Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Ingrid Heppe
aus Frankfurt a.M.

– 1998 –

Ein statistisches Modell für die Teilchenproduktion in hochenergetischen Schwerionenkollisionen

Die Diplomarbeit wurde ausgeführt am

PHYSIKALISCHEN INSTITUT
DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG

unter der Betreuung von

Frau Prof. Dr. Johanna Stachel

Zusammenfassung

Das in dieser Arbeit vorgestellte statistische Modell berechnet Teilchenverhältnisse in hochenergetischen Schwerionenkollisionen zum Zeitpunkt des chemischen Ausfrierens. Es verwendet dabei den Formalismus des großkanonischen Ensembles zusammen mit Baryonenzahl, Strangeness und Ladungserhaltung sowie einer Eigenvolumenkorrektur zur Berücksichtigung starker Wechselwirkungsprozesse. Es wurden die Auswirkungen der verschiedenen Parameter sowie der Eigenvolumenkorrektur auf die Teilchenverhältnisse untersucht und modellierte Teilchenverhältnisse mit experimentellen Daten aus den drei Kollisionssystemen Si+Au(Pb), S+Pb(Au) sowie Pb+Pb bei 14.6 A GeV/c, 200 A GeV/c und 158 A GeV/c verglichen.
Die gute Übereinstimmung zwischen Modell und Daten legt nahe, daß sich das System zum Zeitpunkt des chemischen Ausfrierens im Gleichgewicht befindet. Der Ausfrierpunkt ist bei den verschiedenen Kollisionssystemen durch unterschiedliche Temperaturen und baryochemische Potentiale charakterisiert, die jedoch alle nahe an der aus Modellannahmen bestimmten Phasengrenze zum Quark-Gluon Plasma liegen.
Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Modellierung von Spektren unter Berücksichtigung von Resonanzzerfällen sowie transversaler und longitudinaler Expansion. Das modellierte transversale π^+-Massenspektrum bei mittlerer Rapidität wird mit experimentellen Spektren aus zentralen Pb+Pb Stößen am CERN-SPS verglichen.

Particle production in high-energy heavy-ion collisions in the view of a statistical model

The statistical model which is presented in this thesis, is used to calculate particle ratios in high-energy heavy-ion collisions, using the grandcanonical ensemble in addition to strangeness, baryon number, and charge conservation, and an excluded volume correction. The influence of the various parameters and of the excluded volume correction on particle ratios has been investigated and model ratios have been compared with experimental data from the three collision systems Si+Au(Pb), S+Pb(Au), and Pb+Pb at 14.6 GeV/c, 200 GeV/c, and 158 GeV/c per nucleon.
As model and data agree very well, one can assume, that the system is in thermal and chemical equilibrium at the time of chemical freeze-out. The freeze-out point is characterized by different temperatures und baryochemical potentials in the different collision systems, but is very close to the predicted quark-gluon phase boundary in all three cases.
The second part of this thesis is dedicated to particle spectra, including resonance decays and longitudinal and transverse flow. The calculated π^+ transverse mass spectrum at midrapidity is compared to experimental spectra from central Pb+Pb collisions at the CERN-SPS.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Schwerionenkollisionen

Beim Zusammenprall schwerer, auf ultra-relativistische Energien beschleunigter Kerne entsteht dichte, heiße Materie mit sehr hoher Energiedichte. Nach wie vor ist die zentrale Frage der Schwerionenphysik, in welchem Zustand sich die Kernmaterie nach einer derartigen Kollision befindet. Zwei Szenarien stehen zur Auswahl [1]: Entweder bleibt die Materie in der hadronischen Phase, einer dichteren Variante der Kernmaterie, oder sie geht in eine neue, von der QCD vorhergesagte Form der Materie über: das Quark-Gluon Plasma. Diese hypothetische Phase aus quasi-freien Quarks und Gluonen zeichnet sich durch wiederhergestellte chirale Symmetrie und damit verschwindend kleine Quarkmassen von nur wenigen MeV aus.

Die Plasmaphase kann nach einer Schwerionenkollision nicht lange bestehen bleiben, da sich der heiße Materieball im Zentrum der Kollision ausdehnt und dabei abkühlt. Bei niedriger Temperatur bricht die Symmetrie und die Quarks nehmen die Konstituenten-Quarkmasse von rund 300 MeV/c^2 (für *up* (u) und *down* (d) Quarks) bzw. 450 MeV/c^2 (für *strange* (s) Quarks) an und schließen sich zu Hadronen zusammen. Dies ist der Phasenübergang vom Quark-Gluon Plasma zur hadronischen Materie, einem Cocktail aus Pionen, Kaonen, Nukleonen, Hyperonen und deren Anregungszuständen.

Im Teilchen-Cocktail werden nicht nur Impuls und Energie ausgetauscht, es entstehen und zerfallen auch ständig Teilchen in der noch immer heißen Umgebung. Doch der sog. Feuerball expandiert weiter, bis inelastische Streuprozesse, die für die Umwandlung der Teilchen in andere Sorten verantwortlich sind, nicht mehr stattfinden und die Verhältnisse der verschiedenen Teilchensorten zueinander festgelegt sind. Dieser Moment wird als chemischer *freeze-out* bezeichnet. Jedoch sind die Teilchen noch nicht ganz abgenabelt: Energie und Impuls können im dünner werdenden Feuerball unter Umständen weiterhin ausgetauscht werden, so daß sich die Spektren – also die Verteilung, wieviele Hadronen einer Sorte wieviel Impuls tragen – noch ändern. Wenn die Temperatur des Gasballs weiter abgenommen hat und die freie Weglänge der einzelnen Teilchen größer

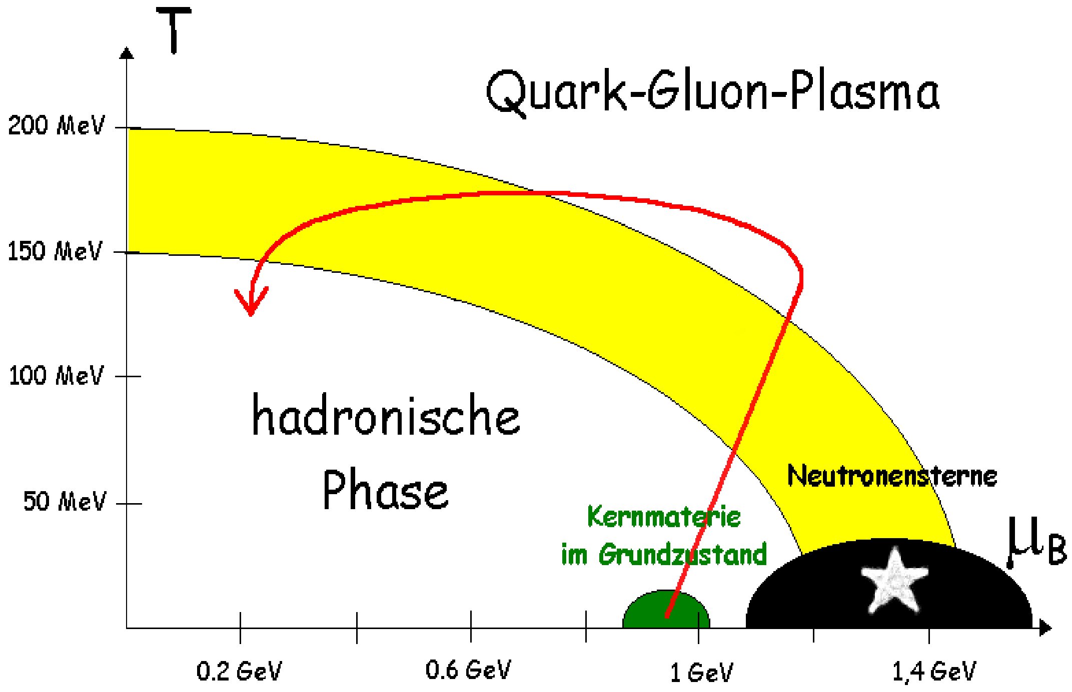

Abbildung 1.1 **Phasendiagramm:** Die Trajektorie im Phasendiagramm entspricht dem Ablauf einer hochenergetischen Schwerionenkollisionen. μ_B ist ein Maß für die Baryonendichte.

geworden ist, endet auch diese Wechselwirkung, es kommt zum kinetischen Ausfrieren und die Hadronen strömen nur noch durch die Coulomb-Wechselwirkung beeinflußt zum Detektor.

Diesen Ablauf einer Schwerionenkollision kann man auch als Trajektorie im Phasenraum darstellen (vgl. Schaubild 1.1). Die Schwerionen liegen im Anfangsstadium als Kernmaterie im Grundzustand vor. Bei der Kollision werden sie komprimiert und erhitzt, bis sie – eventuell – die Phasengrenze zum Quark-Gluon Plasma überschreiten. Mit der einsetzenden Expansion des Feuerballs sinken Temperatur und Druck, das System kehrt zurück in den hadronischen Zustand, und es kommt zum chemischen Ausfrieren. Dann sinken Temperatur und Druck möglicherweise weiter, bis auch der thermische *freeze-out* stattfindet.

1.2 Schwerionenkollisionen - ein Gleichgewichtsprozess ?

Bei einer zentralen Kollision von zwei Bleikernen am SPS entstehen rund 2000 verschiedene Teilchen - weitaus mehr, als daß sich der Weg jedes einzelnen Teilchens mikroskopisch verfolgen ließe. Man ist daher auf vereinfachte Modelle für die Beschreibung solcher Reaktionen angewiesen. Methoden der statistischen Physik und der Thermodynamik bieten sich hier förmlich an. Voraussetzung für ihre Anwendung ist jedoch, daß sich das System im Gleichgewicht befindet. Doch kann ein expandierender Feuerball überhaupt ein Gleichgewicht ausbilden?

Eigentlich muß man zwei Arten des Gleichgewichts unterscheiden: thermisches und chemisches. Ein System im thermischen Gleichgewicht läßt sich durch eine gemeinsame Temperatur beschreiben. Thermisches Gleichgewicht entsteht durch starke, elastische Streuprozesse, bei denen die Teilchen Energie und Impuls austauschen. Maßgeblich sind hierfür die totalen Hadron-Hadron Wirkungsquerschnitte.

Chemisches Gleichgewicht entsteht hingegen durch inelastische Streuprozesse, bei denen Hadronen in andere Arten umgewandelt und neue Teilchen erzeugt werden und geschieht daher deutlich langsamer. Ein großes System im chemischen Gleichgewicht läßt sich durch ein gemeinsames chemisches Potential beschreiben, ein großes System im Ungleichgewicht benötigt hingegen für jede Teilchensorte ein eigenes chemisches Potential.

Da es in Schwerionenkollisionen keine Wände gibt, die die Expansion des Feuerballs aufhalten können, kann es kein über den gesamten Feuerball verteiltes globales Gleichgewicht geben, sondern nur lokales thermisches und chemisches Gleichgewicht. Dennoch beschreiben thermische Modelle, die mit globalen Parametern arbeiten, die experimentellen Daten erstaunlich gut (vgl. Abschnitte 3.6 - 3.8). Dies liegt jedoch am *freeze-out*: Die kühleren äußeren Schichten des Feuerballs frieren früher als die weiter innen liegenden Bereiche aus, so daß alle Regionen des Feuerballs letztendlich bei fast der gleichen Temperatur ausfrieren (siehe [5]).

Den Überlegungen in [3] und [4] folgend, betrachten wir nun die beiden Phasen etwas genauer:

In der Quark-Gluon Phase werden bei sehr hohen Energien von Anfang an zahlreiche Gluonen produziert, die sich schon nach 0.5 fm/c im thermischen Gleichgewicht befinden. Dann werden durch Gluon-Fusion oder Zerfall leichte Quark-Antiquark-Paare erzeugt, die sich nach der Streuung an Gluonen ebenfalls nach rund 1 fm/c im Gleichgewicht befinden. Auch chemisches Gleichgewicht zwischen leichten Quarks und Gluonen sollte sich kurze Zeit später eingestellt haben. Hingegen ist die Produktion von s-Quarks durch deren höhere Masse behindert, und auch der Zeitraum für ihre Thermalisierung ist mit rund 10 fm/c bei Temperaturen um 200 MeV sehr lang: *"Even in heavy-ion induced Quark-Gluon-Plasma, full strangeness equilibration remains questionable."* [4].

Und wie steht es mit dem Gleichgewicht in der hadronischen Phase? Auch hier wird das thermische und chemische Gleichgewicht zwischen den Hadronen ohne Strangeness recht schnell erreicht. Die Strangeness Produktion ist hier selbstverständlich ebenfalls unterdrückt, und die Thermalisierung der s-Quarks dauert mit über 30 fm/c dreimal so lang [3].

Eine interessante Möglichkeit taucht in der hadronischen Phase in der Nähe des Phasenübergangs auf. In der sehr dichten und heißen Kernmaterie sind eventuell die Massen, Zerfallsbreiten und Wirkungsquerschnitte der Hadronen im Vergleich zu ihren Vakuum-Werten stark durch ihre gegenseitige Wechselwirkung im Feuerball modifiziert

[4]. Die meisten Autoren sind sich einig, daß die Massen der meisten Hadronen mit Dichte und Temperatur abnehmen [6, 7, 8, 9].

1.3 Ein Kurzbesuch bei der statistischen Thermodynamik

Die statistische Physik beschäftigt sich mit Systemen, die aus sehr vielen wechselwirkenden Teilchen bestehen, so daß es unmöglich ist, das Verhalten einzelner Teilchen zu verfolgen und zu beschreiben. Dennoch lassen sich Aussagen über das kollektive Verhalten dieses Systems treffen, da es sich nach kurzer Zeit in einen Gleichgewichtszustand begeben hat, der durch zwei Eigenschaften charakterisiert ist:

- Kompatibilität mit der vorhandenen Erkenntnis und
- maximale Entropie.

Diese zwei Prinzipien werden benutzt, um die drei Ensembles der statistischen Physik zu konstruieren: das mikrokanonische, das kanonische und das großkanonische Ensemble. Die Art der vorhandenen Erkenntnis unterscheidet die drei Ensembles. Observable, also Operatoren, die physikalischen Meßgrößen wie Energie, Teilchenzahl oder Temperatur entsprechen, können entweder exakt oder nur im Mittel bekannt sein. Im letzteren Fall, wenn also nur Erwartungswerte von Observablen bekannt sind, werden bei der Maximierung der Entropie während der Konstruktion der Ensembles Lagrange-Multiplikatoren eingeführt, die dann in der Thermodynamik physikalischen Größen entsprechen [10].

Im mikrokanonischen Ensemble ist sowohl die Energie als auch die Teilchenzahl exakt bekannt. Im kanonischen Fall ist nur die Teilchenzahl fixiert, während die Energie des Systems lediglich als Erwartungswert bekannt ist und die Temperatur als Lagrange-Multiplikator eingeführt wird. Im großkanonischen Ensemble fluktuiert sowohl Energie als auch Teilchenzahl. Hier wird zusätzlich das chemische Potential als Langrange-Multiplikator eingeführt, so daß das System nun durch die drei Parameter Temperatur, chemisches Potential und Volumen beschrieben werden kann.

Betrachten wir nun das großkanonische Ensemble für ein ideales Quantengas. Die Zustandssumme lautet:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\text{alle Zustände}} e^{-\beta(H-\mu N)} && (1.1) \\ &= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\cdots e^{\beta(n_1\epsilon_1-\mu_1)}e^{\beta(n_2\epsilon_2-\mu_2)}e^{\beta(n_3\epsilon_3-\mu_3)}\cdots && (1.2) \\ &= \prod_j \sum_{n_j} e^{-\beta n_j(\epsilon_j-\mu_j)} && (1.3) \end{aligned}$$

$$= \prod_j \begin{cases} 1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu_j)} & \text{für Fermionen} \\ \frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon_j-\mu_j)}} & \text{für Bosonen} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$= \prod_j Z_j \tag{1.5}$$

mit $\beta = 1/kT$. H ist Hamiltonfunktion und n_j die Besetzungszahl eines Energiezustandes $\epsilon_j = \sqrt{p^2 + m^2}$ mit p als Impuls. Nun kann man den kontinuierlichen Fall für eine bestimmte Teilchensorte i betrachten:

$$\ln Z_i \rightarrow \frac{V g_i}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p \pm \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_i(p)-\mu_i)}) \begin{matrix} \text{für Fermionen} \\ \text{für Bosonen} \end{matrix} \tag{1.6}$$

mit g_i als Entartung des Zustandes i. Dann konstruiert man aus der großkanonischen Zustandssumme das *Gibbs-Potential* J.

$$J(T, \mu, V) = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -PV \tag{1.7}$$

Und dann gilt

$$\text{Druck } P = -\frac{\partial J}{\partial V} = \frac{1}{\beta V} \ln Z \tag{1.8}$$

$$\text{Entropie } S = -\frac{\partial J}{\partial T} \tag{1.9}$$

$$\text{Teilchenzahl } N = -\frac{\partial J}{\partial \mu} \tag{1.10}$$

So folgt z.B. für die Teilchendichte pro Hadronsorte i

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2\,\mathrm{d}p}{e^{\beta(E_i(p)-\mu_i)} \pm 1} \tag{1.11}$$

siehe z.B. [11] oder [10].

1.4 Anwendung der statistischen Thermodynamik auf Schwerionenkollisionen

Die statistische Thermodynamik wird schon lange bei einer Vielzahl von Reaktionen erfolgreich zur Analyse eingesetzt. Ob Proton-Antiproton Kollisionen oder der Aufprall von Blei auf Gold; ob bei der Reaktion ein Quark-Gluon Plasma entstehen mag oder nur ein buntgemischter Hadronencocktail - thermische Modelle sind vielseitig einsetzbar. Klären muß man vor ihrem Einsatz zwei Dinge: Welches Ensemble beschreibt das System und welche Größen bleiben erhalten?

Bei kleinen Kollisionssystemen wie e+e- oder p$\overline{p}$ muß der kanonische Formalismus mit strikter Teilchenerhaltung verwendet werden (vgl. [12]). In hochenergetischen

Schwerionenkollisionen, in denen die Anzahl der erzeugten Teilchen sehr hoch ist, ist das großkanonische Ensemble, in dem die Teilchenzahl und die Energie nur im Mittel erhalten bleiben, die korrekte und auch am einfachsten zu handhabende Beschreibung. Die Teilchenerhaltung muß jedoch genauer aufgeschlüsselt werden: Im Quark-Gluon Plasma wäre die Zahl der einzelnen Quarksorten *up, down* und *strange* getrennt voneinander erhalten, und man müßte für jede Quarksorte ein eigenes chemisches Potential als Lagrangemultiplikator einführen.

Im Hadronencocktail gibt es ebenfalls drei Erhaltungsgrößen und drei verschiedene chemische Potentiale. Erhalten sind Baryonenzahl, elektrische Ladung und Strangeness, wenn man nur starke Zerfälle berücksichtigt. Dies ist plausibel, da schwache Zerfälle, die s-Quarks in u- oder d-Quarks umwandeln können, deutlich langsamer geschehen und die Zeit zwischen Kollision und *freeze-out* dafür nicht ausreicht.

2 Thermische Modelle

Thermische Modelle beschreiben den Zustand des Feuerballs zum Zeitpunkt des *freeze-outs* - wie eine Momentaufnahme, bei der der Fotograf genau zu dem Zeitpunkt auf den Auslöser drückt, in dem die Teilchen im Cocktail aufhören, miteinander wechselzuwirken. Man sollte jedoch bei diesem intuitiven Bild im Hinterkopf behalten, daß der Feuerball in Wirklichkeit nicht überall zum gleichen Zeitpunkt ausfriert.

Prinzipiell kann man beim Vergleich der Modelldaten mit den experimentellen Ergebnissen auf zwei konzeptionell unterschiedliche Arten vorgehen. Entweder setzt man thermisches Gleichgewicht voraus, bestimmt anhand der Daten die freien Parameter und besitzt dann eine sehr einfache Beschreibung einer Schwerionenkollision mit zweifelhafter Aussagekraft.

Der andere Zugang zu thermischen Modellen besteht darin, das thermische und chemische Gleichgewicht nicht vorauszusetzen, sondern mit dem thermischen Modell zu testen, ob sich das System durch eine gemeinsame Temperatur und gemeinsame chemische Potentiale beschreiben läßt und sich damit im Gleichgewicht befinden muß. Da fast jede – beliebig komplizierte – Beschreibung der Schwerionenphysik abgesehen von *event*-Generatoren vom Gleichgewichtszustand ausgeht, ist ein einfacher Test eben dieses Gleichgewichts sehr hoch einzuschätzen.

Außerdem liefern thermische Modelle Information über den Verlauf einer Schwerionenkollision im Phasenraum (Schaubild 1.1). Je nachdem wo der chemische *freeze-out* im Phasendiagramm stattfindet, ob direkt an der Phasengrenze oder weit unterhalb, läßt sich erschließen, ob der Feuerball zu früheren Zeiten ein Quark-Gluon Plasma ausgebildet hat oder nicht.

2.1 Das Modell von Braun-Munzinger, Stachel, Wessels und Xu

Dieses Modell wurde 1995 zur Analyse von Teilchenraten in zentralen Schwerionenkollisionen verschiedener Energien entwickelt und ist in [13] ausführlich beschrieben. Ausgehend von einem idealen Quantengas aus Fermionen und Bosonen im Gleichgewicht benutzt es den Formalismus des großkanonischen Ensembles um Teilchen-, Energie- und Entropiedichten sowie den Druck zu berechnen.

Pro Teilchensorte i gilt:

$$\begin{pmatrix} n_i \\ p_i \\ \epsilon_i \\ s_i \end{pmatrix} = \frac{g_i}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2\,\mathrm{d}p}{e^{\beta(E_i(p)-\mu_i)} \pm 1} \begin{pmatrix} 1 \\ p^2/3E_i \\ E_i \\ \beta(p^2/3E_i - \mu_i + E_i) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\mu_i = \mu_B B_i + \mu_S S_i, \tag{2.2}$$

mit $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$, $\beta = 1/kT$ und den chemischen Potentialen μ_B für Baryonenzahl B und μ_S für Strangeness S.

Von den vier Parametern Temperatur, Volumen, μ_B und μ_S sind nur T und μ_B unabhängig. Das Volumen wird durch die Baryonenzahlerhaltung fixiert:

$$V \sum_i n_i B_i = Z + N \tag{2.3}$$

mit Z = Zahl der Protonen, N = Zahl der Neutronen. Auf ähnliche Weise ist auch μ_S dadurch bestimmt, daß die Strangeness des Gesamtsystems verschwinden muß:

$$\sum_i n_i(\mu_S)\; S_i = 0. \tag{2.4}$$

Die Liste der Hadronen, die nach Gleichung 2.1 im Modell berücksichtigt werden, umfaßt alle Mesonen mit Massen bis 1,5 GeV/c^2 und Baryonen bis 2 GeV/c^2. Nach ihrer thermischen Erzeugung zerfallen die höheren Resonanzen, so daß insbesondere viele Pionen nicht thermischen Ursprungs sind sondern aus Zerfällen stammen.

Das Modell geht von einer vollständigen Sättigung der Strangeness aus und führt keinen zusätzlichen Parameter ein, der die Zahl der s-Quarks unter den Gleichgewichtswert drückt.

Da das System nicht unendlich groß ist, wird eine *finite volume* Korrektur eingeführt. Der Integrand von Gleichung 2.1 wird multipliziert mit einem Korrekturfaktor:

$$f = 1 - \frac{3\pi}{4\pi R} + \frac{1}{(pR)^2} \tag{2.5}$$

Die Formeln des thermischen Modells

Parameter	T, μ_B, μ_S, V, Z, N

chemisches Potential pro Teilchensorte i: $\mu_i = \mu_B B_i + \mu_S S_i$

$$\begin{pmatrix} n_i \\ p_i \\ \epsilon_i \\ s_i \end{pmatrix} = \frac{g_i}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2\,\mathrm{d}p}{e^{\beta(E_i(p)-\mu_i)} \pm 1} \begin{pmatrix} 1 \\ p^2/3E_i \\ E_i \\ \beta(p^2/3E_i - \mu_i + E_i) \end{pmatrix}$$

Erhaltung der Strangeness	$\sum_i n_i S_i = 0$	$\Longrightarrow$	Bestimmung von μ_S
Erhaltung der Baryonenzahl	$V \sum_i n_i B_i = Z + N$	$\Longrightarrow$	Bestimmung von V

freie Parameter: T, μ_B Systemparameter: N, Z

Tabelle 2.1 Eine knappe Zusammenstellung der wichtigsten Formeln, die im Modell von P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J.P. Wessels und N. Xu verwendet werden (ohne *excluded* und *finite volume* Korrektur).

mit dem Radius R und dem Impuls p.

