bei unserem Modellgas auch vorausgesetzt, dass die Teilchen unterscheidbar sind. Hebt man diese beiden Annahmen auf, so ergibt sich der Ausdruck für die Entropie eines idealen Gases (IG) von ununterscheidbaren Teilchen mit der Masse  $m$  zu

$$S_{IG}(E, V, N) = k \cdot N \cdot [3/2 \cdot \ln(E \cdot m) + \ln V - 5/2 \cdot \ln N - 3 \cdot \ln h - \text{const.}], \quad (11)$$

worin  $E$  die Gesamtenergie des Systems mit dem Volumen  $V$  und der Teilchenzahl  $N$  ist. Dieser Ausdruck, der hier nicht abgeleitet werden soll, ist der Entropie des Modellgases Gl. (10) erstaunlich ähnlich, so dass selbst unser vereinfachtes Modellgas die Physik des idealen Gases schon recht gut beschreibt.

Bei der Definition der Entropie in Gl. (9) hat man die Logarithmusfunktion gewählt, weil diese eine wichtige Eigenschaft besitzt: der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen, d.h.  $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ . Für zwei physikalische Systeme  $A$ ,  $B$ , die nichts miteinander zu tun haben, ist die Zahl der Möglichkeiten  $W_{A,B}$  gleich dem Produkt der Möglichkeiten der Einzelsysteme  $W_{A,B} = W_A \cdot W_B$ . Damit gilt für zwei nicht in Kontakt stehende Systeme  $A$  und  $B$ , dass sich ihre Entropien addieren

$$S_{A,B} = S_A + S_B \quad (12)$$

Die Definition der Entropie durch Gl. (9) mit dem Logarithmus und der kleinen Zahl  $k$  hat den zusätzlichen Vorteil, dass sich für die in der Physik üblichen Systeme kleine Maßzahlen für die Entropie ergeben.

Damit ist die Einführung der Entropie abgeschlossen. Da dieser erste Teil vermutlich recht anstrengend war, schlagen wir an dieser Stelle vor, auf Boltzmanns interessantes Leben einzugehen. Denn wir glauben, dass Schüler abstrakte Sachverhalte besser behalten, wenn diese mit der Kenntnis der Entdecker verknüpft werden.

## Ludwig Boltzmann (1844 – 1906)



*"Bring vor, was wahr ist,  
schreib so, daß es klar ist,  
und verficht's, bis es mit dir gar ist."*

Boltzmanns Leitspruch

Ludwig Boltzmann wurde als Sohn eines kaiserlich- und königlichen Finanzbeamten in Wien geboren. Seine Kindheit und Jugend verbrachte er in kleinen Provinzstädten, zunächst in Wels und später in Linz, wo er auch das Gymnasium besuchte. Schon als Schüler zeichnete er sich durch außerordentlichen Lerneifer aus und entwickelte eine spezielle Vorliebe für die Naturwissenschaften. Er war immer Klassenbesten und legte sein Abitur mit 17 Jahren ab. Anschließend studierte er Physik und Mathematik an der Wiener Universität. Es war die Zeit, in der Kaiser Franz Joseph regierte und in der die große Wiener Musiktradition durch Bruckner, Brahms, Mahler und die Familie Strauß fortgesetzt wurde. Das geistige Klima in Wien war anregend, so dass auch die Naturwissenschaften und die Medizin einen blühenden Aufschwung nahmen. Man pflegte insgesamt eine kultivierte Lebensweise, und Wien betrachtete sich als das "Paris Osteuropas".

Nach drei Jahren promovierte Ludwig Boltzmann beim Leiter des Wiener Physikalischen Instituts Josef Stefan mit einer Arbeit zur kinetischen Gastheorie, wurde anschließend Assistent und ein Jahr später Privatdozent.

Bereits mit 25 Jahren wurde Boltzmann ordentlicher Professor für mathematische Physik in Graz. In den Jahren 1869 und 1871 folgen Aufenthalte in Heidelberg und Berlin, wo er mit Kirchhoff, Bunsen und Helmholtz zusammenarbeitete. Im Jahre 1873 ging Boltzmann zurück nach Wien, wo er einen Lehrstuhl für Mathematik erhielt. Doch schon nach drei Jahren kehrte er als Professor für Experimentalphysik wieder nach Graz zurück, diesmal für 14 Jahre. Zwar schlug sein Herz für die theoretische Physik, doch Boltzmann war auch ein tüchtiger Experimentator, der durch Messungen von Dielektrizitätskonstanten und Brechungsindizes auf sich aufmerksam machte. Hermann Nernst und der Schwede Svante Arrhenius, später führende Köpfe der physikalischen Chemie, gehörten zu seinen Schülern. In diese Zeit gehört auch eine Anekdote, die Boltzmanns legendäre Schrulligkeit belegt: Um mit Milch versorgt zu sein, kaufte er sich eine Kuh und trieb sie selbst mitten durch die Stadt nach Hause.