Bisher wurde der Feuerball als ideales Gas behandelt. Nun ist jedoch klar, daß die Hadronen durchaus miteinander wechselwirken, wenn auch die genaue Form des Wechselwirkungspotentials unbekannt ist. Aus den zahlreichen Experimenten zur Nukleon-Nukleon Streuung weiß man zumindest, daß das Kernpotential bei kleinen Abständen stark repulsiv wird. Die starke Wechselwirkung verhindert also, daß sich Protonen und Neutronen näher als einen bestimmten *hard core* Abstand kommen. Dies kann in die thermischen Modelle auf einfach Weise eingebaut werden, indem man den Hadronen ein Eigenvolumen zuweist. Dieser Ansatz entspricht dem Übergang vom idealen Gas zu einem Van-der-Waals Gas.

Im hier besprochenen Modell wird angenommen, daß sich das Volumen des Feuerballs um das Eigenvolumen der Hadronen v_j vergrößert und der Druck entsprechend sinkt:

$$p_i^{\text{excl.volume}} = \frac{p_i^0}{1 + \sum_j v_j n_j^0}. \tag{2.6}$$

Oder mit Hilfe der Zustandssumme ausgedrückt:

$$\ln Z_i^{\text{excl.volume}} = \frac{\ln Z_i^0}{1 + \sum_j v_j n_j^0} \tag{2.7}$$

mit n_j^0 als ideale Teilchendichte ohne *excluded volume* Korrektur. Aus dieser Modifikation der Zustandssumme lassen sich die Korrekturen für Teilchen-, Energie- und Entropiedichte mit Hilfe der thermodynamischen Ableitungen ausrechnen.

2.2 Das Modell von Cleymans, Satz, Elliot und Thews

J. Cleymans und H. Satz stellten schon 1993 ihr thermisches Modell in [15] vor, das auf ähnliche Weise den großkanonischen Formalismus in Verbindung mit Strangeness- und Baryonenzahlerhaltung mit anschließenden Resonanzzerfällen nutzt. Sie schlagen folgende Korrektur der Teilchendichte für das Eigenvolumen der Hadronen vor:

$$n_i^{\text{excl.volume}} = \frac{n_i^0}{1 + \sum_j V_j n_j^0} \tag{2.8}$$

Diese thermodynamisch inkonsistente Korrektur ist ebenfalls geometrisch motiviert: Das Gesamtvolumen des Gases vergrößert sich um das Eigenvolumen der Hadronen, und die Teilchendichte verringert sich entsprechend.

In [16] wird die Ladungserhaltung und damit ein drittes chemisches Potential zur Verbesserung der Genauigkeit eingeführt. Die Ladungserhaltung läßt sich auch als

Erhaltung der dritten Komponente des Isospins formulieren:

$$V \sum_i n_i I_3^i = \frac{Z - N}{2}. \tag{2.9}$$

2.3 Eigenvolumenkorrekturen nach Rischke, Gorenstein, Stöcker und Greiner

Benutzt man die thermischen Modelle, um Verhältnisse von Teilchen zu beschreiben, also zum Beispiel das π^+/p Verhältnis, so hebt sich die Korrektur für das Eigenvolumen der Hadronen bei Cleymans völlig weg. Die Korrektur von P. Braun-Munzinger und J. Stachel kürzt sich zwar theoretisch nicht heraus, doch auch sie hat keine große Auswirkung auf die Teilchenverhältnisse.

1990 veröffentlichten D.H. Rischke, M.I. Gorenstein, H. Stöcker und W. Greiner in [17] eine andere Form der sog. *excluded volume* Korrektur, die den Van-der-Waals Ansatz thermodynamisch konsistent in das großkanonische Ensemble einbaut. In [18] kann die detaillierte Herleitung nachgelesen werden.

Ausgangspunkt ist die großkanonische Zustandssumme (vgl. Gleichung 1.5)

$$Z_{gr.kan.}^{id.Gas}(T, \mu, V) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} Z_{N\,kan.}(T, N, V) \tag{2.10}$$

mit der kanonischen Zustandssumme $Z_{N\,kan.}$ für ein System mit N Teilchen. Nun wird das Volumen des Feuerballs vergrößert um das Eigenvolumen der Hadronen v_0:

$$v_0 = 4\,\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{2.11}$$

Der zusätzliche Faktor 4 kann leicht veranschaulicht werden: Bei jedem Zusammentreffen von zwei Hadronen gibt es ein Volumen, welches für das eine Hadron aufgrund der Anwesenheit des anderen Hadrons unzugänglich ist. Dies ist eine Kugel vom Radius $2R$. Da es $\frac{1}{2}N(N-1) \approx \frac{1}{2}N^2$ Hadronpaare gibt, ist das gesamte unzugängliche Volumen

$$\frac{1}{2}N^2\;\frac{4}{3}\pi(2R)^3 = NV_0 = N^2 v_0.$$

V_0 ist das für ein Hadron unzugängliche Gesamtvolumen mit $V_0 = Nv_0$, wenn v_0 das Eigenvolumen eines Hadrons ist. Nun wird die kanonische Zustandssumme in Gl. 2.10 ersetzt durch $Z_{N\,kan.}^{excl.}(T, N, V - v_0 N)\,\theta(V - v_0 N)$:

$$Z_{gr.kan.}^{excl.}(T, \mu, V) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\mu N/T} Z_{N\,kan.}(T, N, V - v_0 N)\theta(V - v_0 N) \tag{2.12}$$

Diese Gleichung wird Laplace-transformiert:

$$\hat{Z}^{excl.}_{gr.kan.}(T,\mu,\xi) = \int_0^\infty dV e^{-\xi V} Z^{excl.}_{gr.kan.}(T,\mu,V) \tag{2.13}$$

$$= \int_0^\infty d\hat{V} e^{-\xi \hat{V}} Z^{excl.}_{gr.kan.}(T,\hat{\mu},\hat{V}) \tag{2.14}$$

mit $\hat{V} = V - v_0 N$ und $\hat{\mu} = \mu - v_0 T \xi$.
Da für große Volumen gilt:

$$p(T,\mu) = T\,\frac{\ln Z(T,\mu,V)}{V}, \tag{2.15}$$

$$\text{gilt auch}\quad Z(T,\mu,V)|_{V\to\infty} \sim e^{\frac{p(T,\mu)V}{T}}. \tag{2.16}$$

Wenn sich also Z in Gl. 2.14 gemäß Gl. 2.16 exponentiell verhält, so wird der Integrand von Gl. 2.14 an der oberen Integrationsgrenze, also für $V \to \infty$, zu

$$e^{-\xi\hat{V}} e^{\frac{p\hat{V}}{T}}$$

und $\hat{Z}$ divergiert für $\xi = \xi^* = p/T$. Mit Hilfe der obigen Gleichungen ergibt sich

$$\xi^*(T,\mu) = \lim_{\hat{V}\to\infty} \frac{\ln Z^{id.Gas}(T,\hat{\mu},\hat{V})}{\hat{V}},\ \ \hat{\mu} = \mu - v_0 T \xi^*(T,\mu) \tag{2.17}$$

und schließlich

$$p(T,\mu) = T\xi^*(T,\mu) = T \lim_{\hat{V}\to\infty} \frac{\ln Z^{id.Gas}(T,\hat{\mu},\hat{V})}{\hat{V}}. \tag{2.18}$$

Im Vergleich mit Gl. 2.15 ergibt sich zuletzt die wichtige Bestimmungsgleichung für den Druck des Van-der-Waals Gases:

$$p^{excl.}(T,\mu) = p^{id.Gas}(T,\hat{\mu}); \qquad \text{mit } \hat{\mu} = \mu - v_0 p(T,\mu) \tag{2.19}$$

Diese Formel ist rekursiv. Der Gesamtdruck des Systems wird benutzt, um $\hat{\mu}$ auszurechnen. $\hat{\mu}$ steht seinerseits in die Formel, mit der der Druck erst ausgerechnet werden soll.

Wie sehen nun die anderen thermodynamischen Größen wie Teilchen-, Entropie- oder Energiedichte aus?

$$n_i(T,\mu) = \frac{\partial p(T,\mu)}{\partial \mu} = \frac{n_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})}{1 + \sum_i v_0 n_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})} \tag{2.20}$$

$$s_i(T,\mu) = \frac{\partial p(T,\mu)}{\partial T} = \frac{s_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})}{1 + \sum_i v_0 n_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})} \tag{2.21}$$

$$\epsilon_i(T,\mu) = Ts_i - p_i + \mu_i n_i = \frac{\epsilon_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})}{1+\sum_i v_0 n_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})} \tag{2.22}$$

Die Teilchendichte wird also gleich zweimal modifiziert. Der Korrekturfaktor $1/(1+v_0 n)$ erklärt sich durch das vergrößerte Volumen. Er kürzt sich heraus, wenn man Verhältnisse von Hadrondichten betrachtet. Neu ist hingegen, daß das chemische Potential μ ersetzt wird durch $\hat{\mu} = \mu - v_0 p$. Diese Korrektur modifiziert auch Teilchenverhältnisse.

2.4 Das erweiterte Modell

Das erweiterte Modell, mit dem sich die vorliegende Arbeit hauptsächlich beschäftigt, baut auf das Modell von J. Stachel und P. Braun-Munzinger [13] auf. Erweitert wurde es durch die exakte Berücksichtigung des Isospins wie bei Cleymans et al. und die *excluded volume* Korrektur von Gorenstein et al. .

Im Resonanzgas wurden rund 200 verschiedene Hadronen getrennt nach Isospin mit all ihren Zerfallskanälen berücksichtigt; das sind alle bisher sicher bekannten Mesonen bis 1,5 GeV/c^2 und Baryonen bis 2 GeV/c^2 (vgl. Anhang A). Alle Daten, insbesondere auch die Zerfallskanäle soweit bekannt, wurden dem Review of Particle Physics [19] entnommen. Die unbekannten Zerfallskanäle wurden unter Zuhilfenahme der Zerfallskanäle benachbarter Resonanzen und unter Berücksichtigung von Phasenraumargumenten abgeschätzt.

Diese Ungenauigkeit ist einer der Gründe für den Schnitt bei 1.5 bzw. 2 GeV/c^2. Dort wird das Zerfallsverhalten der Resonanzen so unklar, daß durch ihre Hinzunahme nicht viel gewonnen werden kann. Das Hauptargument für den *cut-off* ist jedoch, daß höhere Resonanzen aufgrund ihrer großen Masse nur erschwert thermisch entstehen können (siehe Gl. 1.11).

Bei den Zerfällen wurden nicht nur die primären Zerfälle berücksichtigt sondern auch alle mehrstufigen Zerfallskaskaden.

Um das erweiterte Modell besser zu verstehen, ist es hilfreich, den Programmablauf zu kennen. Man beginnt mit der Vorgabe der Temperatur und des baryochemischen Potentials μ_B. Die innerste Schleife des Hauptprogramms berechnet den Druck des Systems, wobei Gl. 2.19 solange iteriert wird, bis das Ergebnis mit dem in die Gleichung eingesetzten Druck übereinstimmt. Die nächste Schleife iteriert das Volumen des Resonazgases, bis Gl. 2.3 erfüllt ist. Nun wird noch μ_S iteriert bis die Erhaltung der Strangeness, Gl. 2.4, erfüllt ist, und zuletzt wird die Ladungserhaltung nach Gl. 2.9 durch Variation von μ_{I_3} sichergestellt.

Dabei werden die Häufigkeiten der 200 verschiedenen Hadronspezies so oft neu berechnet, bis schließlich alle Parameter mit den Erhaltungssätzen verträglich sind. Im

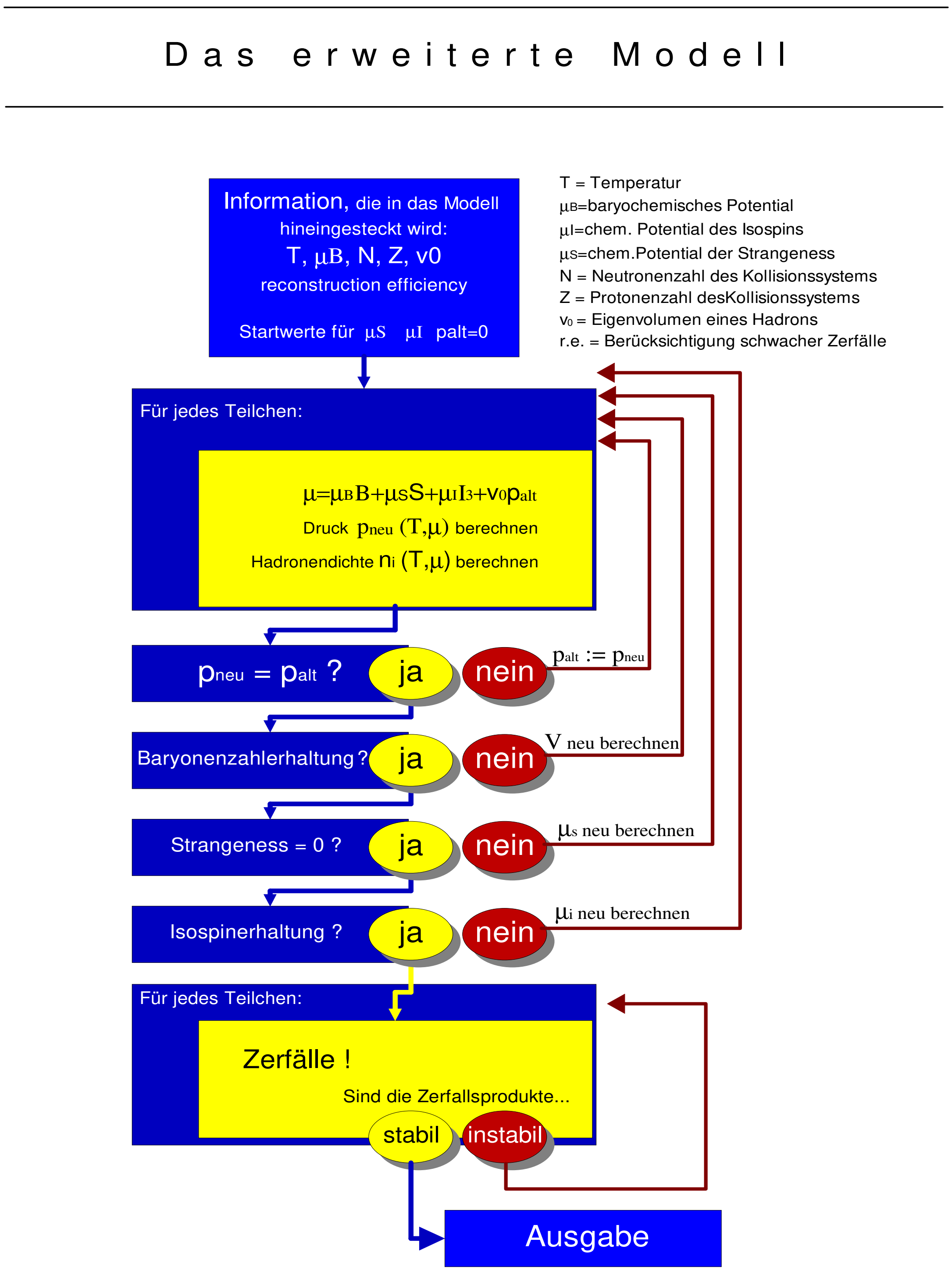

Abbildung 2.1 **Programmablauf des erweiterten Modells**

Experiment werden nun nicht diese rein thermischen Besetzungszahlen gemessen, da jede Teilchensorte zu einem bestimmten Prozentsatz durch Zerfälle höherer Resonanzen "kontaminiert" ist. Daher zerfallen nun in einem weiteren Schritt des erweiterten Modells alle kurzlebigen Hadronen, und es werden alle Teilchen, die jemals als Zerfallsprodukt auftauchen, aufaddiert.

Schwache Zerfälle finden aufgrund ihrer relativ langen Halbwertszeiten von ca. 10^{-10}s erst statt, wenn die seltsamen Teilchen bereits ausgefroren sind und sich längst auf dem Weg zum Detektor befinden. Daher zeigt die Spur der Zerfallsprodukte nicht exakt zum Punkt der Kollision sondern weicht leicht davon ab, so daß die schwachen Zerfälle aufgrund dieser experimentellen Signatur eliminiert werden können. Manche Experimente erkennen diese geringe Abweichung jedoch nicht und korrigieren auch nicht für diese Zerfälle. Problematisch ist auch, ob beispielsweise die Zerfallspionen überhaupt als Pionen identifiziert werden können. Deshalb wurde im erweiterten Modell, wie auch im Modell von Stachel und Braun-Munzinger, ein zusätzlicher Parameter, die *reconstruction efficiency*, eingeführt, mit dessen Hilfe schwache Zerfälle kontinuierlich an- oder ausgeschaltet werden können.

Die Formeln des erweiterten Modells

Parameter T, μ_B, μ_S, μ_{I_3}, V, Z, N

---

chem. Potential pro Spezies i:	$\hat{\mu}_i = \mu_B B_i + \mu_S S_i + \mu_{I_3} I_{3_i} - v_0\, p$
	mit Druck $p = \sum_i p_i$ und Hadron-Eigenvolumen v_0
Druck pro Hadronspezies i:	$p_i^{excl.} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4/3E_i\,\mathrm{d}k}{e^{\beta(E_i(p)-\hat{\mu}_i)}\pm 1}$
Teilchendichte pro Spezies i:	$n_i^{excl.} = \frac{n_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})}{1+\sum_i v_0\, n_i^{id.Gas}(T,\hat{\mu})} = \frac{g_i}{2\pi^2} \frac{\int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{e^{\beta(E_i-\hat{\mu_i})}\pm 1}}{1+\sum_i v_0 \frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{e^{\beta(E_i-\hat{\mu_i})}\pm 1}}$

Erhaltung der Strangeness	$\sum_i n_i S_i = 0$	$\Longrightarrow$	Bestimmung von μ_S
Erhaltung des Isospins	$V \sum_i n_i I_i^3 = \frac{Z-N}{2}$	$\Longrightarrow$	Bestimmung von μ_{I_3}
Erhaltung der Baryonenzahl	$V \sum_i n_i B_i = Z + N$	$\Longrightarrow$	Bestimmung von V

---

freie Parameter: T, μ_B Systemparameter: N, Z

Tabelle 2.2 Eine knappe Zusammenstellung aller im erweiterten Modell verwendeten Formeln

3 Methodik und Ergebnisse des erweiterten Modells

Das erweiterte Modell wurde im wesentlichen auf drei verschiedene experimentell studierte Kollisionssysteme angewandt. Dabei wurden die Daten verschiedener Experimente für die Analyse zusammengefaßt. Es wurden Daten von $^{28}\mathrm{Si} + ^{197}\mathrm{Au}$ Kollisionen verwendet, die am AGS des Brookhaven National Laboratory in den USA genommen wurden, außerdem Daten von $^{32}\mathrm{S} + ^{197}\mathrm{Au}$ bzw. $^{32}\mathrm{S} + ^{208}\mathrm{Pb}$ sowie von $^{208}\mathrm{Pb} + ^{208}\mathrm{Pb}$ Kollisionen am SPS des CERN.

3.1 Zusammenspiel der Parameter

Die chemischen Potentiale sind wie kleine Schräubchen, mit deren Hilfe man im erweiterten Modell bestimmte physikalische Größen auf einen gewünschten Wert "einregeln" kann. So regelt zum Beispiel das baryochemische Potential μ_B das Verhältnis der Baryonen im Vergleich zu den Antibaryonen. Je größer μ_B, um so mehr Baryonen und um so weniger Antibaryonen finden sich im Resonanzgas. Da ein Teil der Baryonen auch Strangeness trägt, verschiebt sich die Nettostrangeness des Systems, sobald man μ_B modifiziert hat. Daher wird nun die Strangeness-Feinabstimmung mit Hilfe des chemischen Potentials μ_S vorgenommen. Je größer μ_S, umso mehr Teilchen mit $\overline{s}$ Quarks, also K^+, K^0, $\overline{\Lambda}$ oder $\overline{\Sigma}$, kommen im Resonanzgas vor. Während sich das baryochemische Potential je nach Kollisionssystem zwischen 200-600 MeV bewegt, liegt das chemische Potential der Strangeness mit Werten zwischen 50-150 MeV schon deutlich niedriger.

Das chemische Potential des Isospins konnte bisher in vielen thermischen Modellen vernachlässigt werden, da seine Größe zwischen -10 bis -1 nur wenig ins Gewicht fällt. μ_{I_3} regelt - so könnte man annehmen - das Verhältnis von Protonen zu Neutronenzahl. Das ist jedoch irreführend. Auch nach der Einführung des Isospinpotentials spiegelt die thermische Besetzungsdichte von Protonen zu Neutronen nicht die Verhältnisse der ursprünglich kollidierten Schwerionen wider. Vielmehr bewirkt die Einführung von μ_{I_3}, daß die Netto-Ladung im Resonanzgas mit der Protonenzahl der beiden Schwerionen übereinstimmt. Konsequenz der Einführung des Isospins ist beispielsweise, daß negativ geladene Vektormesonen stärker vertreten sind als ihre positiv geladenen Geschwister, während die Besetzungszahlen der neutralen Verktormesonen dazwischen liegen. Die Abhängigkeit von μ_{I_3} und μ_S von den freien Parametern T und μ_B ist im Schaubild 3.1 gezeigt.

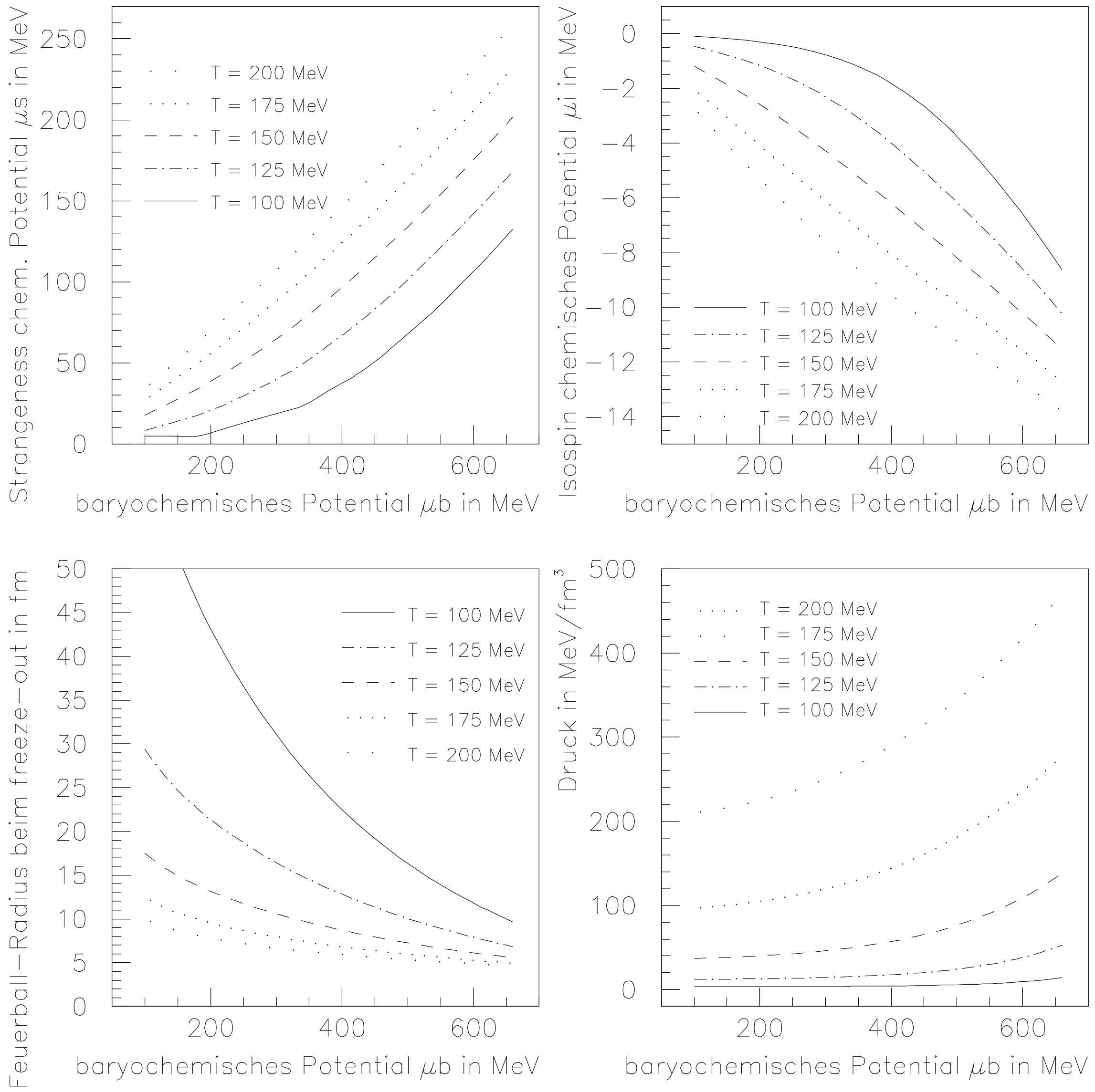

Abbildung 3.1 Abhängigkeiten der chemischen Potentiale, des Radiuses und des Drucks: Durch Festlegen der Parameter Temperatur und baryochemisches Potential sind die Potentiale der Strangeness sowie des Isospins eindeutig bestimmt, wie die oberen beiden Schaubilder verdeutlichen. Der Radius des - kugelförmig angenommenen - Volumens des Feuerballs bewegt sich größtenteils zwischen 5 und 10 fm und nimmt nur bei niedrigem T und μ_B sehr hohe Werte an. Der Druck des Systems ist erwartungsgemäß stark temperaturabhängig.

Die beiden Systemparameter Neutronenzahl N und Protonenzahl Z sollen das thermische Modell auf das jeweilige Kollisionssystem einstellen. Nun nehmen jedoch nicht alle Nukleonen der beiden Kollisionskerne wirklich an der Kollision teil - manche fliegen ungestört auf ihrer ursprünglichen Bahn weiter. In [16] werden N und Z durch ein geometrisches Modell bestimmt. Der kleinere der beiden Kollisionskerne schießt in zentralen Kollisionen durch den größeren Kern hindurch, so daß eine zylinderförmige Wechselwirkungsszone entsteht. Die Nukleonenzahl innerhalb dieses Zylinders stellt eine untere Grenze der tatsächlich beteiligten Nukleonen (Partizipanten) dar. Eine obere Grenze erhält man durch die Zahl der nach der Reaktion gemessenen Protonen multipliziert mit einem Faktor, der das Neutron zu Proton Verhältnis berücksichtigt. Dies ist jedoch tendentiell zu hoch gegriffen, da Zerfälle die Protonen verhältnismäßig stärker als die Neutronen anreichern. Das erweiterte Modell verwendete N+Z=165 für S+Pb(Au) und Si+Au(Pb) Kollisionen.

Die Anzahl der an Pb+Pb Kollisionen beteiligten Nukleonen wurde auf andere Weise ermittelt. Es konnte gemessen werden, welche Energie und damit wieviele Nukleonen nach zentralen Kollisionen unter 0 Grad in Strahlrichtung ankommen. Bei Pb+Pb Kollisionen nahmen rund 15 Nukleonen lediglich als “Zuschauer” (Spektatoren) an der Reaktion teil. Die restlichen 401 Nukleonen spielen eine aktive Rolle und gehen in das erweiterte Modell ein.

Allerdings ist der Einfluß der Systemparameter durch die große Anzahl verschiedener Resonanzen, auf die sich die Baryonenzahl und der Isospin des Kollisionssystems verteilt, völlig vernachlässigbar. Die Änderung einzelner Teilchendichten ist im Rahmen der Modellgenauigkeit nicht nachweisbar. Die Eigenheiten der verschiedenen Kollisionsysteme äußern sich also in erster Linie in Form der Parameter T und μ_B.

3.2 Hadronverhältnisse

Die Berechnung von Teilchenverhältnissen ist das vordergründige Ziel des erweiterten Modells. Im Gegensatz zu absoluten Teilchendichten reagieren Verhältnisse auf eine Vielzahl von experimentell schwer bestimmbaren Größen unempfindlich. Wie J. Cleymans in [21] darlegt, kürzen sich die Effekte durch transversale und longitudinale Expansion (*flow*) aufgrund der Integration über den Phasenraum heraus. Auch der Einfluß der *excluded volume* Korrektur verschwindet entweder ganz oder verringert sich in seiner Auswirkung (je nach Art der Korrektur) sobald man Verhältnisse betrachtet.

Die Bilder 3.2 und 3.3 stellen eine systematische Untersuchung dar, wie empfindlich die unterschiedlichen Teilchenverhältnisse auf die beiden freien Parameter T und μ_B reagieren. Die Unterschiede sind offensichtlich: Gerade die Antiteilchen/Teilchen-Verhältnisse variieren sehr stark mit Temperatur und baryochemischem Potential. Die $\overline{p}/p$, $\overline{d}/d$, $\overline{\Lambda}/\Lambda$, Ξ^+/Ξ^- und $\overline{\Omega}/\Omega$ Verhältnisse ändern sich über vier bis sechs Größenordnungen. Auch das p/π^+ Verhältnis reagiert wie alle Meson/Baryon Verhältnisse empfindlich auf μ_B und T. Verhältnisse wie K_s^0/π^-, K_s^0/Φ, Ω/Ξ und Ξ/Λ ändern sich hingegen nur in einem engen Bereich. Das bedeutet widerum, daß es bei diesen Verhältnissen einen großen Wertebereich gibt, der mit keinem sinnvollen Parametersatz erreicht werden kann.

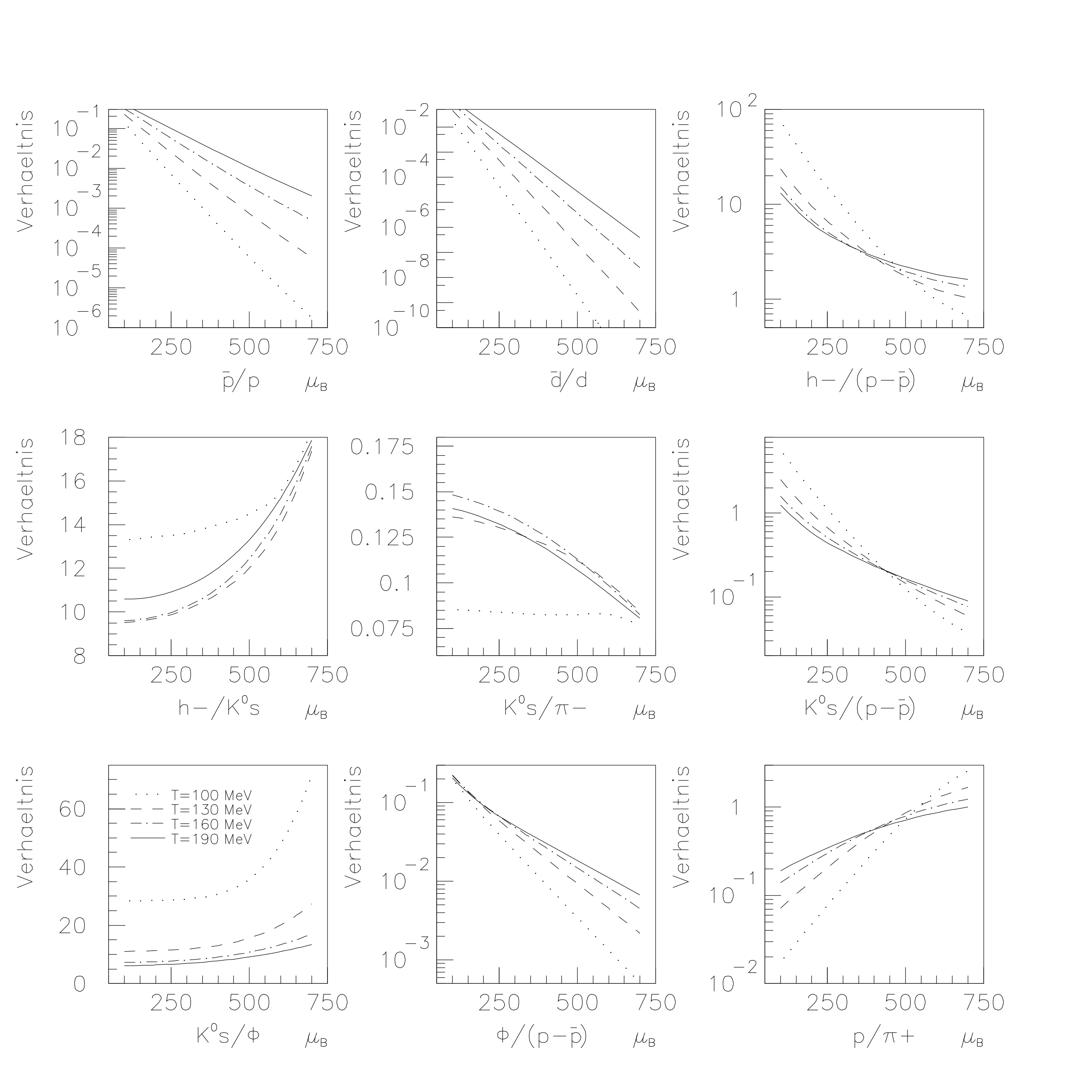

Abbildung 3.2 Die Empfindlichkeit verschiedener Teilchenverhältnisse auf Änderung von μ_B und T.

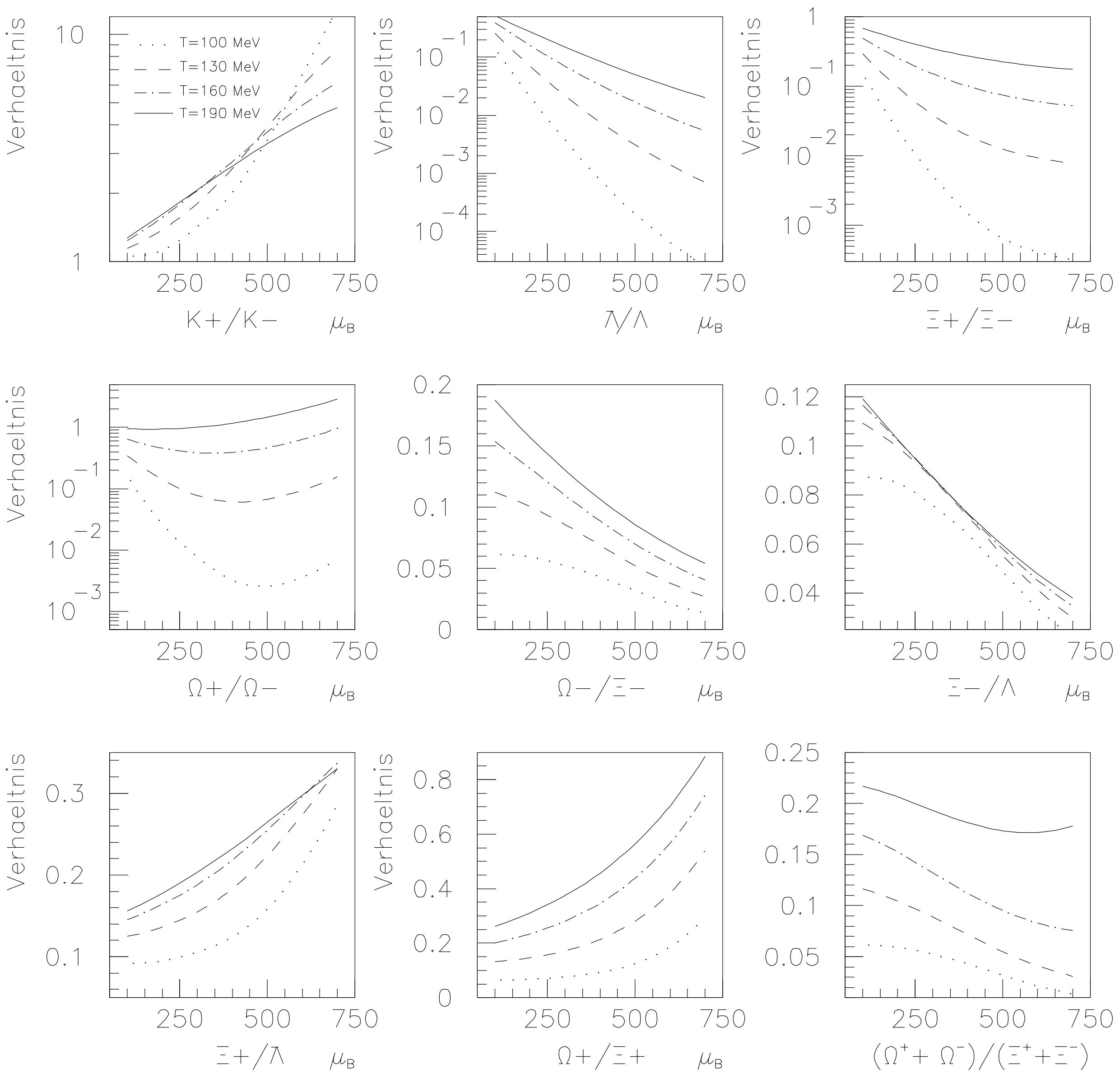

Abbildung 3.3 Die Empfindlichkeit verschiedener Teilchenverhältnisse mit Strangeness auf Änderung von μ_B und T.

3.3 Resonanzen

Die Pionendichte ist bei weitem am stärksten von allen Teilchendichten durch Resonanzzerfälle beeinflußt. Schon bei einer Temperatur von nur 125 MeV bei einem μ_B von

540 MeV stammen knapp 70% aller Pionen aus Zerfällen. Bei einer Temperatur von 170 MeV und einem μ_B von 240 MeV wächst ihr Anteil auf 80%, und davon stammt ein erheblicher Teil aus mehrstufigen Zerfällen. Rund 25% der Pionen stammen von Resonanzzuständen, die erst nach einem oder mehr Zwischenstadien in Pionen enden (siehe Tabelle 3.1).

Spezies	Modell der AGS Si+Au Kollisionen T=125 MeV, μ_B=540 MeV		Modell der SPS Pb+Pb Kollisionen T=170 MeV, μ_B=240 MeV	
Pionen	31,7 %	thermisch	19,7 %	thermisch
	54,1 %	aus Primärzerfällen	55,8 %	aus Primärzerfällen
	14,2 %	aus höheren Zerfällen	24,4 %	aus höheren Zerfällen
Rho	62,2 %	thermisch	63,3 %	thermisch
	37,8 %	aus Primärzerfällen	36,6 %	aus Primärzerfällen
	0 %	aus höheren Zerfällen	0 %	aus höheren Zerfällen
Kaonen	72,3 %	thermisch	47,8 %	thermisch
	25,6 %	aus Primärzerfällen	44,3 %	aus Primärzerfällen
	2,1 %	aus höheren Zerfällen	7,9 %	aus höheren Zerfällen
Nukleonen	51,1 %	thermisch	26,6 %	thermisch
	40,3 %	aus Primärzerfällen	51,9 %	aus Primärzerfällen
	8,6 %	aus höheren Zerfällen	21,5 %	aus höheren Zerfällen
Deltas	86,0 %	thermisch	70,7 %	thermisch
	13,5 %	aus Primärzerfällen	28,3 %	aus Primärzerfällen
	0,5 %	aus höheren Zerfällen	1,0 %	aus höheren Zerfällen
Kaskaden	68,0 %	thermisch	60,7 %	thermisch
	31,3 %	aus Primärzerfällen	36,3 %	aus Primärzerfällen
	0,7 %	aus höheren Zerfällen	3,0 %	aus höheren Zerfällen

Tabelle 3.1 Einfluß der Resonanzzerfälle auf die Besetzungszahlen der Hadronspezies *reconstruction eff.* = 0.5

Schließlich endet fast jedes der rund 200 im erweiterten Modell berücksichtigten Hadronen in einem oder mehreren Pionen. Untersucht man die Quellen der Zerfallspionen etwas genauer, so zeigt sich in Tabelle 3.2, daß bei einer Temperatur von 170 MeV die Zerfälle der ρ-Mesonen mit rund 12,5 % aller Pionen den größten Anteil an den Zerfallspionen stellen, gefolgt vom ω, den Kaonen, den K^* und den Δs mit jeweils rund 5% aller Pionen. Allerdings hängt der Anteil der Pionen, der von Kaonen beigesteuert wird, stark von der *reconstruction efficiency* ab. Werden schwache Zerfaelle ausgeschlossen, tragen die Kaonen garnicht zur Pi+ Dichte bei; wird die *reconstruction efficiency* auf eins gesetzt, verdoppelt sich ihr Anteil.

Resonanz	Pionanteil aus Primärzerfällen der linken Resonanz	Pionanteil aus Mehrfachzerfällen der linken Resonanz
ρ_0	6.34 %	0 %
ρ_+	6.17 %	0 %
ω	5.44 %	0 %
ϕ	0.14%	0.85 %
$h^1_{(1170)}$	0.33 %	0.66 %
$a^+_{2\,(1320)}$	0.47 %	0.68 %
K_0	3.33 %	0 %
K_+	1.63 %	0 %
$\overline{K}_0$	1.50 %	0 %
K^*_+	3.52 %	1.51 %
$\overline{K}^*_0$	1.61 %	1.21 %
$p_{(1650-1720)}$	0.02 %	0.82 %
Δ^{++}	3.87 %	0 %
Δ^+	1.32 %	0 %
Σ^+	0.82 %	0 %
$\Sigma^+_{(1385)}$	1.20 %	0.04 %

Tabelle 3.2 Beiträge der Zerfälle ausgewählter Hadronen zur absoluten π^+-Dichte. Modell der Pb-Pb Kollisionen am SPS mit T=170 MeV, μ_B=240 MeV und *reconstruction efficiency*=0.5.

Knapp 50 % der Pionen lassen sich nicht den wenigen dominanten Resonanzen als Quelle zuordnen. Sie stammen von der Vielzahl höher angeregter Zustände, von denen jeder einzelne nur wenig zur Pionendichte beiträgt, die aber zusammen eine drastische Wirkung haben. Hier zeigt sich auch, daß es nicht ausreicht, nur die wichtigsten Resonanzen zu berücksichtigen, so wie es ebenfalls nicht reicht, nur primäre Zerfälle zu betrachten.

Bei den Nukleonen zeigt ein Temperaturanstieg ebenfalls eine deutliche Wirkung. Sind bei 125 MeV noch die Hälfte aller Nukleonen thermischen Ursprungs, so reduziert sich dieser Anteil bei 170 MeV auf ein Viertel aller Protonen und Neutronen. Auch der Anteil der Nukleonen aus höheren Zerfällen verdoppelt sich auf rund 20% (siehe Tabelle 3.1).

3.4 Korrekturen und Einflüsse: Quantenstatistik, Isospin und die Eigenvolumenkorrektur

Wenn man ein Modell erweitert, sollte man überprüfen, ob die — meist rechenzeitintensive — Erweiterung eine tatsächliche Verbesserung darstellt. Beim erweiterten Modell zeigte sich, daß die exakte Erhaltung der dritten Komponente des Isospins insbesondere bei niedrigen Temperaturen und hohem baryochemischen Potential die Teilchendichten der Isospin tragenden Hadronen spürbar ändert. Am stärksten sind die geladenen Pionen betroffen, da sie als leichteste Teilchen mit einem $\mu_{total} = \mu_{I_3}$ das μ_{I_3} am stärksten spüren. Den größten Effekt sieht man bei T=100 MeV und μ_B=600 MeV, dort ändert die Erhaltung des Isospins die Pionendichte um 6%. Die Protonendichte wird bei hohem baryochemischen Potential unabhängig von der Temperatur um rund 3% modifiziert.

Die exakte Verwendung der Bose-Einstein bzw. Fermi-Dirac Statistik statt der Boltzmann-Statistik in Gl. 1.11 kommt letztlich nur bei der Berechnung der Piondichte zum Tragen. Sie wird bei T=100 MeV durch die korrekte Statistik um 3-5% nach oben korrigiert. Bei T=190 MeV liegt dieser Effekt nur noch bei rund 1%, da hier fast alle Pionen aus Zerfällen stammen. Bei allen anderen Hadrondichten liegt der Effekt unter 1%.

Die Auswirkungen einer *finite volume* Korrektur nach [13] auf die Verhältnisse sind im Rahmen der Modellgenauigkeit nicht nachweisbar.

Je nachdem, welches Teilchenverhältnis man betrachtet, kann sich die Änderung der Teilchendichten in gleichem Maß auf die Verhältnisse auswirken. Weitaus drastischer als Isospin und Quantenstatistik ist jedoch der Effekt der *excluded volume* Korrektur. Sie verringert die Teilchendichten bei hohen Temperaturen und hohen Eigenvolumina der Hadronen um mehr als eine Größenordung (vgl. Tabelle 3.3 und Schaubild 3.4).

Im Gegensatz zu den Teilchendichten ändern sich die Teilchenverhältnisse nicht, solange man für alle Hadronen das gleiche Eigenvolumen wählt — unabhängig von dessen Größe. Dann gleichen alle Verhältnisse denen eines idealen Gases (vgl. [18]). Dies ändert sich jedoch schlagartig, sobald man für Mesonen und Baryonen unterschiedliche Eigenvolumina annimmt. Dies ist beispielhaft für das π^+/p und das $\overline{p}/p$ Verhältnis in den Schaubildern 3.5 - 3.7 gezeigt, wo die verschiedenen Eigenvolumenkorrekturen teilweise drastische Auswirkungen haben.

Man hat, wie schon erwähnt, nur sehr wenig Informationen über die genaue Form der starken Wechselwirkung zwischen den Hadronen eines Resonanzgases. Aus Nukleon-Nukleon Streuexperimenten weiß man lediglich, daß das Potential bei Abständen zwischen 0.3-0.5 fm (je nach Partialwelle) stark repulsiv wird. Dies wurde im erweiterten Modell auch auf die anderen Baryonen verallgemeinert und der Baryonenradius auf 0.3 fm festgelegt.

Noch schwieriger ist die Frage zu beantworten, auf welche Art die Mesonen untereinander und mit den Baryonen wechselwirken. Hier liegt nur Information über Pion-

	Ideales Gas			Van-der-Waals Gas		
T, μ_B in MeV Dichten in fm^{-3}	Boltzmann Statistik	Isospin $\mu_{I_3} = 0$	Quan.-Stat. $\mu_{I_3} \neq 0$	R_B=0.3 R_M=0.3	R_B=0.3 R_M=0.25	R_B=0.8 R_B=0.62
T=100, μ_B=200						
π^+ Dichte	0.0115	0.0121	0.0121	0.0117	0.0119	0.0094
p Dichte [10^{-3}]	0.569	0.569	0.567	0.513	0.555	0.384
T=100, μ_B=600						
π^+ Dichte	0.0174	0.0191	0.0190	0.0166	0.0169	0.0089
p Dichte	0.0273	0.0282	0.0282	0.0250	0.0252	0.0112
T=130, μ_B=200						
π^+ Dichte	0.0469	0.0493	0.0490	0.0436	0.0455	0.0236
p Dichte	0.00712	0.00716	0.00712	0.00636	0.00649	0.00241
T=130, μ_B=600						
π^+ Dichte	0.102	0.109	0.104	0.075	0.079	0.020
p Dichte	0.133	0.136	0.131	0.095	0.097	0.018
T=160, μ_B=200						
π^+ Dichte	0.182	0.189	0.187	0.134	0.148	0.043
p Dichte	0.0437	0.0441	0.0437	0.0315	0.0327	0.0051
T=160, μ_B=600						
π^+ Dichte	0.441	0.465	0.446	0.202	0.221	0.034
p Dichte	0.457	0.467	0.452	0.206	0.210	0.021
T=190, μ_B=200						
π^+ Dichte	0.612	0.630	0.623	0.294	0.349	0.064
p Dichte	0.177	0.179	0.177	0.0844	0.0877	0.0063
T=190, μ_B=600						
π^+ Dichte	1.437	1.500	1.447	0.357	0.409	0.050
p Dichte	1.254	1.277	1.239	0.309	0.312	0.020

Tabelle 3.3 **Teilchendichten im Vergleich:** Diese Tabelle veranschaulicht die moderaten Auswirkungen durch die Einführung des Isospins und der Boltzmann-Statistik sowie den drastischen Effekt, den die *excluded volume* Korrektur auf die Teilchendichten hat. In allen Fällen wurde die Teilchendichten mit Isospinerhaltung und Quantenstatistik berechnet, soweit nicht ausdrücklich anders beschriftet. R bezeichnet den Radius des Eigenvolumens der Baryonen bzw. Mesonen.

Pion Wechselwirkung vor. Pionen wirken aufeinander eher attraktiv als repulsiv, so daß man zumindest ein kleineres Meson-Eigenvolumen im Resonanzgas annehmen sollte. Die Auswirkung der elektromagnetischen Wechselwirkung auf das Resonanzgas sind nicht im Modell berücksichtigt.

Yen, Gorenstein, Greiner und Yang schlagen in [18] vor, nur den Pionen ein kleineres Eigenvolumen zu geben und alle anderen Hadronen gleich zu behandeln. Aus der Analyse von sechs Teilchenverhältnissen (drei aus Pb+Pb und drei aus Au+Au Kollisionen) extrahierten sie folgende Eigenvolumina: Einen Pionradius von 0.62 fm und einen Hadronradius von 0.8 fm.