Boltzmann pflegte - halb im Scherz - seine häufigen Ortswechsel damit zu begründen, dass er in den späten Stunden eines Fastnachtsdienstags geboren wurde. Aber wahrscheinlich war seine Ruhelosigkeit durch gesundheitli-

che Probleme bedingt. Er war manisch-depressiv und suchte seine Depressionen durch Ortswechsel zu bekämpfen. Außerdem hatte er Asthma, häufig Migräne und später Augenprobleme, so dass er einen Vorleser einstellen musste.

Sein Leben wurde zusätzlich erschwert, nachdem der Physiker Ernst Mach im Jahre 1895 auf den Lehrstuhl für die Geschichte und Philosophie der Naturwissenschaften nach Wien berufen worden war und Boltzmann wegen seiner Vorstellungen zum atomaren Aufbau der Materie heftig bekämpfte. Boltzmann wechselte nach Leipzig und kehrte erst nach Wien zurück, als Mach im Jahre 1901 nach einem Schlaganfall seinen Lehrstuhl aufgab. Fortan lehrte er nicht nur theoretische Physik, sondern las auch über philosophische Probleme der Naturwissenschaften. Diese Vorlesung wurde in kurzer Zeit so berühmt, dass auch der größte Hörsaal der Universität nicht ausreichte, alle Zuhörer zu fassen.

Auch wenn Boltzmann manchmal seine Mitmenschen mit beißender Ironie traktieren konnte, war er doch meist ein liebenswerter Mensch, wie Mitarbeiter und Studenten berichten. Er liebte Musik, war ein guter Pianist, und in seiner Wohnung fanden häufig Hausmusikabende statt. Seine Briefe sind lebendig geschrieben, und seine wissenschaftlichen Arbeiten zeichnen sich durch gute Formulierungen aus. Manchem Physiker, wie z.B. Maxwell, waren sie jedoch zu lang und dadurch unverständlich.

Mit zunehmendem Alter verschlechterte sich Boltzmanns Gesundheitszustand. Die Depressionen nahmen zu und die Angriffe auf seine Vorstellung von der atomaren Struktur der Materie ließen nicht nach. Er erhängte sich während eines Urlaubs mit seiner Familie im damals österreichischen Duino in der Nähe von Triest. Was ihn letztlich zum Selbstmord trieb, bleibt ein Rätsel.

Boltzmanns Größe wurde schon zu seinen Lebzeiten anerkannt. Er erhielt viele Preise, wurde in Akademien aufgenommen und erhielt u.a. die Ehrendoktorwürde der Universität Oxford. Die 1960 gegründete Ludwig-Boltzmann-Gesellschaft ist der angesehenste außeruniversitäre wissenschaftliche Verband Österreichs und entspricht der deutschen Max-Planck-Gesellschaft. Sie betreut mehr als 130 Institute und Forschungsstellen, die auf verschiedensten wissenschaftlichen Gebieten tätig sind. [2]

## **Der Zweite Hauptsatz der Wärmelehre**

Die allerwichtigste Eigenschaft der Entropie wird im sog. Zweiten Hauptsatz der Wärmelehre zusammengefasst: In einem *abgeschlossenen* System nimmt die Entropie niemals ab, jede Änderung  $\Delta S$  der Entropie ist also nicht-negativ oder in Formeln

$$\Delta S \geq 0. \quad (13)$$

Entscheidend ist die Bedingung „abgeschlossen“, d.h. die makroskopischen Variablen Gesamtenergie  $E$ , Volumen  $V$  und Gesamtzahl  $N$  dürfen sich nicht verändern. Wegen des Zusammenhangs von Entropie und Unordnung ist die Aussage der Gl. (13) plausibel: Von selbst nimmt Unordnung nie ab. Aber Plausibilität ist kein Beweis. Gleichung (13) ist ein Naturgesetz, dessen Begründung alleine im Verhalten der Natur zu suchen ist. Der mikroskopische Zugang zur Entropie über die Unordnung beweist Gleichung (13) nicht, aber er erlaubt ein unmittelbar anschauliches Verständnis.