Diese Werte machen aus drei Gründen wenig Sinn: Aus theoretischer Sicht ist es schwer einsichtig, weshalb der Radius, der schließlich die starke Wechselwirkung simulieren soll, gerade die Größe des Ladungsradiuses der Nukleonen haben soll, der für die elektromagnetische Wechselwirkung maßgeblich ist. Außerdem wäre in diesem Fall laut Modellrechnungen 90% des Volumens des Feuerballs durch das Eigenvolumen der Teilchen im Resonanzgas erfüllt. In diesem Fall könnte man sicher nicht mehr von einer “Korrektur” sprechen und müßte sich eine exakte Lösung überlegen.

Und geht man davon aus, daß nicht nur die Pionen als einzige Mesonen ein kleineres Eigenvolumen besitzen, sondern dehnt dies auf alle Mesonen aus, so spricht der Vergleich der experimentellen Daten mit den Modellrechnungen klar gegen ein derart großes Eigenvolumen. Ein Modell mit R(Baryon)=0.8 fm und R(Meson)=0.62 fm erklärt die Daten weitaus schlechter als eines mit deutlich kleineren Werten. Dies soll im folgenden gezeigt werden, indem an den drei Kollisionssystemen jeweils drei verschiedene *excluded volume* Korrekturen untersucht werden:

- R(Baryon) = 0.3 fm, R(Meson) = 0.3 fm
- R(Baryon) = 0.3 fm, R(Meson) = 0.25 fm
- R(Baryon) = 0.8 fm, R(Meson) = 0.62 fm

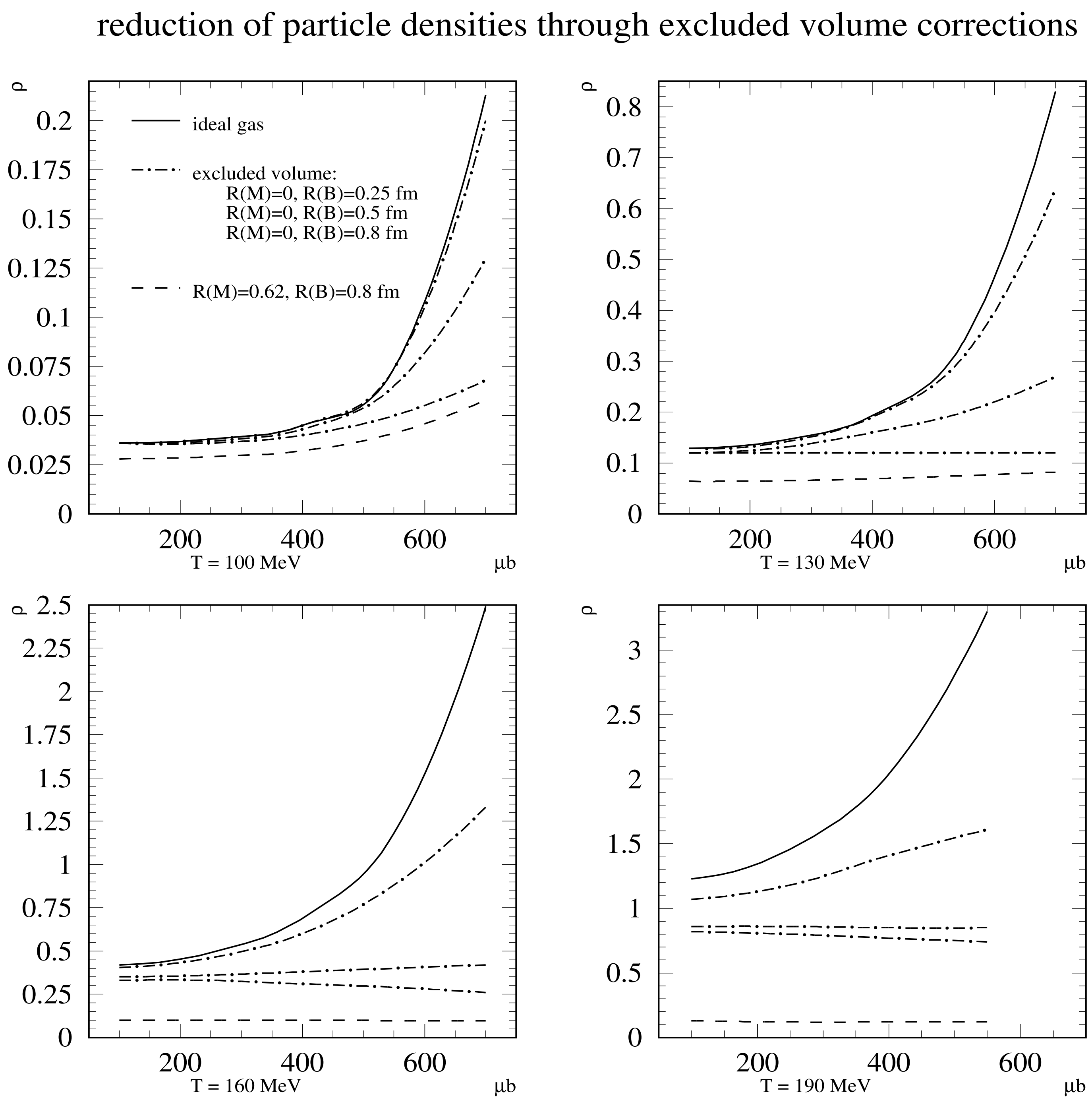

Abbildung 3.4 Teilchendichten und die Auswirkung der excluded volume Korrektur: Gezeigt ist die absolute Teilchendichte (pro fm^3) aller im Resonanzgas thermisch produzierten Teilchen in Abhängigkeit von μ_B (in MeV) bei verschiedenen Temperaturen und Eigenvolumina der Baryonen und Mesonen.

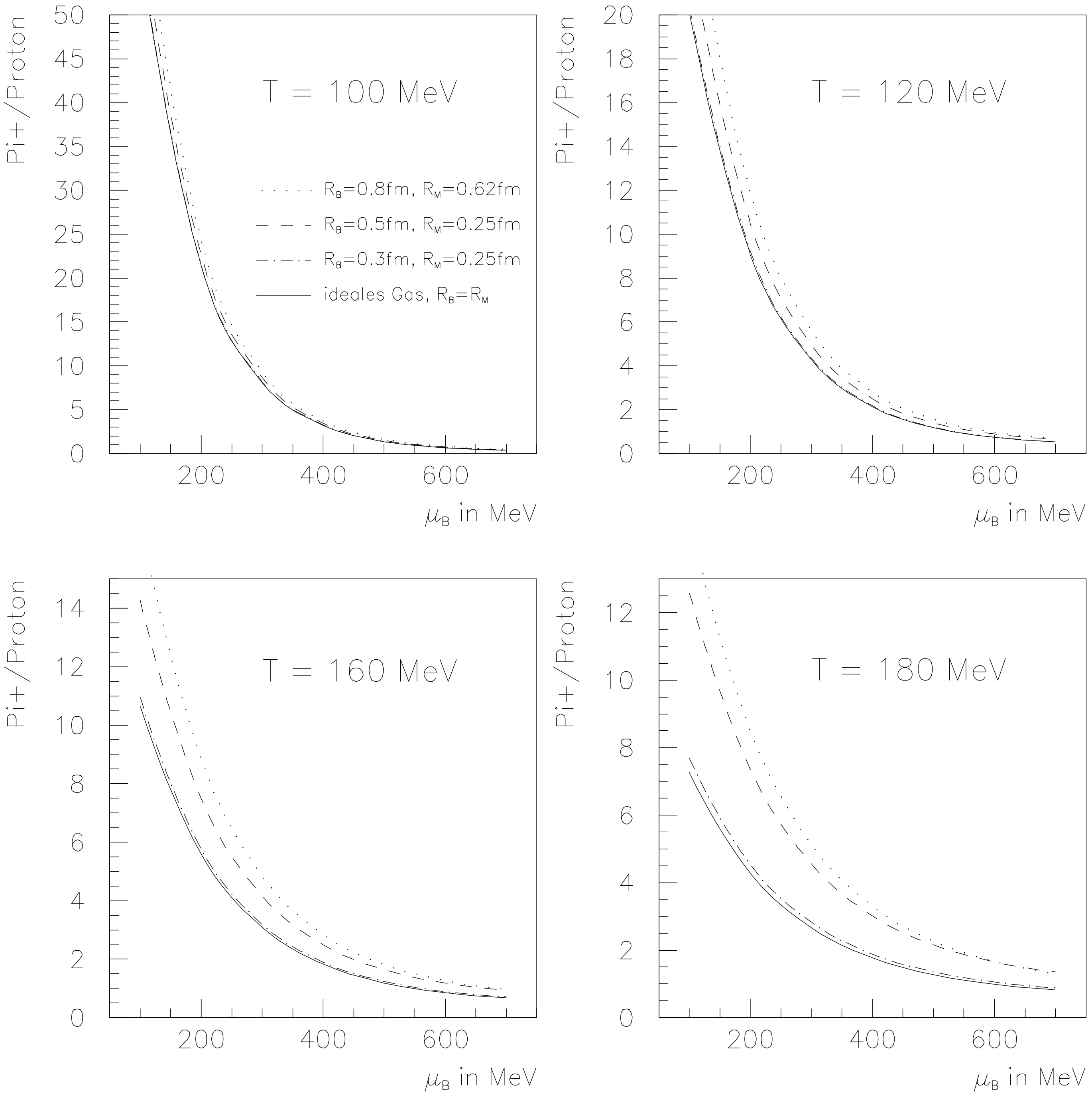

Abbildung 3.5 Auswirkungen der Eigenvolumenkorrektur: Das π^+/p Verhältnis in Abhängigkeit von μ_B bei verschiedenen Temperaturen.

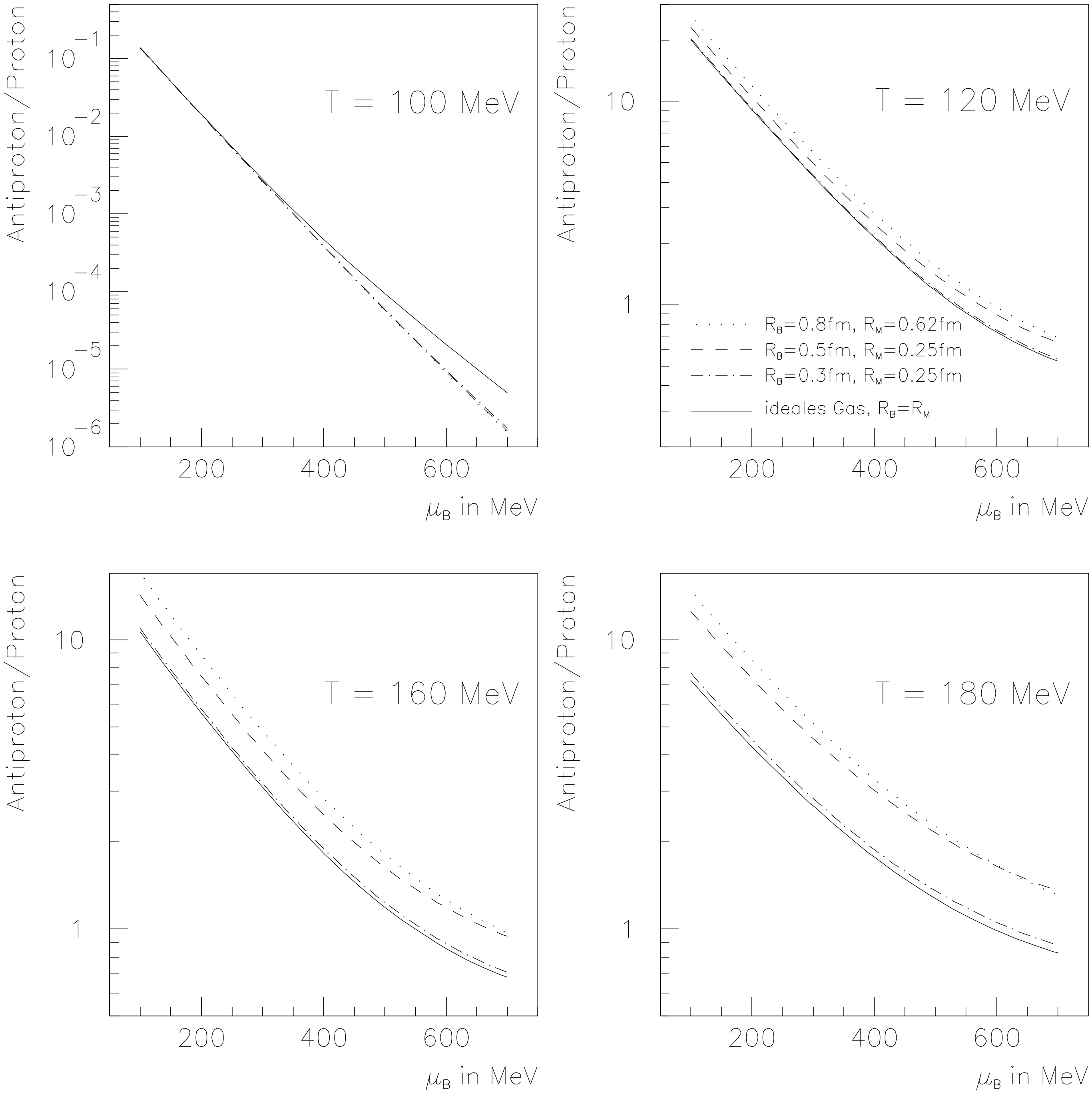

Abbildung 3.6 Auswirkungen der Eigenvolumenkorrektur: Das $\overline{p}/p$ Verhältnis in Abhängigkeit von μ_B bei verschiedenen Temperaturen.

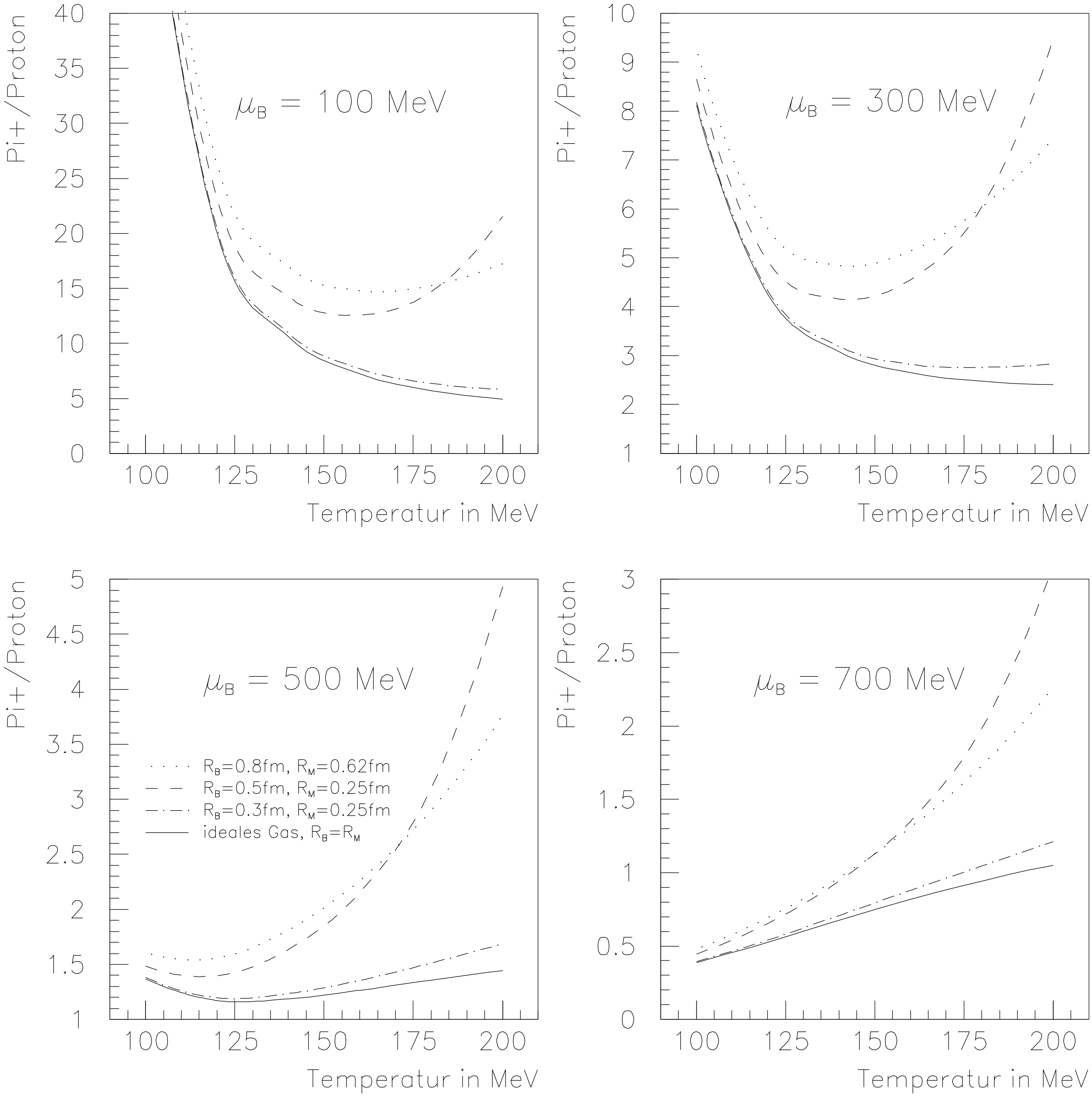

Abbildung 3.7 Auswirkungen der Eigenvolumenkorrektur: Das π^+/p Verhältnis in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Werten von μ_B.

3.5 Anpassung der freier Parameter

Um mit dem erweiterten Modell Vorraussagen über Teilchenverhältnisse zu treffen, die mit gemessenen Werten verglichen werden können, müssen die freien Parameter T und μ_B festgelegt werden. Dazu wurden folgende zwei Größen minimiert:

$$\chi^2 = \sum_{\text{Alle Verhältnisse}} \frac{(\text{exp.Verhältnis} - \text{Modellverhältnis})^2}{(\text{Fehler des exp.Verhältnisses})^2} \quad \text{sowie die}$$

$$\text{quadratische Abweichung} = \sum_{\text{Alle Verhältnisse}} \frac{(\text{exp.Verhältnis} - \text{Modellverhältnis})^2}{(\text{exp.Verhältnis})^2}.$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß es alle gemessenen Verhältnisse in gleicher Weise berücksichtigt, ohne daß entschieden werden muß, welche Werte "besser" gemessen sind als andere. Auf der anderen Seite führen viele Experimente in ihren Publikationen ledigliche statistische Fehler an, da die systematischen Fehler oft nicht genau bekannt sind. Dann dominieren Verhältnisse mit kleinen statistischen (aber vielleicht großen systematischen!) Fehlern das χ^2. Deshalb wurde neben χ^2 auch die quadratische Abweichung minimiert, wobei als Arbeitshypothese angenommen wurde, daß die gemessenen Werte alle "absolut" richtig sind.

Es hat sich bei den drei betrachteten Kollisionssystemen gezeigt, daß χ^2 und die quadratische Abweichung bei dem jeweils gleichen Parametersatz (T, μ_B) minimal wurden.

3.6 Verhältnisse am AGS - Si+Au Daten

In [14] sind alle für thermische Modelle relevanten Ergebnisse zentraler Si+Au bzw. Si+Pb Kollisionen zusammengefaßt. Der Vergleich von insgesammt 14 gemessenen Teilchenverhältnissen mit den Voraussagen des erweiterten Modells ergab gute Übereinstimmung.

Für R(B)=R(M)=0.3 fm ergab T = 125 MeV und μ_B = 540 MeV die geringste quadratische Abweichung mit dem Wert 1.72 und das kleinste χ^2 von 78.8. Beide Größen verlaufen über einen weiten Teil der T – μ_B Ebene sehr flach, wie in den Schaubildern 3.10 und 3.11 zu sehen ist. Das Modell erzeugte einen Feuerball mit einem Radius von 6.8 fm, der mit dem aus Pioninterferrometrie [20] gewonnenen Wert von 6.7 fm fast exakt übereinstimmt. Es befanden sich 274 thermisch produzierte Hadronen im Modell des Resonanzgases, die damit rund 10% des Feuerballvolumens einnehmen. Der berechnete Druck des Systems beträgt 28.8 MeV/fm^3. Wie Tabelle 3.6 zeigt, stimmen die vom Modell erzeugten Pion- und Protondichten sehr gut mit den experimentellen Werten überein. Das Ergebnis ist auch in Übereinstimmung mit dem Modell von P. Braun-

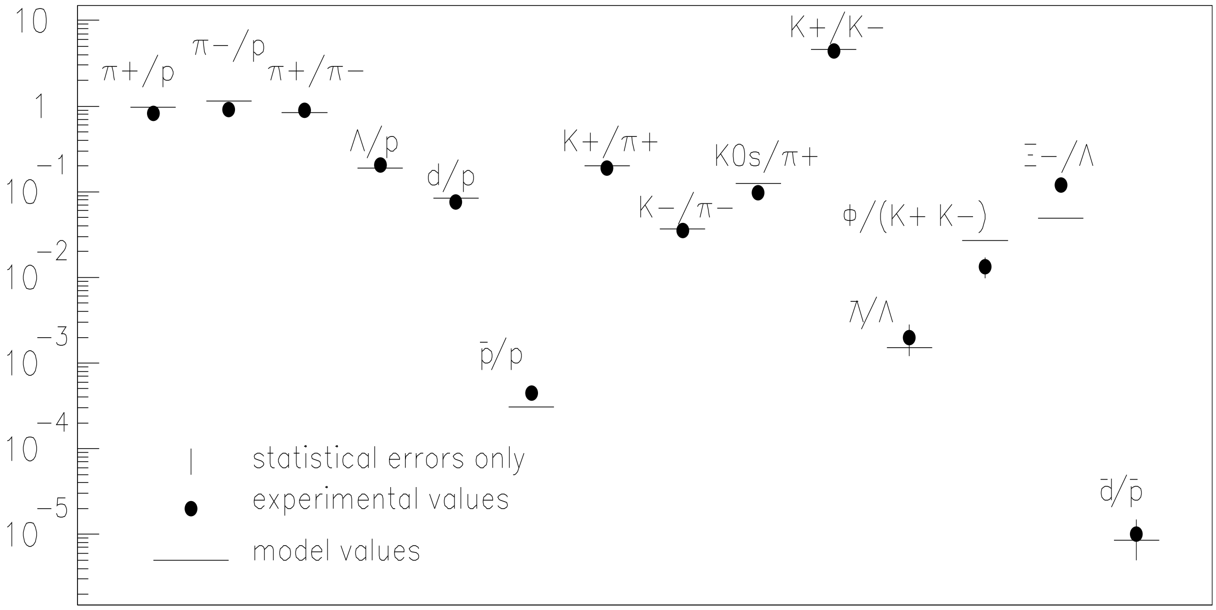

Abbildung 3.8 **Hadronverhältnisse bei Si+Au(Pb) Kollisionen am AGS:** Experimentelle Daten im Vergleich mit Modelldaten bei T=125 MeV, μ_B=540 MeV, μ_S=116.9 MeV, μ_{I_3}=-11.7 MeV, R(B)=R(M)=0.3 fm.

Munzinger, J.Stachel, H. Wessels und N. Xu, das ebenfalls mit μ_B=540 MeV und einer Temperatur zwischen 120 und 140 MeV die Daten am besten erklären konnte.

Verkleinert man R(M) auf 0.25 fm, stimmen Modell und Experiment bei T=125 MeV und μ_B=540 MeV nach wie vor gut überein. Die quadratische Abweichung vergrößert sich leicht auf 1.81 und χ^2 steigt ebenfalls leicht auf 87.6 an. Radius, Druck, Pion- und Protondichten wie auch die Teilchenverhältnisse selbst ändern sich nur wenig.

	π^+-Dichte [1/fm^3]	Proton-Dichte [1/fm^3]
experimentelle Ergebnisse:	0.058	0.063
Modelldaten:		
R(B)=0.3 fm, R(M)=0.3 fm	0.051	0.053
R(B)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm	0.053	0.054
R(B)=0.8 fm, R(M)=0.62 fm	0.012	0.012

Tabelle 3.4 Si+Au(Pb) Modelldaten bei verschiedenen Eigenvolumina und experimentelle Pion- und Protondichten [20] im Vergleich.