Hierzu ein Beispiel dafür, wie sich die Entropie verändern kann: Zwei Körper A und B, denen verschiedene Werte  $E_A$  und  $E_B$  der inneren Energie zugeordnet werden, seien zunächst voneinander getrennt. Jeder der beiden Körper befindet sich im Gleichgewichtszustand, so dass man ihnen die Werte der Entropie  $S_A$  und  $S_B$  zuordnen kann, deren Summe die Gesamtentropie ist. Bringt man die Körper in Kontakt, so entsteht i.A. zunächst ein Zustand des Nichtgleichgewichtes, d.h. spontan wird Wärme von einem Körper zum anderen fließen, bis sich ein neuer Gleichgewichtszustand eingestellt hat. Erst dann lässt sich dem Gesamtsystem ein neuer Wert für die Entropie zuordnen, der größer als der Anfangswert ist. In dem Zwischenzustand, während die Wärme fließt, hängt der Zustand nicht nur von der Gesamtenergie ab, sondern von vielen anderen Details wie der Art des Wärmekontakts und der Größe und Form der Einzelsysteme.

Da die Entropie sich in einem abgeschlossenen System immer in eine Richtung entwickelt, bezeichnet man die Entropie als *Richtungsgröße*, zum Unterschied von der Energie, die für jedes abgeschlossene System eine *Erhaltungsgröße* ist. Das Wort „Entropie“ (griech.: sich nach etwas hinwenden) drückt diese Bedeutung auch aus.

Wenn es in einem System unter gegebenen Umständen nur eine Möglichkeit der Anordnung gibt (wie z.B. die alphabetische Reihung in einer Bibliothek, Gl. (1)), dann gilt  $W = 1$ , woraus unmittelbar  $S = 0$  folgt. Ganz allgemein wird der Zustand maximaler *Ordnung* eines Systems durch den Wert  $S = 0$  beschreiben. In der Natur ist dieser Zustand am absoluten Nullpunkt realisiert, wenn die Teilchen an festen Orten zur Ruhe gekommen sind. Man nennt die Aussage  $S = 0$  bei  $T = 0$  auch den Dritten Hauptsatz der Wärmelehre.

## Entropie und Temperatur

Nachdem die Entropie eines Systems über die maximale Unordnung seiner Moleküle eingeführt wurde, sind viele konzeptionelle Probleme, die mit der Entropie auftreten, gelöst. Die maximale Unordnung hängt nicht von den Details der molekularen Verteilungen ab, sondern nur von wenigen makroskopischen Variablen, wie Energie  $E$ , Volumen  $V$ , Teilchenzahl  $N$  und natürlich von seiner stofflichen Zusammensetzung (siehe z.B. Gl. (10)). Man muss also nur untersuchen, wie sich die Entropie eines Systems verhält, wenn man die einzelnen makroskopischen Parameter variiert. Zunächst würde man vermuten, dazu müsse man in jedem Fall den Ausdruck für die Ent-

ropie des betrachteten Systems kennen, wie z.B. den Ausdruck Gl. (11) für ein ideales Gas.

Glücklicherweise lässt sich eine ganz allgemeine und erstaunlich einfache Beziehung ableiten, die angibt, wie sich die Entropie eines Systems verändert, wenn man seine innere Energie  $E$  erhöht, indem man die Wärme  $\Delta Q$  zuführt. Dabei werden alle anderen Parameter wie Teilchenzahl  $N$  und Volumen  $V$  konstant gehalten. Die Änderung der Entropie  $\Delta S$  ergibt sich zu

$$\Delta S = 1/T \cdot \Delta Q, \quad (14)$$

worin  $T$  die absolute Temperatur ist. Für die Messung oder die Berechnung der Entropie ist Gl. (14) die vermutlich wichtigste Gleichung der Wärmelehre. Allerdings – so meinen wir – verrät sie uns nichts über die Natur der Entropie.

Zunächst wollen wir als Beispiel die Entropiezunahme von 1 Mol (18g) Wasser beim Schmelzen von Eis (ohne Temperaturänderung) betrachten. Da die Schmelzwärme für Eis den Wert  $\Delta Q = 6 \text{ kJ/Mol}$  hat, ändert sich die Entropie dabei um  $\Delta S = 6 \text{ kJ}/273 \text{ K} = 22 \text{ J/K}$ . Joule pro Kelvin ist ganz allgemein die Einheit, in der die Entropie gemessen wird. Aus dem Wert  $\Delta S = 22 \text{ J/K}$  lässt sich auch ausrechnen, um welchen Faktor die Zahl der möglichen Zustände des Systems beim Schmelzen zunimmt. Man dividiert  $\Delta S$  durch den Wert der Boltzmann Konstanten  $k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  und exponenziert das Ergebnis. Das Resultat ist eine Zahl mit etwa  $10^{24}$  Ziffern. Um diesen riesigen Faktor hat die Zahl der möglichen Zustände beim Schmelzen von 1 Mol Eis dadurch zugenommen, dass die Moleküle nicht mehr an die Orte im Kristallgitter gebunden sind, sondern sich in der flüssigen Phase frei bewegen können.

Gleichung (14) fällt in den meisten Betrachtungen zur Entropie „vom Himmel“. In der Tat ist der Zusammenhang zwischen Entropie, Energie und Temperatur zunächst gar nicht einsichtig. Auch die Vorstellung von der molekularen Unordnung gibt keinen anschaulichen Schlüssel, weil die Temperatur eine makroskopische Größe ist, die man im mikroskopischen Bild nicht verstehen kann. Zwar hat ein Klotz Eis eine Temperatur, aber nicht ein einzelnes Molekül. Jedes einzelne Teilchen besitzt eine Energie; nur die *mittlere* Bewegungsenergie der Teilchen hängt mit der Temperatur zusammen.

Der lineare Zusammenhang  $\Delta S \sim \Delta Q$  in Gl. (14) wird oft dahingehend interpretiert, dass es große Ähnlichkeiten zwischen Wärme und Entropie gibt. Besonders im Karlsruher Physik Kurs [3] spielt diese Beziehung eine zentrale Rolle und führt zu einer – nach unserer Meinung – unscharfen Abgrenzung zwischen Entropie und Wärme.

Dass in Gl. (14) die Änderung  $\Delta S$  der Entropie proportional zur zugeführten Wärme  $\Delta Q$  ist, hat zunächst gar keine physikalische Bedeutung, sondern folgt allein aus einer Taylorentwicklung von  $S(E+\Delta Q, V, N)$  nach  $\Delta Q$ . In erster Ordnung ergibt sich

$$S(E+\Delta Q, V, N) = S(E, V, N) + [\partial S(E, V, N)/\partial E] \cdot \Delta Q + \dots \quad (15)$$

Der Klarheit wegen haben wir das Symbol  $\partial$  für die partielle Ableitung benutzt, in der Schule sollte eher darauf verzichtet werden. Nach Definition

müssen bei der partiellen Differentiation nach E alle anderen Variablen wie V und N konstant gehalten werden. Diese mathematische Vorschrift ist äquivalent zu der physikalischen Forderung, dass die Wärme  $\Delta Q$  in reversibler Form zu- bzw. abgeführt wird. Denn Reversibilität bedeutet, dass bei einer Energieänderung alle anderen Größen ihren Wert behalten. Dass Gl. (14) nur für reversible Prozesse gilt, wird häufig dadurch angedeutet, dass man  $\Delta Q_{\text{rev}}$  statt  $\Delta Q$  schreibt.

Das physikalische Interessante an der fundamentalen Gleichung (14) ist deshalb nicht, dass  $\Delta S$  proportional zu  $\Delta Q$  ist, sondern, dass die Proportionalitätskonstante  $\partial S/\partial E$  gleich der inversen absoluten Temperatur T ist. Warum das? Um den Zusammenhang zwischen Entropie und Temperatur zu erläutern, betrachtet man häufig zwei Körper A und B, die in Wärmekontakt gebracht werden. Aus der Alltagserfahrung weiß man, dass dann von dem Körper mit der höheren Temperatur Wärme auf den anderen Körper fließt und dass der Energieaustausch erst dann endet, wenn beide Körper auf gleicher Temperatur sind. In diesem Endzustand hat - nach dem zweiten Hauptsatz - die Gesamtentropie der beiden in Kontakt stehenden Körper ein Maximum erreicht. Diese Aussage soll mathematisch gefasst werden. Im entstandenen Gleichgewicht bezeichnen wir die Entropien der beiden Körper mit  $S_A(E_A, V_A, N_A)$  und  $S_B(E_B, V_B, N_B)$  und die Gesamtentropie mit  $S = S_A + S_B$ . Selbst im Gleichgewicht wird wegen unvermeidlicher thermischer Schwankungen immer wieder eine kleine Wärmemenge  $\Delta Q$  von einem Körper zum anderen fließen. Für die Gesamtentropie ergibt sich dann die folgende Veränderung

$$S(\Delta Q) = S_A(E_A + \Delta Q, V_A, N_A) + S_B(E_B - \Delta Q, V_B, N_B). \quad (16)$$