Untersucht man die Si+Au Daten mit großen Eigenvolumina, also mit R(B) = 0.8 fm und R(M) = 0.62 fm, so stellt man einige Unterschiede fest. Quadratische Abweichung und χ^2 werden bei Temperatur von 110 MeV und einem baryochemischen Potential von

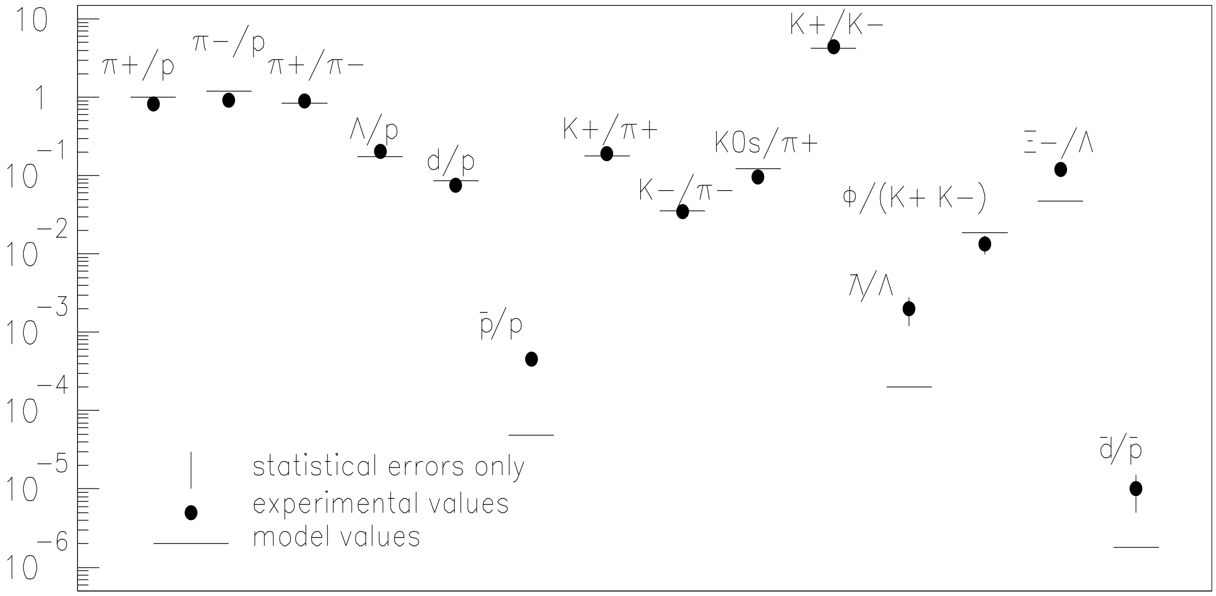

Abbildung 3.9 **Hadronverhältnisse bei Si+Au(Pb) Kollisionen am AGS:** Experimentelle Daten im Vergleich mit Modelldaten bei T=110 MeV, μ_B=570 MeV, μ_S=91.36 MeV, μ_I3=-9.39 MeV, R(B)=0.8 fm, R(M)=0.62 fm.

570 MeV minimal. Doch auch dann beträgt die quadratische Abweichung mit 3.0 und χ^2 mit 151.7 fast doppelt soviel wie im Fall der kleineren *excluded volume* Korrektur. Der Radius des Feuerballs ist mit 11.1 fm deutlich zu groß und auch die Pion- und Protondichten stimmen nicht mit den experimentell gemessenen Werten überein.

Vergleicht man Abb. 3.8 und 3.9, so fällt die gute Übereinstimmung der Daten mit dem Modell bei kleinen Eigenvolumina (Abb. 3.8) ins Auge. Die größten Umstimmigkeiten treten beim $\Phi/(K^+ + K^-)$ Verhältnis auf, das laut Modell um einen Faktor zwei zu groß ist, sowie beim $\overline{p}/p$ und Ξ^-/Λ Verhältnis, das jeweils nur ein Drittel bzw. die Hälfte des gemessenen Wertes beträgt. In Abb. 3.9 sind jedoch die $\overline{p}/p$, $\overline{\Lambda}/\Lambda$ und $\overline{d}/\overline{p}$ Verhältnisse um eine ganze Größenordnung falsch. Dies liegt am deutlich größeren μ_B von 570 MeV, das zwar die anderen Teilchenraten sehr gut beschreibt, die Anti-Teilchen/Teilchen-Verhältnisse aber nicht reproduzieren kann.

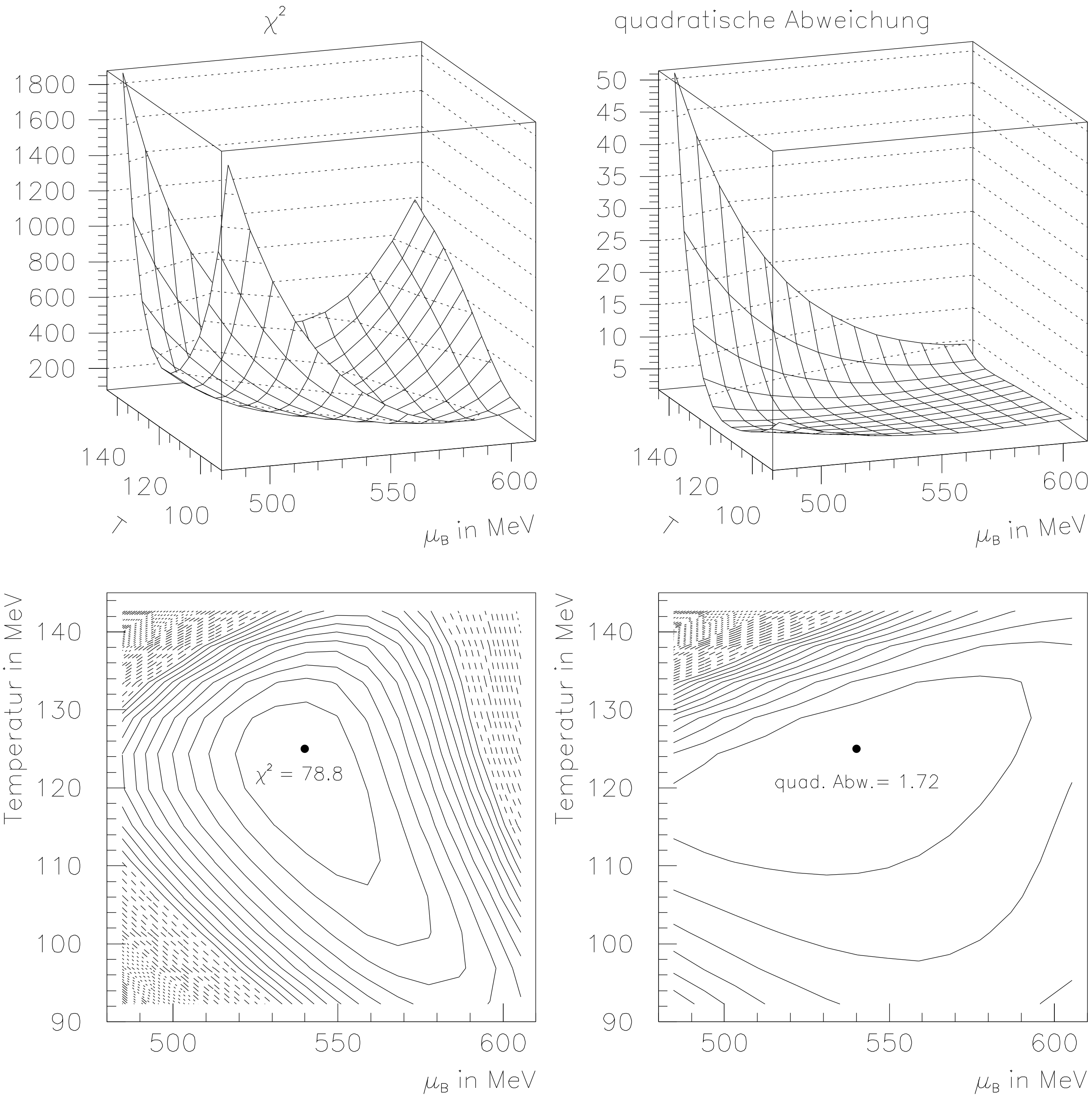

Abbildung 3.10 **Quadratische Abweichung und χ^2 für Si+Au Daten im Vergleich mit dem erweiterten Modell mit R(B)=R(M)=0.3 fm.** Beide Größen verlaufen über einen weiten Bereich der von T und μ_B aufgespannten Ebene recht flach, so daß die Bestimmung der "besten" Parameter immer einen gewissen Spielraum läßt: Die Parameter sind in einem Bereich von ± 10 MeV in μ_B und ± 5 MeV in T noch in Übereinstimmung mit den Daten.
Die innerste "Höhenlinie" liegt ungefähr bei χ^2=115 und bei einer quadratischen Abweichung von 2.7.

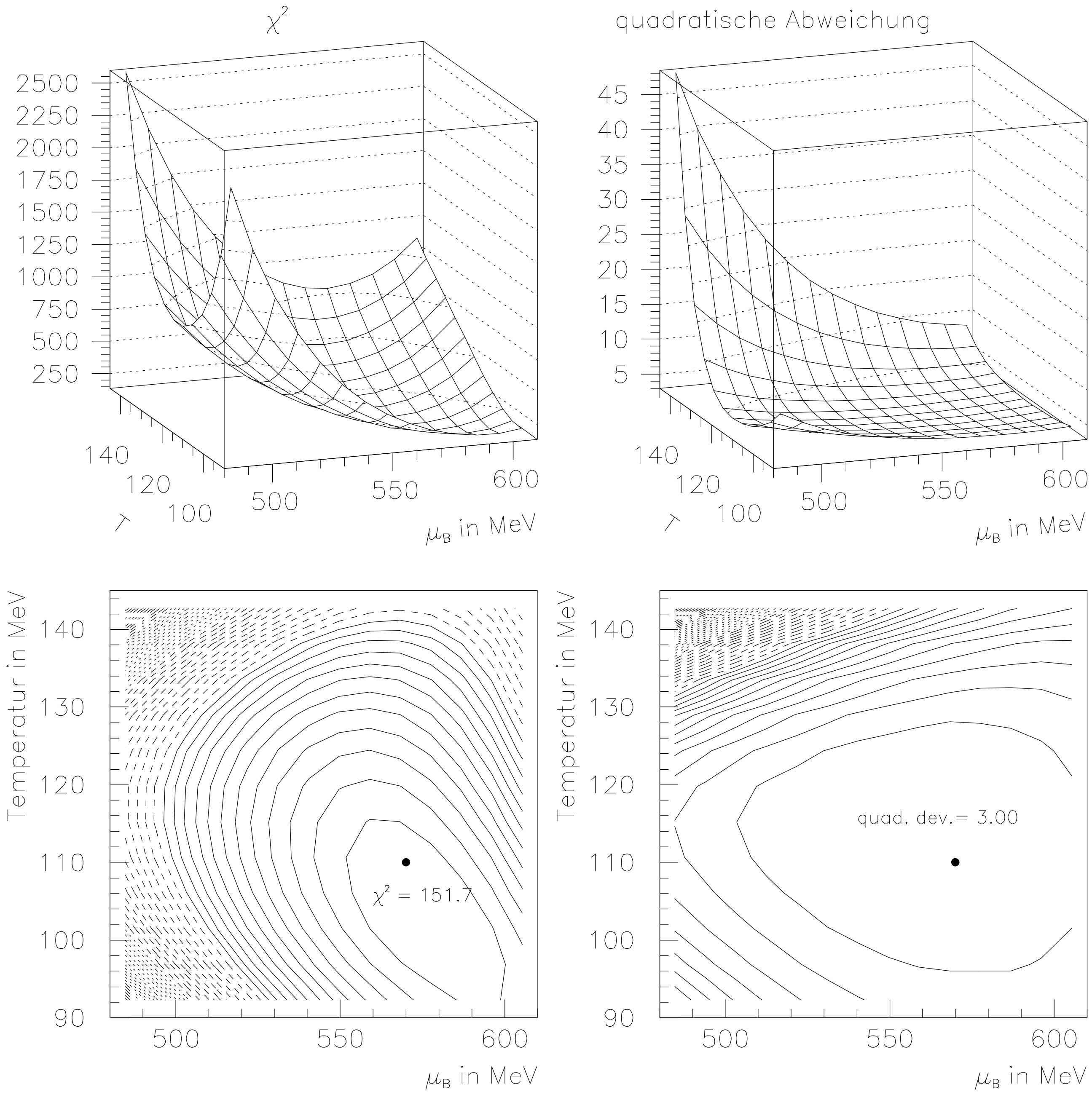

Abbildung 3.11 **Quadratische Abweichung und χ^2 für Si+Au Daten im Vergleich mit dem erweiterten Modell mit R(B)=0.8 fm, R(M)=0.62 fm.** Auch hier verlaufen beide Größen über einen weiten Bereich der von T und μ_B aufgespannten Ebene so flach, daß eine eindeutige Bestimmung der "besten" Parameter schwierig ist. Ihr absoluter Wert ist jedoch deutlich größer als bei kleinerer Eigenvolumenkorrektur.

	Experiment	Modelldaten		
		Modell 1	Modell 2	Modell 3
π^+/p	0.82(4)	0.96	0.99	1.00
	0.92(?)			
π^-/p	0.91(4)	1.14	1.17	1.19
π^+/π^-	0.90(4)	0.84	0.84	0.84
Λ/p	0.203(41)	0.187	0.190	0.173
d/p	7.62(76) 10^{-2}	8.45 10^{-2}	8.44 10^{-2}	8.66 10^{-2}
$\overline{\mathrm{p}}/\mathrm{p}$	4.5(5) 10^{-4}	3.10 10^{-4}	3.07 10^{-4}	4.83 10^{-5}
K^+/π^+	0.19(2)	0.199	0.199	0.179
K^-/π^-	3.5(5) 10^{-2}	3.76 10^{-2}	3.76 10^{-2}	3.59 10^{-2}
$\mathrm{K}^0_\mathrm{s}/\pi^+$	9.7(15) 10^{-2}	0.124	0.124	0.113
$\mathrm{K}^+/\mathrm{K}^-$	4.4(4)	4.56	4.47	4.22
$\overline{\Lambda}/\Lambda$	2.0(8) 10^{-3}	1.51 10^{-3}	1.46 10^{-3}	0.20 10^{-3}
$\phi/(\mathrm{K}^+ + \mathrm{K}^-)$	1.34(36) 10^{-2}	2.68 10^{-2}	2.71 10^{-2}	1.87 10^{-2}
Ξ^-/Λ	0.12(2)	4.93 10^{-2}	5.00 10^{-2}	4.78 10^{-2}
$\overline{\mathrm{d}}/\overline{\mathrm{p}}$	1.0(5) 10^{-5}	0.85 10^{-5}	0.86 10^{-5}	1.78 10^{-6}

Tabelle 3.5 Si+Au(Pb) Teilchenverhältnisse im Vergleich mit dem erweiterten Modell:
Modell 1: R(B)=R(M)=0.3 fm, T=125 MeV, μ_B=540 MeV
Modell 2: R(B)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm, T=125 MeV, μ_B=540 MeV
Modell 3: R(B)=0.8 fm, R(M)=0.62 fm, T=110 MeV, μ_B=570 MeV
reconstruction efficiency=0.5, Referenzen der Daten in [14].

3.7 Verhältnisse am SPS - S+Pb Daten

In [13] sind die experimentellen S+Pb und S+Au Daten in Form von 20 verschiedenen Teilchenverhältnissen zusammengetragen. Sie wurden mit dem erweiterten Modell analysiert. Gerade durch die große Zahl der vorhandenen Daten aus verschiedenen Experimenten stellt diese Analyse nicht nur einen kritischen Test für die Thermalisierung des Feuerballs dar. Sie testet auch den Erfolg der verwendeten *excluded volume* Korrektur, auf die diese große Zahl an Teilchenverhältnissen erstaunlich sensibel reagiert.

Das beste Ergebnis wurde bei T=180 MeV, μ_B=200 MeV, R(B)=0.3 fm und R(M)=0.25 fm erzielt. Hier betrug die quadratische Abweichung nur 1.38 mit einem χ^2 von nur 39.4. Beide Werte sind deutlich kleiner als bei der Analyse der AGS-Daten, obwohl eine größere Zahl von Verhältnissen verglichen wurde. Andererseits erstrecken sich die experimentellen SPS-Daten lediglich über drei Größenordnungen, während die AGS-Daten einen Bereich von sechs Größenordnungen abdecken.

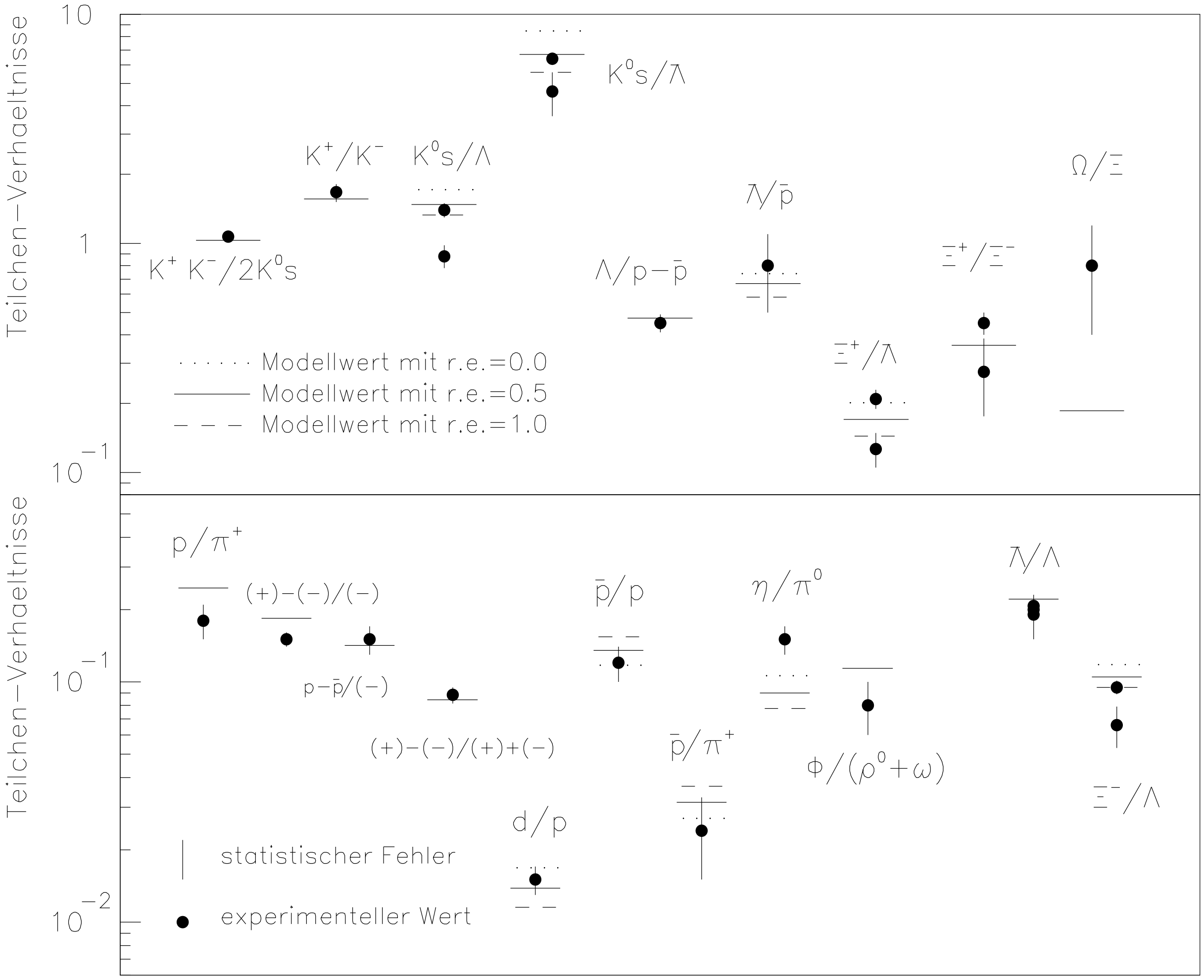

Abbildung 3.12 Hadronverhältnisse bei S+Pb(Au) Kollisionen am SPS: Experimentelle Daten im Vergleich mit Modelldaten bei T=180 MeV, μ_B=200 MeV, μ_S=54.25 MeV, μ_{I_3}=-6.63 MeV, R(B)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm, r.e.=*reconstruction efficiency*, der berücksichtigte Anteil der schwachen Zerfälle.

Experimentelle Piondichte und Modellergebnis stimmen mit ρ_{π^+}=0.27/fm^3 genau überein. Das Eigenvolumen der rund 750 thermisch produzierten Modellteilchen nimmt ungefähr 5.5 % des Modellvolumens ein. Dieses Volumen ist jedoch mit rund 1250 fm^3 deutlich kleiner als das aus Pioninterferrometrie stammende Ergebnis von 1940 fm^3 [13].

Mit einer *excluded volume* Korrektur von R(B)=R(M)=0.3 fm lassen sich die Daten ebenfalls erstaunlich gut beschreiben: Das Modellvolumen gleicht mit 1927 fm^3 fast exakt dem experimentellen Wert. Die quadratische Abweichung von 1.38 und das χ^2 von 40.4 bei den Modellparametern T=170 MeV und μ_B=185 MeV ist mit dem Ergebnis bei kleinerem Meson-Eigenvolumen vergleichbar. Jedoch paßt die modellierte Piondichte von 0.18/fm^3 nur schlecht zum experimentellen Wert von 0.27/fm^3. Die ermittelte Temperatur und das baryochemische Potential passen auch gut zu den Werten aus dem Modell von P. Braun-Munzinger, J. Stachel, H. Wessels und N. Xu.

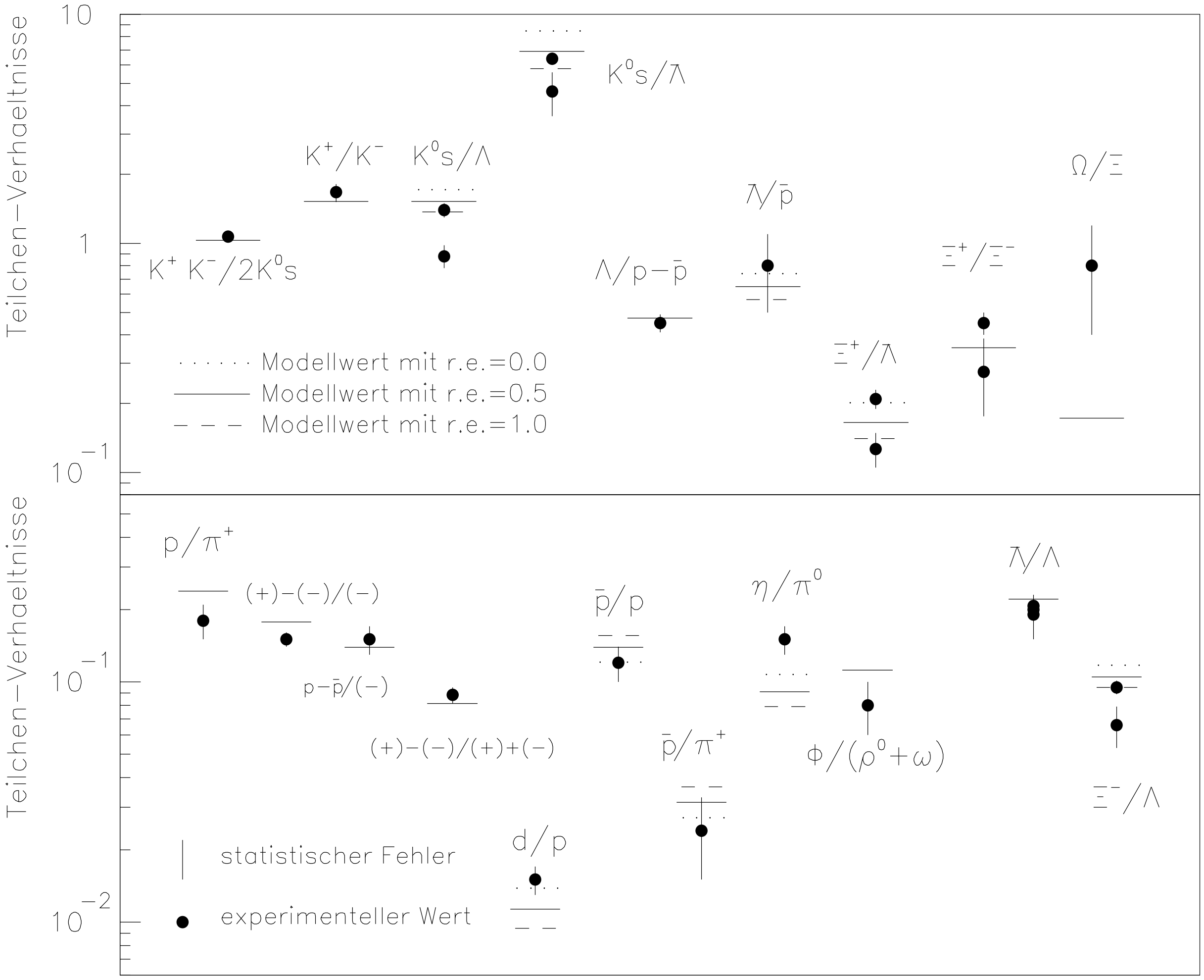

Abbildung 3.13 **Hadronverhältnisse bei S+Pb(Au) Kollisionen am SPS:** Experimentelle Daten im Vergleich mit Modelldaten bei T=170 MeV, μ_B=185 MeV, μ_S=48.24 MeV, μ_{I_3}=-5.78 MeV, R(B)=R(M)=0.3 fm

Die gute Übereinstimmung der Modelldaten mit den experimentellen Werten in den Schaubildern 3.12, 3.13 und der Tabelle 3.6 legt einen hohen Grad an Thermalisierung nahe. Die größten Abweichungen finden sich beim p/π^+ Verhältnis, das 30% kleiner ist als erwartet und beim Ω/Ξ Verhältnis, das nur 1/4 des experimentell ermittelten Wertes beträgt. Dies kann vielleicht als Hinweis darauf gewertet werden, daß die s-Quarks tatsächlich nicht im gleichen Maß wie die u und d-Quarks chemisches und thermisches Gleichgewicht ausbilden. Andererseits ist der Meßfehler derart groß, daß auch nur eine statistische Fluktuation vorliegen kann. Außerdem ist das Verhältnis lediglich bei *midrapidity* gemessen und kann daher durchaus von dem über Rapidität integrierten Wert abweichen. Weiterhin zeigen die beiden Schaubilder die teilweise erheblichen Auswirkungen, die die schwache Zerfälle der Λ, Σ und Ξ auf Verhältnisse, die Pionen, Protonen und Λ involvieren, haben.

Wie die beiden Schaubilder 3.14 und 3.15 zeigen, ist die Bestimmung der "besten"

Parameter jedoch nicht völlig eindeutig. Die quadratische Abweichung und χ^2 sind in grober Schätzung über einen Bereich von T=180±5 MeV und μ_B=200±10 MeV relativ ähnlich. Im Vergleich ist die Auswirkung einer anderen *excluded volume* Korrektur drastischer als die Verwendung leicht geänderter Parameter.

Die Modellergebnisse zeigen bei größeren *excluded volume* Korrekturen keinerlei Übereinstimmung mehr mit den Daten. Bei R(B)=0.5 fm und R(M)=0.25 fm verdreißigfacht sich das χ^2 und verfünffacht sich die quadratische Abweichung. Wählt man R(B)=0.8 fm und R(M)=0.62 fm, so steigt χ^2 auf das 40fache des Wertes bei kleinen Eigenvolumina und die quadratische Abweichung nimmt den siebenfachen Wert an. Die knapp 2000 Modellteilchen nehmen zusammen ein Eigenvolumen von gut 10000 fm^3 ein, welches das Fünffache des experimentell gemessenen Feuerballvolumens ist. Die modellierte Piondichte ist mit $0.06/fm^3$ um einen Faktor 4.5 zu klein.

	Experiment		Modelldaten	
			Modell 1	Modell 2
p/π^+	NA44, NA35	0.18(3)	0.239	0.245
$(+)-(-)/(-)$	NA35	0.15(1)	0.18	0.18
$p-\overline{p}/(-)$	NA35	0.15(2)	0.14	0.14
$(+)-(-)/(+)+(-)$	EMU05	0.088(7)	0.081	0.084
d/p	NA 44	0.015(2)	0.011	0.014
$\overline{p}/p$	NA44	0.12(2)	0.14	0.13
$\overline{p}/\pi^-$	NA44, NA35	0.024(9)	0.032	0.031
η/π^0	WA80	0.15(2)	0.09	0.09
$\phi/(\rho^0+\omega)$	Helios3	0.080(20)	0.11	0.11
$(K^++K^-)/2K^0_s$	WA85	1.07(3)	1.03	1.03
K^+/K^-	WA85	1.67(15)	1.53	1.56
K^0_s/Λ	WA85	1.4(1)	1.53	1.48
	NA35	0.88(10)	1.37 (a)	1.33 (a)
$K^0_s/\overline{\Lambda}$	WA85	6.4(4)	6.9	6.7
	NA35	4.6(10)	5.8 (a)	5.6 (a)
$\Lambda/(p-\overline{p})$	NA35	0.45(4)	0.47	0.47
$\overline{\Lambda}/\overline{p}$	NA35	0.80(30)	0.65	0.67
$\overline{\Lambda}/\Lambda$	WA85	0.20(1)	0.22	0.22
	NA36	0.207(12)		
	NA35	0.19(4)	0.20 (b)	0.20 (b)
Ξ^-/Λ	WA85	0.095(6)	0.105	0.105
	NA36	0.066(13)	0.095 (a)	0.095 (a)
$\Xi^+/\overline{\Lambda}$	WA85	0.21(2)	0.17	0.17
	NA36	0.127(22)	0.14 (a)	0.14 (a)
Ξ^+/Ξ^-	WA85	0.45(5)	0.35	0.36
	NA36	0.276(108)		
Ω/Ξ	WA85	0.8(4)	0.17	0.19

Tabelle 3.6 S+Pb(Au) Teilchenverhältnisse im Vergleich mit dem erweiterten Modell:
Modell 1: R(B)=R(M)=0.3 fm, T=170 MeV, μ_B=185 MeV
Modell 2: R(B)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm, T=180 MeV, μ_B=200 MeV
(a) : reconstruction efficiency=1
(b) : reconstruction efficiency=0
sonst : reconstruction efficiency=0.5
(-) = neg. geladene Teilchen, (+) = pos. geladene Teilchen.
Referenzen der Daten in [13].

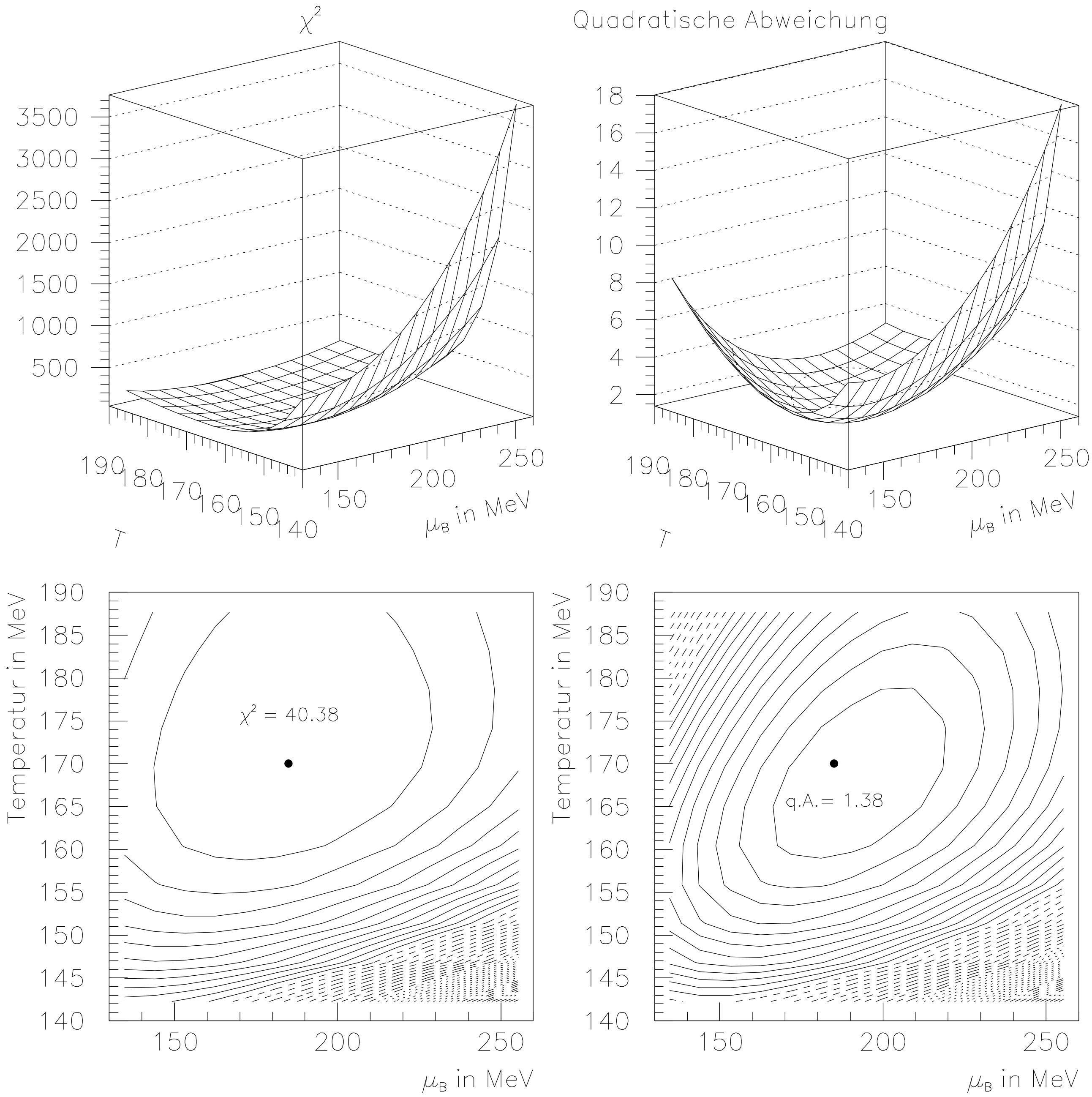

Abbildung 3.14 Quadratische Abweichung und χ^2 für S+Pb Daten im Vergleich mit dem erweiterten Modell mit R(B)=R(M)=0.3 fm. Die innersten Höhenlinien liegen ungefähr bei χ^2=115 und einer quadratischen Abweichung von 1.7.

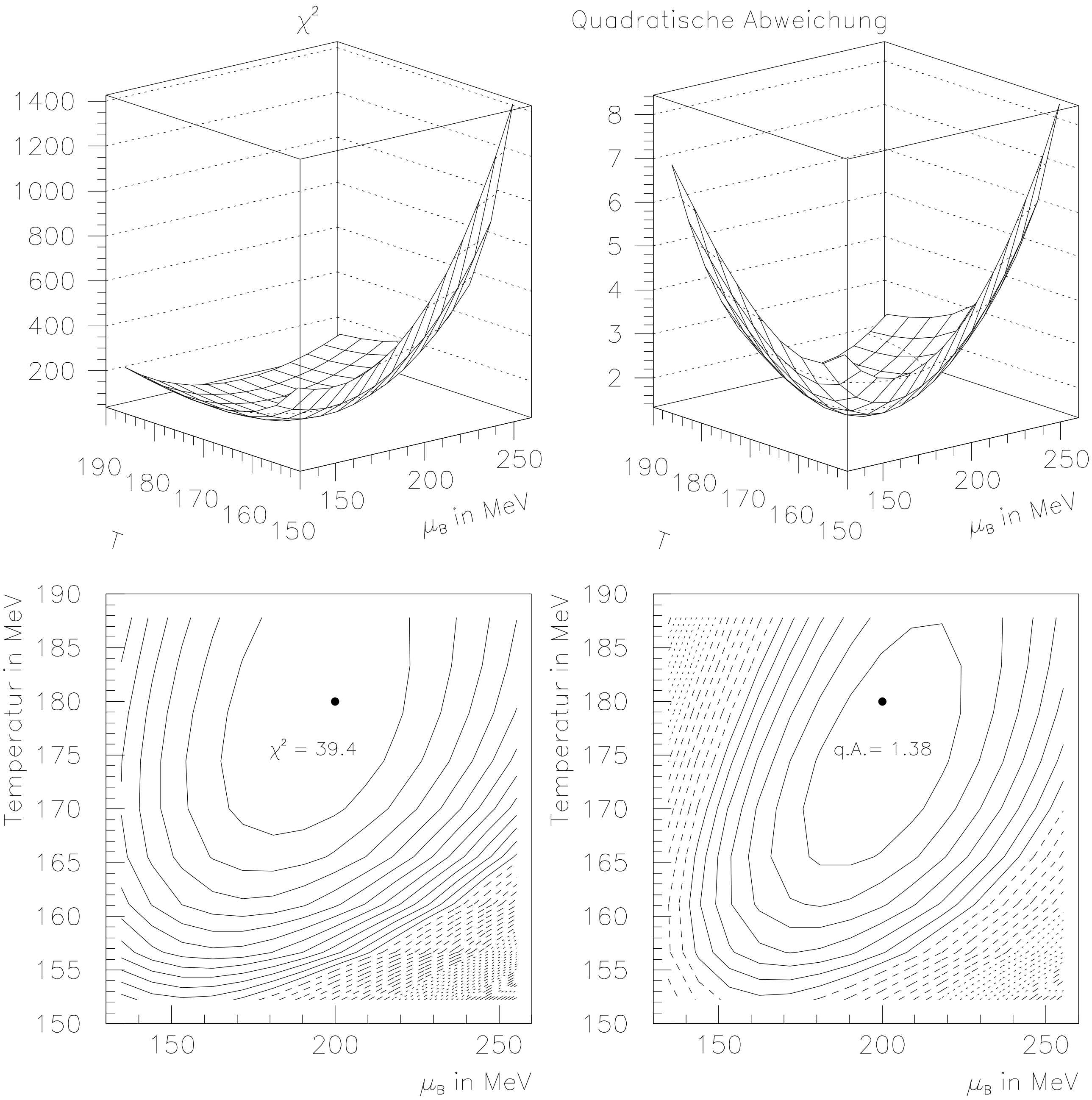

Abbildung 3.15 Quadratische Abweichung und χ^2 für S+Pb Daten im Vergleich mit dem erweiterten Modell mit R(B)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm.

3.8 Verhältnisse am SPS - Pb+Pb Daten

Analysiert wurden 18 verschiedene Teilchenverhältnisse mit insgesamt 25 experimentellen Datenpunkten aus den drei Experimenten NA44, NA49 und WA97 (siehe Tabelle 3.7). Ein erster Durchgang zur Minimierung von χ^2 ergab bei T=170 MeV und μ_B=280 MeV das erschreckend hohe Ergebnis von χ^2=166.0 für 23 Verhältnisse. Zwei Drittel dieses hohen Wertes stammte jedoch von einem einzigen Verhältnis, dem $2\phi/(\pi^+ + \pi^-)$. Offenbar ist es unmöglich, den experimentellen Wert von $2\phi/(\pi^+ + \pi^-) =$ 9.1(1.0) 10^{-3} auch nur annähernd innerhalb der Fehlergrenzen zu reproduzieren. Daher wurde in der folgenden Routine zur Minimierung von χ^2 auf dieses Verhältnis verzichtet.

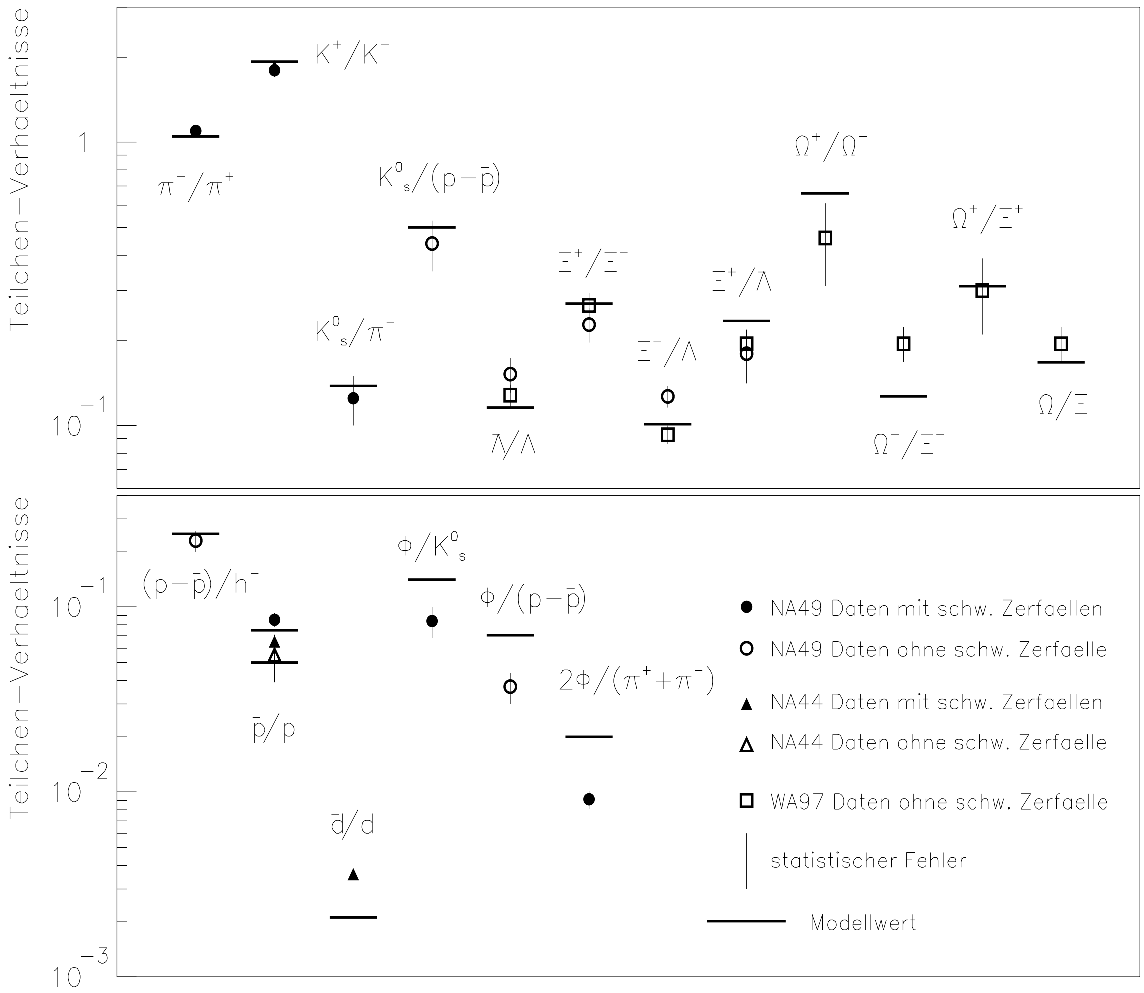

Abbildung 3.16 Experimentelle Pb+Pb Daten im vergleich mit dem erweiterten Modell bei R(B)=R(M)=0.3 fm, T=170 MeV, μ_B=280 MeV, μ_S=77.93 MeV, μ_{I_3}=-5.52 MeV.

Trotz der unterschiedlichen Korrekturen auf schwache Zerfälle bei den verschiedenen Experimenten konnten alle Werte bis auf das unkorrigierte $\overline{p}/p = 0.085$ Verhältnis mit einem Parametersatz modelliert werden: Es wurden im erweiterten Modell keine Protonen aus schwachen Zerfällen aufgenommen und keine Λ aus den Zerfällen der Ξ oder der $\Sigma^{\pm}$. Die schwachen Zerfälle der Ω in Ξ und Λ wurden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 berücksichtigt, ebenso alle Pionen und Kaonen, die aus schwachen Zerfällen stammen. Lagen Daten mehrerer Experimente für das gleiche Verhältnis vor, so wurden sie unabhängig voneinander in die χ^2-Mimimierungsroutine aufgenommen. Da sich manche dieser Werte leicht widersprechen, erklärt dies zum Teil den hohen Wert des gesamten χ^2.

So ergab sich für eine Eigenvolumenkorrektur von R(B)=R(M)=0.3 fm das beste Ergebnis bei T=175 MeV und μ_B=270 MeV mit einem χ^2 von 60.3 und einer quadratischen Abweichung von 1.81. Allerdings kommt hier ein $\chi^2_{2\phi/(\pi^++\pi^-)}$ von 116 zusätzlich dazu. Der Radius des kugelförmig angenommenen Feuerballs beim *freeze-out* liegt bei 8.35 fm. Das Modell erzeugt thermisch rund 1250 Hadronen, die damit knapp 6 % des Modellvolumens einnehmen. Zum Vergleich: In [34] wurde ein geometrischer transversaler Feuerballradius von 6.5 fm ermittelt. Der longitudinale Radius ist nicht gemessen; er dürfte aber erheblich größer sein.

Betrachtet man Schaubild 3.16, so scheinen Modellwerte und experimentelle Daten bis auf wenige Ausnahmen gut übereinzustimmen. Das Verhältnis Ω^-/Ξ^- weicht wie bei den beiden anderen Kollisionssystemen merkbar vom experimentellen Wert ab und trägt ein $\chi^2_{\Omega^-/\Xi^-}$ von 5.8 bei. Da auch zwei weitere Verhältnisse, die Ω involvieren, die Fehlergrenzen überschreiten, könnte dies als zaghafter Hinweis auf fehlendes chemisches Gleichgewicht zwischen Hadronen mit vielen s-Quarks gewertet werden.

Das modellierte $\overline{d}/d$ Verhältnis ist zwar auch erheblich vom experimentellen Wert entfernt, doch ist sein Wert von 3.6 10^{-3} nur *"roughly estimated"* [26], so daß seine Aussagekraft gering ist. Beunruhigend ist hingegen die Abweichung der unteren drei Modellverhältnisse, die ein ϕ involvieren, von den Daten. Die Analyse des ϕ im Experiment NA49 ist jedoch noch nicht abgeschlossen, und es bleibt zu hoffen, daß sich der Wert noch ändert. Eine Gesamtanzahl von rund 10 ϕ statt dem derzeitigen Wert von 5.7(0.7) würde alle drei Verhältnisse mit den modellierten in Einklang bringen.

Wählt man R(B)=0.3 fm und R(M)=0.25 fm, so ist die Übereinstimmung zwischen Modell und Daten nicht sehr viel schlechter. Bei T=185 MeV und μ_B=290 MeV liegt χ^2 bei 67.9 und die quadratische Abweichung bei 2.13. Das Schaubild, das die Modellverhältnisse mit den Daten vergleicht, unterscheidet sich kaum sichtbar von Schaubild 3.17. Der modellierte Feuerballradius ist mit 7.33 fm kleiner, und die thermisch produzierte Hadronzahl liegt bei nur 1200 Teilchen.

Bei R(B)=0.8 fm und R(M)=0.62 fm läßt sich keine Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment finden. Die beste Temperatur sinkt auf 150 Mev und das beste μ_B steigt auf 380 MeV. Damit liegt der Radius bei 15.9 fm, die quadratische Abweichung bei 7.06 und das χ^2 ist mit 328.4 nicht mehr vertretbar.

	Modelldaten	Exp. Daten	Experiment	y-Akzeptanz	Referenz
$\overline{\mathrm{p}}/\mathrm{p}$	0.050	0.055(16) (a)	NA44	2.3-2.9	[25]
	0.075	0.065(4) (b)	NA44	2.3-2.9	[25]
	0.075	0.085(8) (b)	NA49	2.5-3.3	[27]
π^-/π^+	1.05	1.1(?)	NA49	ganz	[28]
$\overline{\mathrm{d}}/\mathrm{d}$	2.09 10^{-3}	3.6(?) 10^{-3}	NA44	midrapidity	[26]
$(\mathrm{p}-\overline{\mathrm{p}})/\mathrm{h}^-$	0.248	0.228(29) (a)	NA49	0.2-5.8	[29]
$\mathrm{K}^+/\mathrm{K}^-$	1.93	1.85(9)	NA44	2.4-3.5	[25]
	1.93	1.8(1)	NA49	ganz	[29]
K^0_s/π^-	0.138	0.125(25)	NA49	ganz	[30]
$2\phi/(\pi^++\pi^-)$	19.9 10^{-3}	9.1(10) 10^{-3}	NA49	ganz	[31]
K^0_s/ϕ	7.1	11.9(23)	NA49	ganz	[29]
$\mathrm{K}^0_s/(\mathrm{p}-\overline{\mathrm{p}})$	0.50	0.44(9) (a)	NA49	0.2-5.8	[29]
$\phi/(\mathrm{p}-\overline{\mathrm{p}})$	0.070	0.037(7) (a)	NA49	0.2-5.8	[29]
$\overline{\Lambda}/\Lambda$	0.116	0.152(21) (c)	NA49	3.1-3.85	[32]
	0.116	0.128(12) (c)	WA97	1.9-3.9	[33]
Ξ^+/Ξ^-	0.270	0.227(33) (c)	NA49	3.1-3.85	[32]
	0.270	0.266(28) (c)	WA97	1.9-3.9	[33]
Ξ^-/Λ	0.101	0.127(11) (c)	NA49	3.1-3.85	[32]
	0.101	0.093(7) (c)	WA97	1.9-3.9	[33]
$\Xi^+/\overline{\Lambda}$	0.235	0.180(39) (c)	NA49	3.1-3.85	[32]
	0.235	0.195 (23) (c)	WA97	1.9-3.9	[33]
$\overline{\Omega}^+/\Omega$	0.66	0.46(15)	WA97	1.9-3.9	[33]
Ω^-/Ξ^-	0.127	0.195(28) (c)	WA97	1.9-3.9	[33]
$\overline{\Omega}^+/\Xi^+$	0.31	0.30(9) (c)	WA97	1.9-3.9	[33]
$\frac{\overline{\Omega}^++\Omega^-}{\Xi^++\Xi^-}$	0.167	0.195(28) (c)	WA97	1.9-3.9	[33]

Tabelle 3.7 Pb+Pb Teilchenverhältnisse im Vergleich mit dem erweiterten Modell:
R(B)=R(M)=0.3 fm, T=170 MeV, μ_B=280 MeV,
μ_S=77.93 MeV, μ_{I_3}=-5.52 MeV
(a) : ohne schwache Zerfälle
(b) : mit allen schwachen Zerfällen
(c) : schwache Zerfälle der Λ, Ξ und $\Sigma^\pm$
durch entsprechende *cuts* vernachlässigbar.