Eine Taylorentwicklung nach  $\Delta Q$  führt zu

$$S(\Delta Q) = S(0) + [\partial S_A(E_A, V_A, N_A)/\partial E_A - \partial S_B(E_B, V_B, N_B)/\partial E_B] \cdot \Delta Q + \dots \quad (17)$$

Da es sich nach Voraussetzung um Schwankungen der Gesamtentropie um ihrem Gleichgewichtszustand handelt, in dem  $S(0)$  ein Maximum ist, muss der Term in der eckigen Klammer verschwinden, woraus folgt, dass die Steigungen  $\partial S_A/\partial E_A$  und  $\partial S_B/\partial E_B$  gleich sind. Das sagt uns die Mathematik. Aus der physikalischen Wirklichkeit aber weiß man, dass im Gleichgewicht die Temperaturen der beiden Körper, die im Wärmekontakt stehen, gleich sind. Wenn die Temperaturen  $T_A$  und  $T_B$  immer dann gleich sind, wenn  $\partial S_A/\partial E_A$  und  $\partial S_B/\partial E_B$  gleich sind, schließt man, dass die Steigungen der Entropien mit der Gleichgewichtstemperatur T zusammenhängen müssen, z.B. in der Form

$$\partial S_A/\partial E_A = \partial S_B/\partial E_B = F(T) \quad (18)$$

mit einer zunächst noch unbekanntem Funktion F. Mit der Definition der Entropie durch Gl. (9) wird die Funktion F für die absolute Temperatur T sehr einfach, nämlich  $F(T) = 1/T$ . Damit ist die Grundgleichung (14) der Wärmelehre aus dem zweiten Hauptsatz abgeleitet. Gleichzeitig ergibt sich ein tieferes Verständnis der Temperatur:

Die Temperatur ist eine „Gleichgewichtsgröße“. Sie beschreibt das Gleichgewicht zweier Körper, nachdem diese in Wärmekontakt gebracht worden sind. Das ist eigentlich gar nichts Neues. Denn wie werden Tempera-

turen gemessen? Das Thermometer wird in Wärmekontakt mit dem zu untersuchenden Körper gebracht. Wenn der Wärmefluss zwischen beiden Objekten zum Stillstand gekommen ist, wird die Temperatur, die sich an dem Thermometer eingestellt hat, abgelesen und als Wert für die Temperatur des anderen Körpers genommen. Die Temperatur ist deshalb in der Physik der Wärme eine so wichtige Größe, weil sie das thermodynamische Gleichgewicht bei Wärmekontakt anzeigt.

Wendet man die Gleichung  $\partial S/\partial E = 1/T$  auf den Ausdruck für die Entropie eines idealen Gases Gl. (11) an, so ergibt sich unmittelbar  $E/N = 3/2 \cdot k \cdot T$ , d.h. die mittlere Energie eines Teilchens ist direkt proportional zur Temperatur.

## Entropie und Druck

Die Entropie  $S$  hängt nicht nur von der Energie  $E$  des Systems ab, sondern auch vom Volumen  $V$ , von der Teilchenzahl  $N$  und anderen makroskopischen Variablen ab. Ganz ähnlich, wie man die Veränderung der Entropie bei kleinen Änderungen der Energie untersucht, so kann man auch das Verhalten der Entropie bei kleinen Änderungen der anderen Variablen studieren. In diesem Abschnitt soll das Volumen  $V$  um ein kleines  $\Delta V$  verändert werden, wobei diesmal die Parameter  $E$  und  $N$  konstant gehalten werden. Es ergibt sich aus einer Taylorentwicklung

$$\Delta S = (p/T) \cdot \Delta V, \quad (19)$$

worin  $p$  den Druck bezeichnet, der in dem System herrscht. Wieder ist der Zusammenhang erstaunlich einfach.