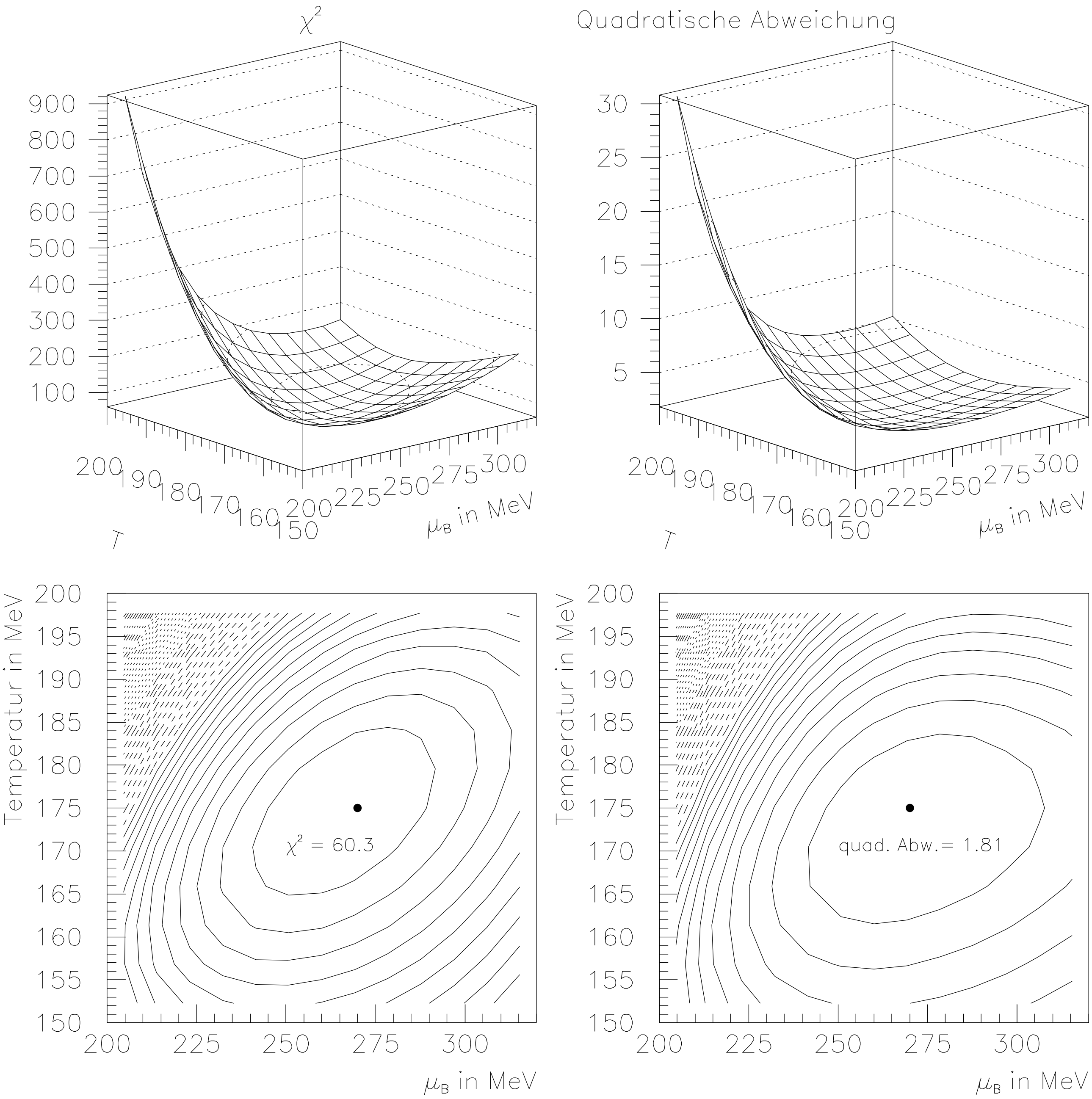

Abbildung 3.17 **Quadratische Abweichung und χ^2 für Pb+Pb Daten im Vergleich mit dem erweiterten Modell mit R(B)=R(M)=0.3 fm.** Die innerste "Höhenlinie" liegt ungefähr bei χ^2=78.0. Damit ist hier die T - μ_B Ebene deutlich flacher, als in den beiden anderen betrachteten Systemen. Die Ausfriertemperatur läßt sich nur innerhalb eines Bereiches von ± 20 MeV in μ_B und ± 10 MeV in T angeben.

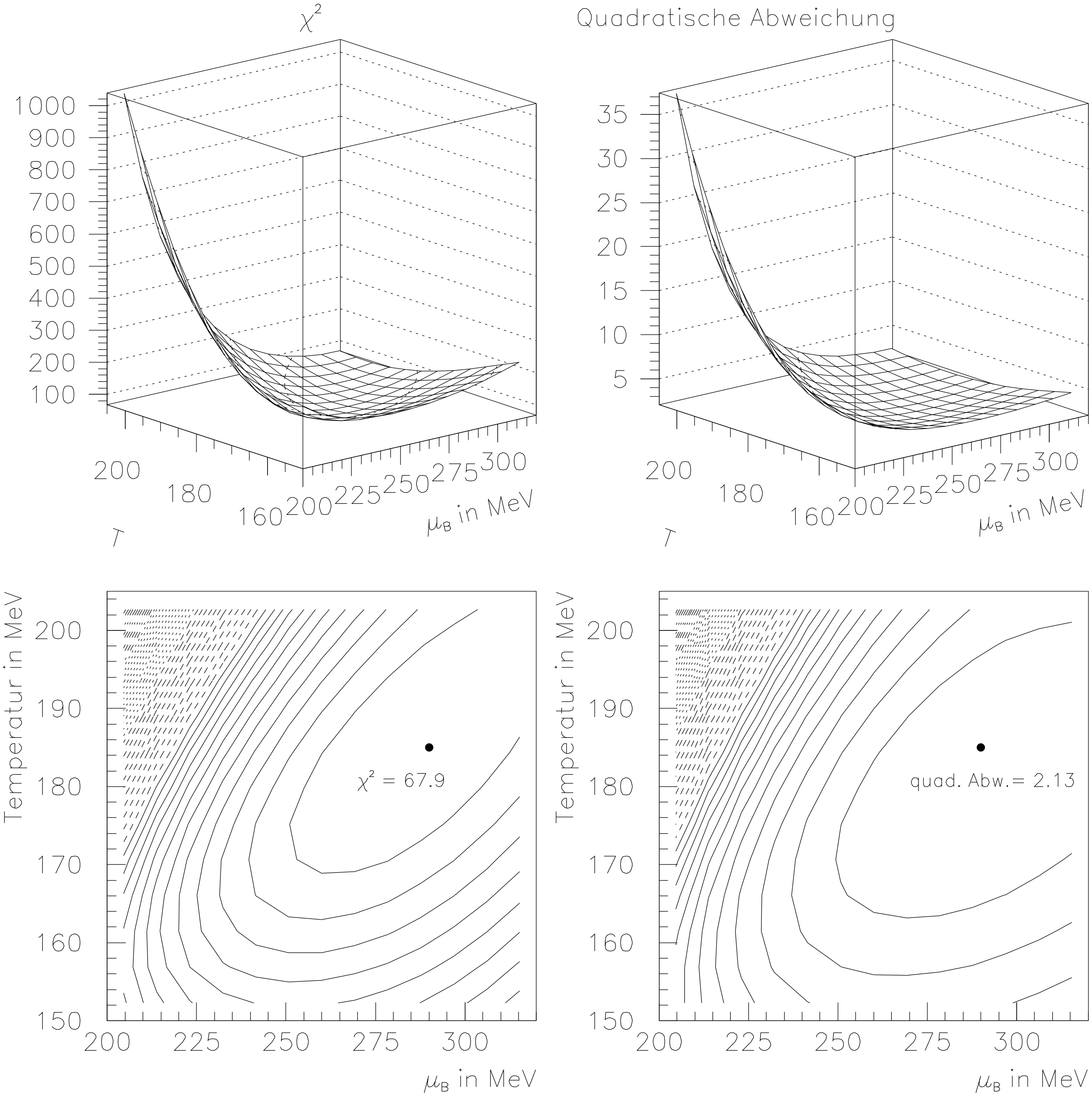

Abbildung 3.18 Quadratische Abweichung und χ^2 für Pb+Pb Daten im Vergleich mit dem erweiterten Modell mit R(B)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm.

3.9 Zusammenfassung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde untersucht, ob die experimentellen Daten von drei unterschiedlichen Schwerionen-Kollisionssystemen mit dem gleichen, einfachen statistischen Modell reproduziert werden können. Es hat sich gezeigt, daß die zwei Parameter T und μ_B ausreichen, um bis zu 20 Teilchenverhältnisse simultan in guter Übereinstimmung modellieren zu können. Selbst die wenigen Fälle, in denen die experimentellen und modellierten Teilchenverhältnisse nicht innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen, verlieren an Bedeutung, wenn man bedenkt, daß alle Fehlergrenzen, die in den vorangegangenen Kapiteln zitiert wurden, rein statistischer Natur sind. Die systematischen Fehler sind meist deutlich höher; sie liegen z.B. unter 20 % bei NA44 [25]. Somit scheint sich zum Zeitpunkt des chemischen *freeze-outs* bei allen betrachteten Schwerionenkollisionen ein Gleichgewicht eingestellt zu haben. Dies ist die Voraussetzung dafür, daß sich der Feuerball auch schon zu einem früheren Zeitpunkt im Gleichgewicht befunden hat.

Zuletzt kann man den Parametersatz (T, μ_B), der die Teilchenverhältnisse der drei betrachteten Kollisionssysteme am besten beschreibt, als Punkt in das Phasendiagramm eintragen. Man erkennt, wo der chemische *freeze-out* stattgefunden hat und kann damit den Verlauf der Kollision als Trajektorie im Phasenraum abschätzen (vgl. Abb. 3.19).

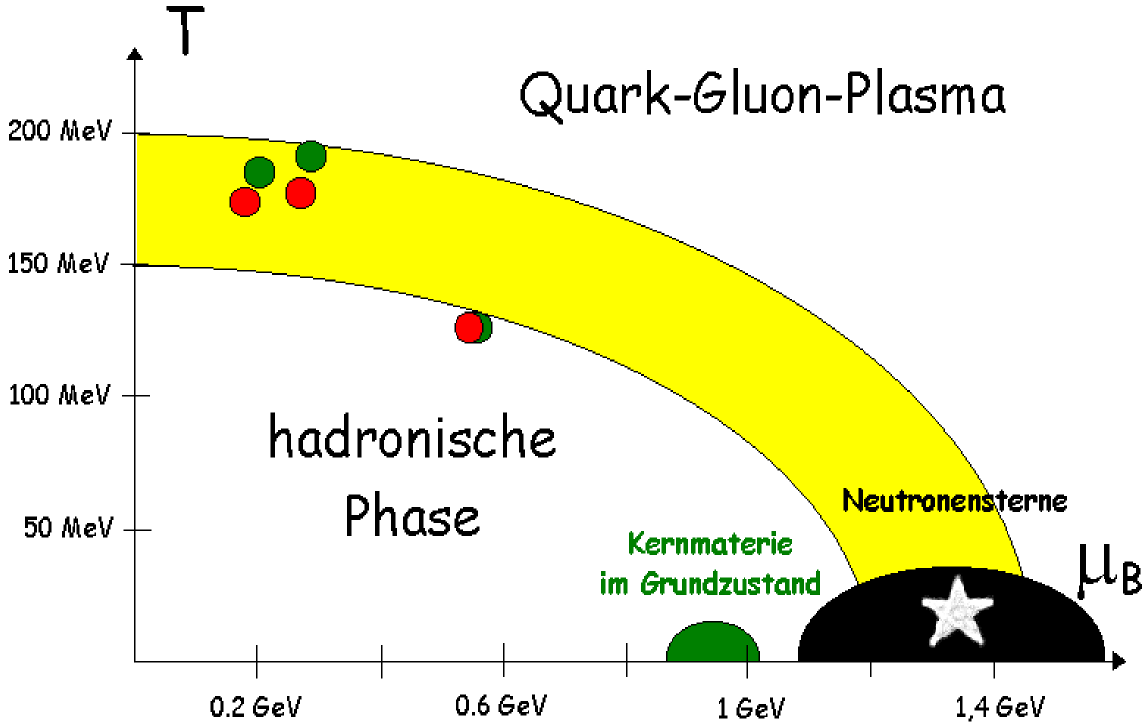

Abbildung 3.19 Phasendiagramm: Die roten und grünen Punkte entsprechen dem *freeze-out* Punkt der drei verschiedenen Kollisionssysteme mit zwei verschiedenen *excluded volume* Korrekturen. Rot: R(B)=R(M)=0.3 fm, Grün: R(B)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm.

Der *freeze-out* nach AGS-Kollisionen findet direkt unterhalb der Phasengrenze statt, während die SPS-Kollisionssysteme bereits im Bereich der Phasengrenze ausfrieren. Da sich das System zu diesem Zeitpunkt in allen drei Fällen im chemischen und thermischen Gleichgewicht befindet, ist es sehr wahrscheinlich, daß der Feuerball zu einem früheren Zeitpunkt tatsächlich ein Quark-Gluon Plasma ausbilden konnte.

Interessant ist die Tatsache, daß sich die gute Übereinstimmung zwischen erweitertem Modell und Experiment nur mit sehr kleinen *excluded volume* Korrekturen erzielen läßt. Nicht umsonst konnten die Teilchenverhältnisse über Jahre hinweg durch Modelle ohne bzw. mit sich herauskürzenden *excluded volume* Korrekturen erklärt werden. Die Realität ist offenbar nicht weit entfernt vom Szenario des idealen Gases. Dies läßt sich im Rahmen der *excluded volume* Korrektur auch dadurch erreichen, daß sich Meson- und Baryonvolumen nur wenig unterscheiden.

Somit bleiben Fragen offen: Haben Baryonen und Mesonen wirklich annähernd das gleiche Eigenvolumen? Oder ist der Ansatz, die starke Wechselwirkung im Resonanzgas in Form eines Van-der-Waals-Gases mit *hard core* Repulsion einzubauen, zu vereinfacht? Und wie sensibel reagiert das Modell auf leichte Störungen des thermischen und chemischen Gleichgewichts? Kann denn der robuste Formalismus der statistischen Physik wirklich lokale oder temporäre Schwankungen detektieren, solange sie nicht zu groß werden?

Einer der bestechenden Vorteile des statistischen Modells liegt in seiner Einfachheit: Kein anderer Formalismus ist in der Lage, derart komplexe Abläufe wie die einer Schwerionenkollision mit so grundlegenden und einfach umzusetzenden Mechanismen zu beschreiben. Andererseits liegt in dieser Einfachheit auch die Beschränkung des statischen Formalismuses: Er kann selbstverständlich keinerlei Zeitentwicklung reproduzieren. Doch in der Realität frieren die Hadronen nicht alle simultan bei einem festen Volumen im ganzen Feuerball gleichzeitig und bei der gleichen Temperatur aus. Unterschiedliche Teilchensorten lösen sich aufgrund unterschiedlicher Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen Teilchendichten, genauso wie auch äußere Bereiche des Feuerballs früher ausfrieren als weiter innen liegende.

	R(B)=0.3 fm, R(B)=0.30 fm	R(M)=0.3 fm, R(M)=0.25 fm
AGS Si+Au(Pb)	$\chi^2/(f-1)$=6.06 T=125 MeV, μ_B=540 MeV	$\chi^2/(f-1)$=6.74 T=125 MeV, μ_B=540 MeV
SPS S+Pb(Au)	$\chi^2/(f-1)$=2.13 T=170 MeV, μ_B=185 MeV	$\chi^2/(f-1)$=2.07 T=180 MeV, μ_B=200 MeV
SPS Pb+Pb	$\chi^2/(f-1)$=2.62 T=175 MeV, μ_B=270 MeV	$\chi^2/(f-1)$=2.95 T=185 MeV, μ_B=290 MeV

Tabelle 3.8 Eine Zusammenstellung aller Ausfrierparameter sowie des reduzierten χ^2 der drei untersuchten Systeme.

4 Spektren - Theorie

Alle in den vorangehenden Kapiteln vorgestellten experimentellen Daten waren über den gesamten Phasenraum integriert. Eine andere Art der Darstellung der Meßergebnisse ist in Form von Verteilungen möglich, zum Beispiel in Form einer Aufschlüsselung nach dem Impuls, $\mathrm{d}^3N/\mathrm{d}p^3$. In diesem Kapitel wird der Formalismus zur Beschreibung derartiger Spektren entwickelt, wobei alle gemessenen Effekte wie Resonanzzerfälle oder die Expansion des Feuerballs berücksichtigt werden.

4.1 Kinematische Variable

Mittelt man über die verschiedenen Datensätze, so sind die Impulsverteilungen unabhängig vom Rotationswinkel um die Achse des Schwerionenstrahls. Es bietet sich daher an, die beiden Impulskomponenten senkrecht zum Strahl zusammenzufassen zum Transversalimpuls

$$p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}. \tag{4.1}$$

In Analogie definiert man die transversale Masse als

$$m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}. \tag{4.2}$$

Sowohl p_t als auch m_t sind lorentzinvariante Größen beim Wechsel des Bezugsystems vom Laborsystem hin zum Schwerpunktsystem. Nicht invariant ist jedoch die Variable p_z, die gerade in Richtung des "Lorentz-Boosts" orientiert ist. Aus diesem Grund ersetzt man die Variable p_z durch die Rapidität

$$y = \operatorname{arc\,tanh} v_z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right), \tag{4.3}$$

die ein Maß für die Geschwindigkeit in Strahlrichtung darstellt. Vergleicht man eine Lorenztransformation mit einer Rotation im euklidischen Raum, so entspricht die

Rapidität y dem Rotationswinkel. Wie Drehwinkel addieren sich auch die Rapiditäten beim mehrmaligen Wechsel des Bezugssystems. So ändert sich bei einer Transformation die Lage der Verteilung, nicht aber ihre Kurvenform (siehe Schaubild 4.1).

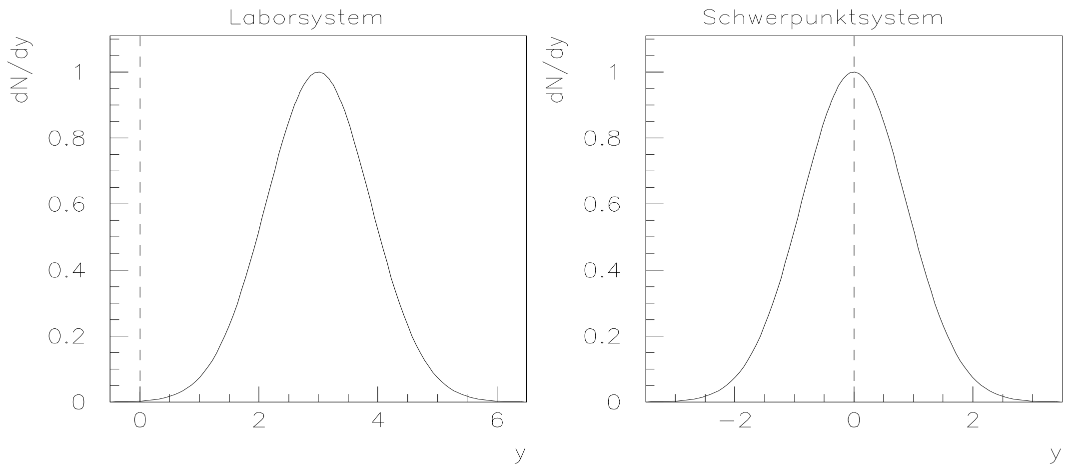

Abbildung 4.1 Durch Lorentztransformation ändert sich die Lage der Rapiditätsverteilung, nicht jedoch ihre Form.

4.2 Thermische Verteilung

Eine isotrop Teilchen emittierende, thermische Quelle im Schwerpunktsystem zeigt folgende Impulsverteilung (vgl. Gl. 1.11 und [22]):

$$\frac{\mathrm{d}^3 N_i}{\mathrm{d}p^3} = \frac{g_i V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \, \frac{1}{\exp[\beta(E_i - \mu_i)] \pm 1} \tag{4.4}$$

Ausgedrückt in den kinematischen Variablen m_t und y:

$$\frac{\mathrm{d}^3 N_i}{\mathrm{d}m_t^2 \, \mathrm{d}y} = \frac{g_i V}{8\pi^2 \hbar^3} \, \frac{m_t \cosh y}{\exp[\beta(m_t \cosh y - \mu_i)] \pm 1} \tag{4.5}$$

Durch den Übergang von der Quantenstatistik zur Boltzmann-Statistik vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\frac{\mathrm{d}^3 N_i}{\mathrm{d}m_t^2 \, \mathrm{d}y} = \frac{g_i V}{8\pi^2 \hbar^3} \, e^{\beta \mu_i} \, m_t \cosh y \, e^{-\beta m_t \cosh y}. \tag{4.6}$$

Nun läßt sich diese Verteilung über den Transversalimpuls integrieren und man erhält

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}y} \propto e^{-\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right), \tag{4.7}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \beta m \cosh y. \tag{4.8}$$

Abgesehen von den Ausläufern der Kurve bei sehr großem und kleinem y gleicht diese Rapiditätsverteilung einer Gausskurve.

Ebenso kann die Boltzmann-Verteilung (Gl. 4.6) über die Rapidität integriert werden, und man erhält ein vereinfachtes transversales Massenspektrum der Form

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{m_t \,\mathrm{d}m_t} = \frac{g_i V}{2\pi^2\hbar^3} \, e^{\beta \mu_i} \; m_t \; \mathrm{K}_1(\beta m_T), \tag{4.9}$$

mit K_1 als modifizierter Besselfunktion. Sie verhält sich für große m_t wie eine abnehmende Exponentialfunktion und vereinfacht damit die Verteilung zu

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{m_t \,\mathrm{d}m_t} \xrightarrow{m_t \ll \beta} \sqrt{m_t}\, e^{-\beta m_t}. \tag{4.10}$$

4.3 Resonanzzerfälle

Wie Tabelle 3.1 zeigt, sind viele Teilchendichten - und damit auch ihre Transversalimpulsspektren - nicht rein thermischen Ursprungs, sondern erheblich durch Zerfälle kontaminiert. In diesem Fall prägt die Impulsverteilung der Resonanz auch die Impulsverteilung ihres Zerfallsproduktes, und Formel 4.5 kann nicht länger angwandt werden. Statt dessen wird, der Herleitung in [22] folgend, aus der thermischen Mutterverteilung die Tochterverteilung berechnet.

Ausgangspunkt ist das Ruhesystem (*) der zerfallenden Resonanz. Hier betrachtet man die Zerfallswahrscheinlichkeit, mit der die Mutterresonanz (Subscript R) in eine Tochter (Subscript 1) zerfällt, mit einem Impuls und einer Energie von

$$|p_1^*| = \frac{1}{2m_R}\sqrt{[(m_R+m_1)^2 - W^2][(m_R-m_1)^2 - W^2]} \tag{4.11}$$

$$E_1^* = \sqrt{m_1^2 + p_1^{*2}} = \frac{1}{2m_R}(m_R^2 + m_1^2 - W^2) \tag{4.12}$$

mit $W^2 = (\sum_{i=2}^n p_i^\nu)^2$ als invariante Masse aller restlichen Zerfallsprodukte.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit, die von p_1 und E_1 abhängt, wird nun in das Ruhesystem des Feuerballs transformiert, mit der Impulsverteilung der Resonanz multipliziert und über die kinematischen Variablen y_R und m_{tR} der Resonanz integriert. Man erhält:

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}m_{t1}^2} = \frac{g_i V}{4\pi^2\hbar^3} \int\limits_{(\sum_{i=2}^n m_i)^2}^{(m_R-m_1)^2} \mathrm{d}W^2\, g(W^2) \int\limits_{y_R^{(-)}}^{y_R^{(+)}} \frac{\mathrm{d}y_R}{\sqrt{m_{t1}^2\cosh^2(y_1-y_R)-p_{t1}^2}} \cdot$$

$$\int\limits_{m_{tR}^{2\,(-)}}^{m_{tR}^{2\,(+)}} \frac{m_R\,\mathrm{d}m_{tR}^2}{\sqrt{(m_{tR}^{(+)}-m_{tR})(m_{tR}-m_{tR}^{(-)})}}\, \frac{\mathrm{d}N_R}{\mathrm{d}y_R\,\mathrm{d}m_{tR}^2} \tag{4.13}$$

$$\text{mit} \quad m_{tR}^{(\pm)} = \frac{m_R\left[E_1^* m_{tR}\cosh(y_1-y_R) \pm p_{t1}\sqrt{E_1^{*2}+p_{t1}^2-m_{t1}^2\cosh^2(y_1-y_R)}\right]}{m_{t1}^2\cosh^2(y_1-y_R)-p_{t1}^2}, \tag{4.14}$$

$$y_R^{(\pm)} = y_1 \pm \ln\left(\frac{\sqrt{E_1^{*2}+p_{t1}^2}+|p_1^*|}{m_{t1}}\right) \tag{4.15}$$

und $g(W^2)$ als Phasenraumfunktion, die aus der Integration über den Phasenraum der restlichen Zerfallsprodukte sowie vom Matrix-Element des Zerfalls im Ruhesystem der Resonanz stammt. Ihre Normierung ist dadurch festgelegt, daß die gesamte integrierte Zerfallswahrscheinlichkeit im Ruhesystem der Resonanz gleich dem Verzweigungsverhältnis b ist:

$$\int g(W^2)\,\mathrm{d}W^2 \int \mathrm{d}p_{z1}^* \int \mathrm{d}\phi^* = b. \tag{4.16}$$

Betrachten wir nun diese Formel für den Fall eines Zweikörperzerfalls. Hier ist die invariante Masse eindeutig festgelegt durch $W^2 = m_2^2 = m_R^2 - m_1^2$ und der Phasenraumfaktor wird proportional zur Deltafunktion $\delta(W^2 - m_2^2)$.