Der Zusammenhang  $\partial S/\partial V = p/T$  ergibt sich aus folgender Betrachtung: Man stelle sich einen Behälter vor, der aus zwei Kammern besteht, die durch eine leicht verschiebbare Wand getrennt sind. In beiden Kammern befinden sich Gase. Aus unserer Alltagserfahrung wissen wir, dass sich die bewegliche Wand solange verschiebt, bis der Druck auf beiden Seiten gleich ist. Auch der Druck ist deshalb aus thermodynamischer Sicht eine Gleichgewichtsgröße. Dass er in Gl. (19) auftritt entspricht also unserer Erwartung. Dass dort auch noch die Temperatur auftritt, ist allerdings nicht unmittelbar zu verstehen.

Auch wenn es aus Gl. (19) unmittelbar ersichtlich ist, wollen wir doch noch einmal betonen, dass die Entropie auch erhöht werden kann, indem nur das Volumen des Systems vergrößert wird, ohne dass sich der Energie-Inhalt verändert. Entropie ist also nicht nur mit Wärme verbunden. Ein anderes Beispiel ist das Ausströmen eines Gases ins Vakuum.

Für die Entropie eines idealen Gases (Gl. (11)) kann man die die Differentiation in  $\partial S_{IG}/\partial V = p/T$  direkt ausführen und erhält dann  $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$ , d.h. das bekannte ideale Gasgesetz. Diese zunächst empirisch gefundene Relation ergibt sich also zwanglos aus der Kenntnis der Entropie. Die Entropie weiß alles! Jedenfalls was die thermodynamischen Eigenschaften eines Systems angeht. Deshalb ist sie auch so wichtig.

## Von den unerwünschten Assoziationen bei der Veranschaulichung physikalischer Phänomene

Im vorliegenden Artikel argumentieren wir für einen anschaulichen Zugang zur Entropie. Denn wir meinen, dass Anschauung das Lernen, d.h. das Verstehen und das Behalten von Sachverhalten fördert. Dennoch wollen wir nicht verschweigen, dass dabei auch Probleme auftreten können. Diese lassen sich besonders leicht an dem Begriff der Unordnung erläutern. Unordnung ist schlecht, so lernen wir schon von klein auf. Mit der Vorstellung von Unordnung ist also ein Werturteil verbunden. Das Naturgeschehen aber ist wertfrei; erst der Mensch bewertet. Indem Entropie mit Unordnung in Verbindung gebracht wird, entsteht durch unbewusste Assoziation ein negatives Bild der Entropie in den Köpfen der Schüler. Wie soll man damit umgehen?

Wir selbst haben davon gesprochen, dass eine Bibliothek an Wert verliert, wenn sie in Unordnung gerät. Damit war nicht gemeint, dass die einzelnen Bücher weniger wert geworden sind - in Geld oder geistigem Inhalt -, sondern dass die Bibliothek ihrem Auftrag, dem Leser ein von ihm gewünschtes Buch möglichst schnell zu beschaffen, mit wachsender Unordnung immer schlechter nachkommen kann. Die Bibliothek ist eine Institution, die für einen gewissen Zweck errichtet wurde. Wenn sie ihn mangelhaft erfüllt, wird die Institution negativ bewertet, was völlig in Ordnung ist.

Unerwünschte Assoziationen bei der Veranschaulichung physikalischer Phänomene lassen sich nicht vermeiden, aber man kann sie bewusst machen. Dieses Vorgehen empfehlen wir und wollen es an einem Beispiel erläutern. Beim Abbremsen eines Autos wird die zunächst geordnete Bewegung der Moleküle des Fahrzeugs in die ungeordnete Bewegung der Moleküle in den erwärmten Bremsbacken und dann in der umgebenden Luft umgewandelt. Dabei erhöht sich die Entropie. Dies ist ein Vorgang, der nach den Gesetzen der Physik abläuft und völlig wertfrei ist. Dennoch spricht man häufig davon, dass beim Bremsen Energie „entwertet“ wird. Denn die dabei erzeugte Wärme kann nicht wieder zur Beschleunigung des Autos benutzt werden. Die Entwertung bezieht sich also nicht auf den Prozess, sondern auf ein vom Menschen definiertes Ziel. Beschreibung und Bewertung eines Naturvorgangs sollten immer sauber getrennt werden.

Auch der „Wärmetod“ ist ein Begriff, der durch die Assoziation mit dem Tod negativ beladen ist. Wärmetod beschreibt die Zukunft unseres Universums, wie man sie sich am Ende des 19. Jahrhunderts vorstellte, nachdem der zweite Hauptsatz der Wärmelehre entdeckt worden war. Der Zweite Hauptsatz als Schreckgespenst! Heute weiß man über die Entwicklung der Sterne und des Kosmos viel mehr als damals, so dass es zweifelhaft ist, ob das Universum je einen Gleichgewichtszustand erreichen wird und wenn ja, dann in einer so fernen Zeit, dass es für die menschliche Existenz völlig unerheblich ist. Es empfiehlt sich deshalb, den Begriff Wärmetod ganz zu vermeiden. An seiner Stelle sollte man die Rolle der Sonne für das Leben auf der Erde diskutieren. Die Erde ist ein wunderbares Beispiel für ein *offenes* System, das nicht dem zweiten Hauptsatz unterliegt, weil sie dauernd Energie von der Sonne erhält. Das ist heute allgemeines Wissen. Aber in einer Unter-

richtigkeit über Entropie sollte man dieses Phänomen, das meist in Begriffen der Energie diskutiert wird, unter dem Aspekt der Entropie vertiefen: Die Sonne ist eine Quelle von Energie mit extrem niedriger Entropie (d.h. hoher Temperatur), die den Aufbau komplizierter Ordnungsstrukturen wie die der Lebewesen erst ermöglicht. Nur Energie, also Energie irgendwelcher Art reicht dazu nicht.

### **Schlussbemerkung**

“Entropie ist etwas, was man nicht versteht, aber man gewöhnt sich daran.“ Dieser tröstliche Satz wird Max Planck zugeschrieben. Dabei bezog sich Planck, der zunächst Boltzmanns Zugang ablehnte, auf die Definition der Entropie, wie sie Mitte des 19. Jahrhunderts von Rudolf Clausius (1822 – 1888) eingeführt wurde, nämlich über den Zusammenhang zwischen Entropie, Wärme und Temperatur. Diesen anerkannt schwierigen Zugang zur Entropie muten wir unseren Schülerinnen und Schülern immer noch zu! Warum eigentlich, wenn es auch einen – nach unserer Meinung - einfacheren gibt?

Aber machen uns keine Illusionen! Auch der Boltzmannsche Zugang wird den Schülern Mühe bereiten. Denn er erfordert ein Denken, das sich nicht auf Kausalgesetze wie z.B. die Newtonsche Gleichung stützen kann, sondern ein Denken in statistischen Begriffen. Da aber solche Begriffe (z.B. die Wahrscheinlichkeit) heute im Alltagsleben häufig vorkommen, ist die Behandlung der Entropie, wie wir sie vorschlagen, auch über die Physik hinaus wichtig. Deshalb lohnt es sich, auf die Behandlung der Entropie ausreichend Zeit (etwa fünf bis sechs Unterrichtsstunden) zu verwenden. Dabei sollten natürlich auch die interessanten Beispiele aus Natur und Technik besprochen werden, wie schon jetzt reichhaltig in den Schulbüchern zu finden sind.

### **Danksagung**

Diskussionen mit und Kritik durch die Herren K. Haberkant, W. Herzog, H. Horner und F. Wegner haben uns in vielfältiger Weise geholfen. Wir danken auch dem Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA für die Genehmigung, die biographische Notiz über Boltzmann aus dem angegebenen Buch [2] übernehmen zu dürfen.

### Literatur:

- [1] Dorn•Bader: Physik 11/12 Gymnasium G8, Schroedel Verlag, Braunschweig 2010, S. 358
- [2] Hüfner, Jörg und Löhken, Rudolf: Physik ohne Ende..., Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2010, 289-291.
- [3] Hermann, Friedrich: Der Karlsruher Physikkurs: ein Lehrbuch für die Sekundarstufe II, Teil 2. Thermodynamik, Aulis Verlag Deubner, Köln 2002

Anschriften der Verfasser:

Dr. Jörg Hüfner, em. Professor für Theoretische Physik, Buchenweg 17,  
69221 Dossenheim. E-Mail: [joerg.huefner@tphys.uni-heidelberg.de](mailto:joerg.huefner@tphys.uni-heidelberg.de)

Dr. Rudolf Löhken, Studiendirektor a.D., Rockenauerpfad 51, 69190 Wall-  
dorf, E-Mail: [loehken@t-online.de](mailto:loehken@t-online.de)