Unter Berücksichtigung der Normierung (Gl. 4.16) ergibt sich:

$$g(W^2) = \frac{b}{2\pi p_1^*}\delta(W^2 - m_2^2) \tag{4.17}$$

Komplizierter ist der Phasenraumfaktor für den Dreikörperzerfall. Nach [22] ist er gegeben durch

$$g(W^2) = \frac{m_R b}{2\pi Q(m_R, m_1, m_2, m_3)} \frac{\sqrt{W^2-(m_2+m_3)^2}\sqrt{W^2-(m_2-m_3)^2}}{W^2}, \tag{4.18}$$

$$\text{mit} \quad Q(m_R, m_1, m_2, m_3) = \int_c^b \frac{\mathrm{d}x}{x}\sqrt{(a-x)}\sqrt{(b-x)}\sqrt{(x-c)}\sqrt{(x-d)} \tag{4.19}$$

und $a = (m_R+m_1)^2$, $b = (m_R-m_1)^2$, $c = (m_2+m_3)^2$ und $d = (m_2-m_3)^2$.

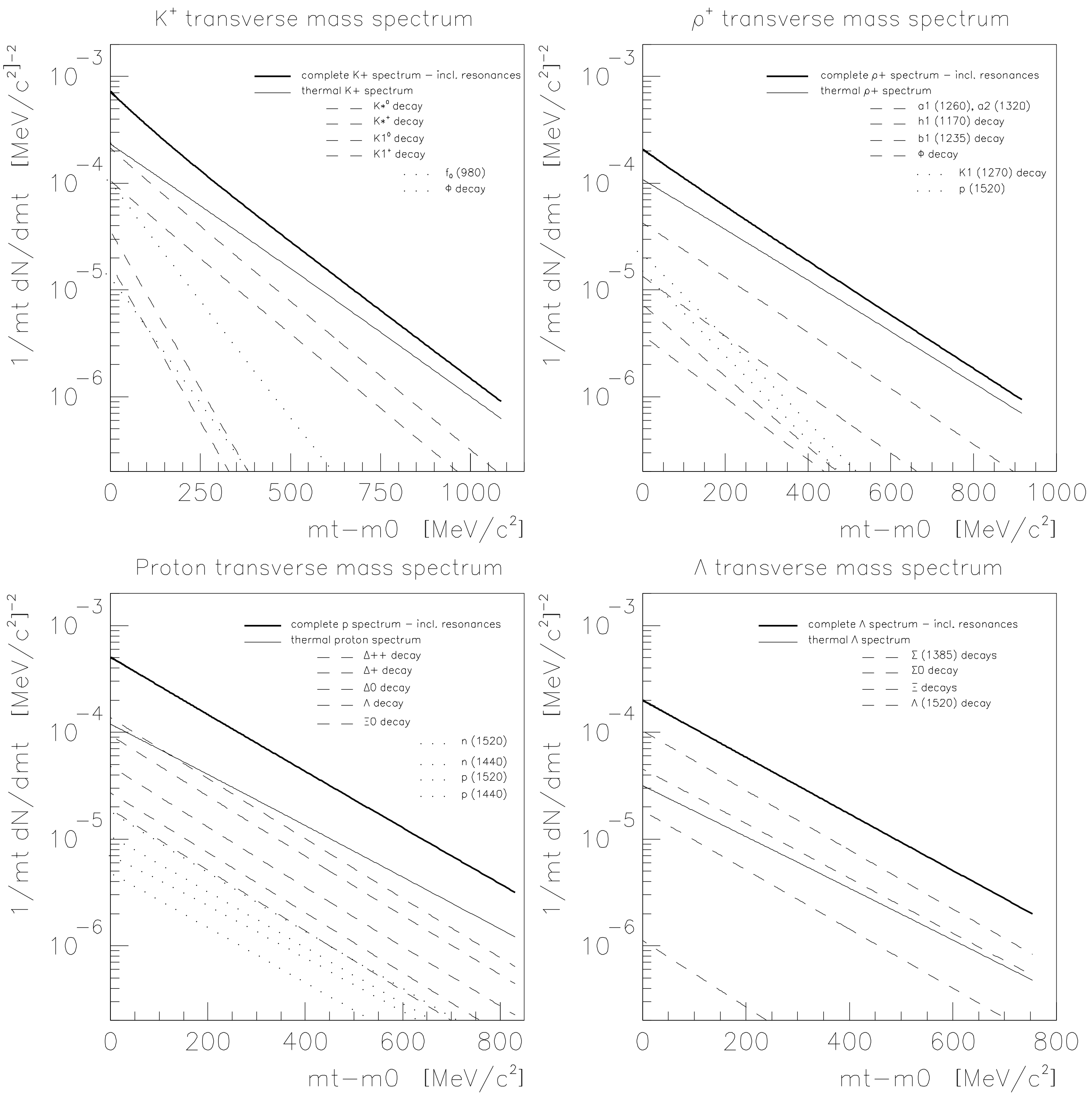

Abbildung 4.2 **Modellierte transversale Massenspektren verschiedener Hadronen nach Gl. 4.20 und 4.22:** (Pb+Pb Kollisionen, T=170 MeV, μ_B=240 MeV, ohne *flow*) Obwohl sich die Normierung der Kurven stark durch Resonanzzerfälle ändert, bleibt die Kurvenform relativ ähnlich.

Geht man nun zurück zu Gl. 4.13 und integriert diese über y_1, so erhält man ein von Rapidität unabhängiges transversales Impulsspektrum. Nach einer Variablensubstitution $\tilde{y_R} = y_R - y_1$ kann man die y_1-Integration von außen nach innen ziehen. Setzt man eine thermische Verteilung des Resonanzspektrums ohne Quantenstatistik voraus, so läßt sich diese innere y_1-Integration über das Resonanzspektrum analytisch lösen.

Zusammengefaßt gilt dann für den Zweikörperzerfall:

$$\frac{dN_i}{dm_{t1}^2} = \frac{b}{2\pi p_1^*} \frac{g_i V}{4\pi^2\hbar^3} e^{\beta\mu_{iR}} \int\limits_{\tilde{y}_R^{(-)}}^{\tilde{y}_R^{(+)}} \frac{\mathrm{d}\tilde{y}_R}{\sqrt{m_{t1}^2 \cosh^2(y_1 - y_R) - p_{t1}^2}}$$

$$\cdot \int\limits_{m_{tR}^{2\,(-)}(\tilde{y_R})}^{m_{tR}^{2\,(+)}(\tilde{y_R})} \frac{m_R\,\mathrm{d}m_{tR}^2}{\sqrt{(m_{tR}^{(+)} - m_{tR})(m_{tR} - m_{tR}^{(-)})}} \mathrm{K}_1(\beta m_t R), \qquad (4.20)$$

mit K_1 als modifizierter Bessel-Funktion, sowie

$$p_1^* = \frac{1}{2m_R}\sqrt{[(m_R+m_1)^2 - m_2^2][(m_R-m_1)^2 - m_2^2]} \quad \text{und} \quad \tilde{y}_R^{(\pm)} = \pm\ln\left(\frac{\sqrt{p_1^{*2} + m_{t1}^2} + p_1^*}{m_{t1}}\right).$$

Ähnlich gilt für den Dreikörperzerfall:

$$\frac{dN_i}{dm_{t1}^2} = \frac{m_R b}{2\pi Q} \frac{g_i V}{4\pi^2\hbar^3} e^{\beta\mu_{iR}} \int\limits_{(\sum_{i=2}^n m_i)^2}^{(m_R - m_1)^2} \mathrm{d}W^2 \frac{\sqrt{W^2 - (m_2+m_3)^2}\sqrt{W^2 - (m_2 - m_3)^2}}{W^2} \qquad (4.21)$$

$$\cdot \int\limits_{\tilde{y}_R^{(-)}}^{\tilde{y}_R^{(+)}} \frac{\mathrm{d}\tilde{y}_R}{\sqrt{m_{t1}^2\cosh^2(y_1 - y_R) - p_{t1}^2}} \int\limits_{m_{tR}^{2\,(-)}(\tilde{y}_R)}^{m_{tR}^{2\,(+)}(\tilde{y}_R)} \frac{m_R\,\mathrm{d}m_{tR}^2}{\sqrt{(m_{tR}^{(+)} - m_{tR})(m_{tR} - m_{tR}^{(-)})}} \mathrm{K}_1(\beta m_{tR})$$

4.4 Zerfallskaskaden

Bisher wurden nur die primären Zerfälle berücksichtigt. Wie steht es aber mit den Kaskaden, den Mehrfachzerfällen? Um sie in den Formalismus einzubauen, muß Gl. 4.13 iteriert werden. Ein Beispiel: p(1440) zerfällt in ein Δ^{++} und ein π^-. Anschließend zerfällt das Δ^{++} in ein p und ein π^+. Wie sieht das transversale Massenspektrum solcher π^+ aus? Dazu berechnet man mit Hilfe von Gl. 4.13 das Spektrum des Δs. Diese Verteilung steckt man wiederum in Gl. 4.13 um das transversale Massenspektrum des π^+ zu erhalten.

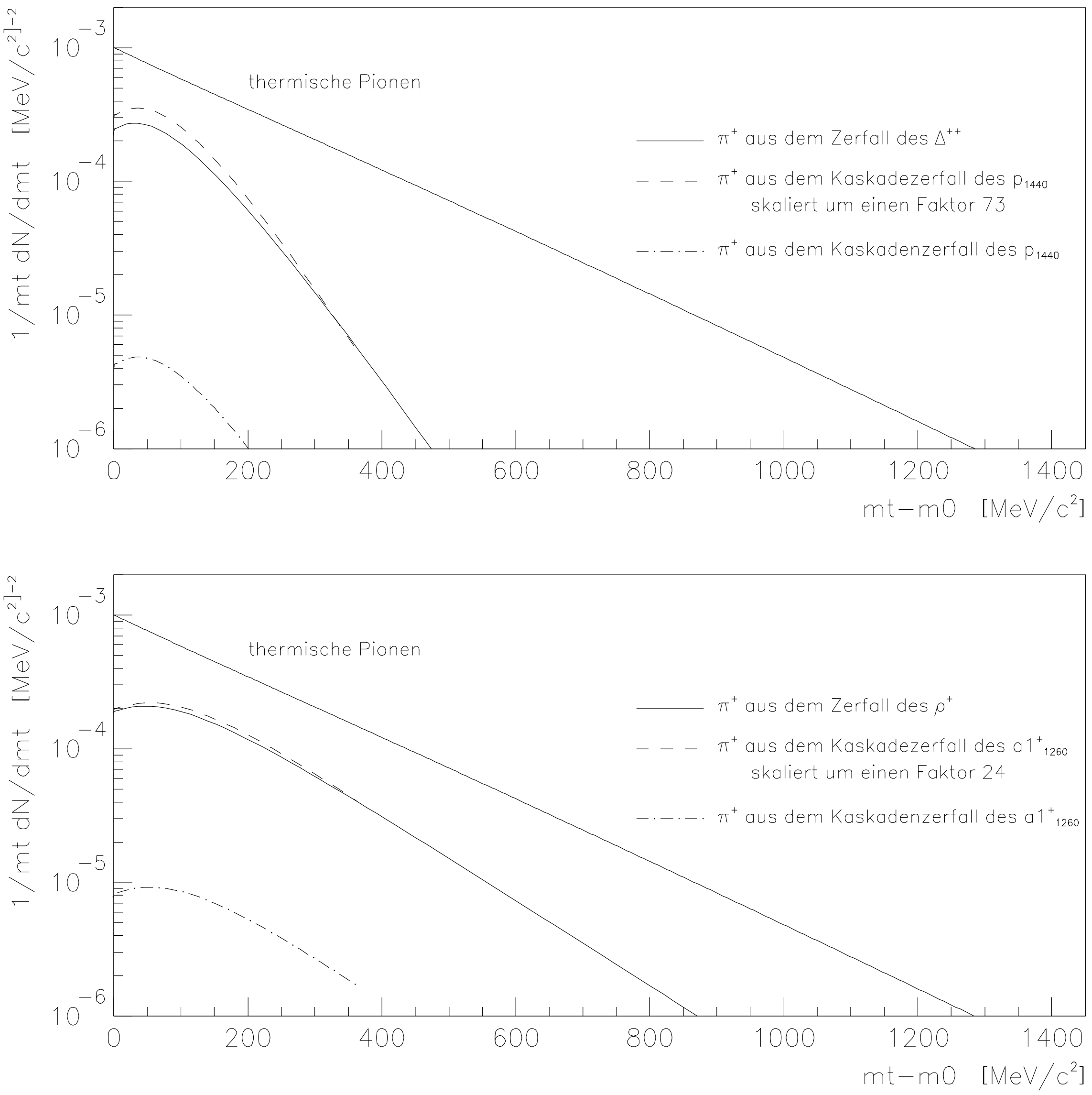

Abbildung 4.3 Modellierte transversale Massenspektren von zwei π^+-Mehrfachzerfällen: (Pb+Pb Kollisionen, T=170 MeV, μ_B=240 MeV, ohne *flow*) Betrachtet wird der Zerfall $p_{1440} \rightarrow \Delta^{++} + \pi^-$ gefolgt von $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$ sowie $a^+_{1\,1260} \rightarrow \rho^+ + \pi^0$ gefolgt von $\rho^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^+$.

Wie Schaubild 4.3 zeigt, ist die Form der Verteilung hauptsächlich durch den letzten Zerfall vor dem Endzustand gegeben. Betrachtet man Pionen aus dem Zerfall eines ρ, so ist die Form dieser Verteilung fast unabhängig davon, ob das Mutterteilchen ρ thermisch produziert wurde oder selbst aus einem Zerfall stammt.

4.5 Expansion des Feuerballs

Außer den Resonanzzerfällen verkompliziert noch ein weiterer Sachverhalt die Spektren: die Expansion des Feuerballs.

Das System trägt nach wie vor die Erinnerung an die ursprüngliche Kollisionsdynamik und dehnt sich in longitudinaler Richtung weit stärker aus als transversal zum Strahl. Die longitudinale Expansion hat einen deutlichen Effekt auf die Rapiditätsspektren, die durch die Hinzunahme des longitudinalen *flows* flacher und breiter werden. Eine Möglichkeit, die longitudinale Expansion in das Formelgebäude einzubauen, besteht darin, nicht **eine** thermische Quelle zu verwenden, sondern eine Verteilung thermischer Quellen entlang der Strahlachse emittieren zu lassen.

Anders ausgedrückt ist die neue Rapiditätsverteilung das Integral über gleichmäßig verteilte thermische Quellen, die alle individuell um eine Rapidität η geboostet werden:

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}y} = \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \mathrm{d}\eta \; \frac{\mathrm{d}n_{\text{therm.}}}{\mathrm{d}y}(y-\eta). \tag{4.22}$$

Die transversalen Massenspektren sind dadurch jedoch nicht beeinflußt. Sie spüren lediglich den kleineren transversalen *flow*. Auch hier kann das Spektrum als Überlagerung mehrerer thermischer Komponenten beschrieben werden, die jeweils um $\rho = \operatorname{arc\,tanh} \beta_r$ geboostet sind. β_r stellt eine transversale Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Region des Feuerballs $0 \leq r \leq R$ dar, die durch die zwei Variablen α und β_s in folgender Weise parametrisiert werden kann:

$$\beta_r(r) = \beta_s \, \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}. \tag{4.23}$$

Das transversale Massenspektrum mit transversalem *flow* hat folgende Form:

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{m_t \, \mathrm{d}m_t} \propto \int_0^R r \, \mathrm{d}r \; m_t \; \mathrm{I}_0\left(\frac{p_t \sinh\rho}{T}\right) \; \mathrm{K}_1\left(\frac{m_t \cosh\rho}{T}\right), \tag{4.24}$$

mit I_0 und K_1 als modifizierte Besselfunktionen.

4.6 Anwendung

Viele Transversalimpuls-Spektren lassen sich durch die einfache thermische Beschreibung gemäß Gl. 4.7 in guter Näherung modellieren. Obwohl die Resonanzzerfälle den Absolutbetrag der Teilchenzahl oft spürbar ändern, folgt die Verteilungskurve aus Resonanzzerfällen meist der thermischen Form (vgl. Schaubild 4.2). Und die Normierung wird ohnehin an die Daten angepaßt. Das hat folgenden Grund: Während die Kurvenform den thermischen *freeze-out* widerspiegelt, entspricht das Integral der Kurve gerade dem jeweiligen Teilchen-*yield*, der den chemischen *freeze-out* reflektiert. Da das thermische

Ausfrieren bei einer weit niedrigeren Temperatur als das chemische Ausfrieren geschieht, kann Kurvenform und Integral nicht mit der gleichen Temperatur modelliert werden.

Logitudinaler *flow* beeinflußt zwar die Rapiditätsspektren, nicht aber die Transversalimpuls-Spektren – allerdings nur, solange man keine Resonanzzerfälle berücksichtigt. Und der transversale *flow* ist in Pb+Pb Kollisionen mit $v_\perp = 0.55c$ deutlich kleiner als der logitudinale mit $v_\| = 0.9c$ [34], so daß seine Wirkung nicht immer spürbar sein muß.

Und doch gibt es ein Teilchen, das von all diesen Effekten stark beeinflußt wird: das Pion. Lange Zeit wurde über die Gründe der *"low p_t anomaly"* und das unerklärliche *"low p_t enhancement"* des Pions gerätselt. Während alle anderen Hadron-Spektren der thermischen Kurve folgten, zeigten die p_t Spektren des Pions eine hartnäckige Überhöhung der Kurve bei kleinen Impulsen (vgl. Schaubild 4.4). Die Erklärung hierfür: Resonanzen und *flow* [23].

In [24] wird auf die wichtige Rolle des Δ-Zerfalls für die Erhöhung des p_t-Spektrums des Pions hingewiesen, in [22] wurde der Beitag von Dreikörper-Zerfällen untersucht, die bei höheren Temperaturen deutlich zur Piondichte bei kleinen Impulsen beitragen. Wie die Ergebnisse des erweiterten Modells nahelegen, reicht jedoch nur die Berücksichtigung der dominantesten Zerfallskanäle nicht aus. Deshalb wurden bei der Modellierung des Pionspektrums im nächsten Kapitel über 50 verschiedene Zerfälle berücksichtigt. Weiterhin wurden diese Resonanzzerfälle mit longitudinaler und transversaler Expansion in ein geschlossenes System zusammengefaßt.

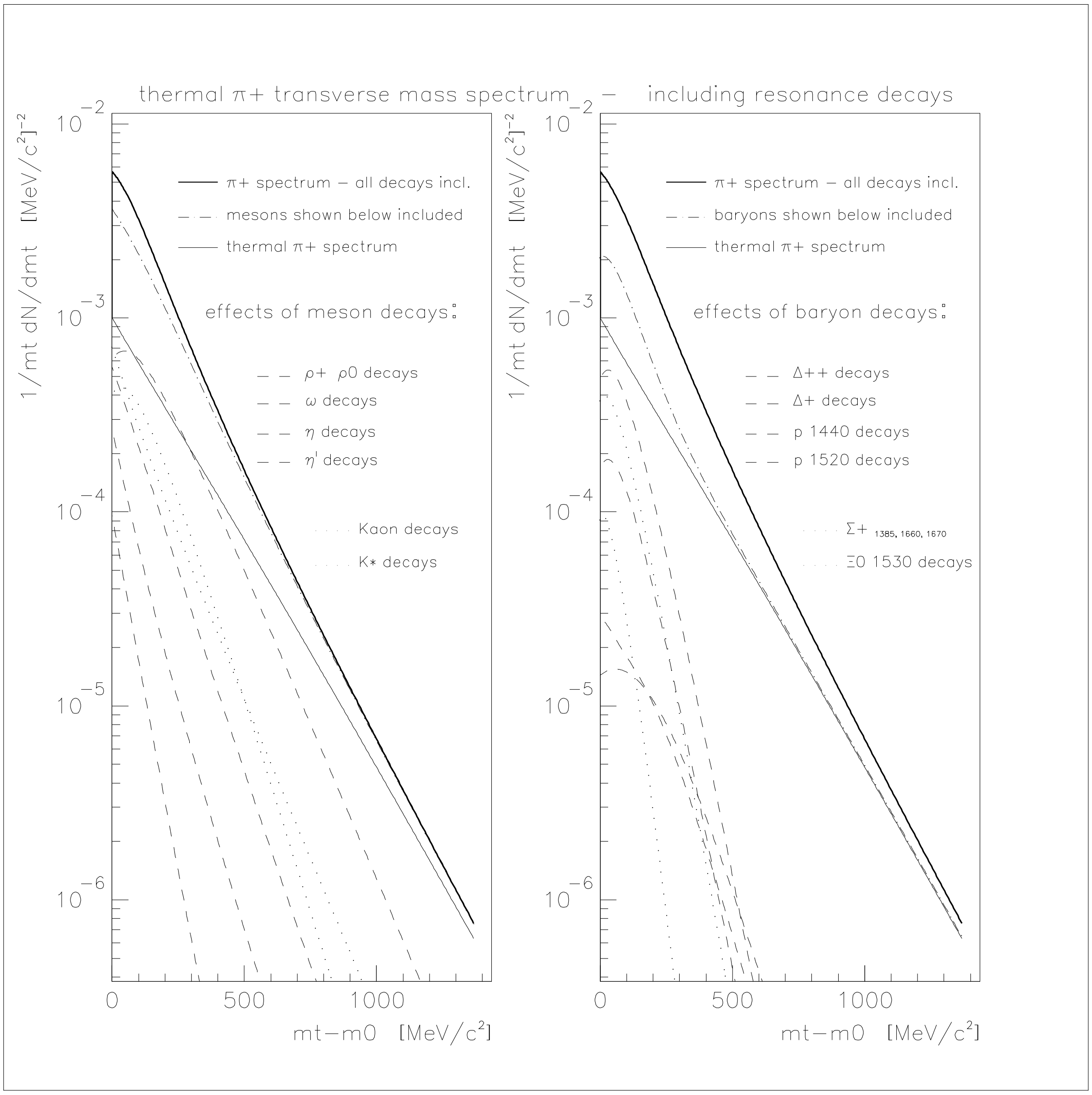

Abbildung 4.4 **Einfluß der Resonanzzerfälle auf das transversale π^+ Spektrum:** (Pb+Pb Kollisionen, T=170MeV, μ_B=240MeV ohne *flow*) Den größten Beitrag zur Überhöhung des Spektrums bei kleinem m_t leisten die Dreikörperzerfälle des Ω, η und η' sowie die dominanteren baryonischen Zerfälle.

5 Pionspektren - Ergebnisse

5.1 Das Pionmodell

Das Pionmodell dient zur Berechnung transversaler Massenspektren für Pionen aus Pb+Pb Kollisionen am CERN-SPS. Es setzt sich aus mehreren Einzelspektren zusammen: einer thermischen, von transversalem *flow* beeinflußten Komponente nach Gleichung 4.24 sowie den Spektren der Pionen, die aus Resonanzzerfällen stammen.

Für diese Zerfallsspektren wurden alle im letzten Kapitel vorgestellten Formeln zu einem geschlossenen System zusammengefaßt: Ausgangspunkt sind mehrere, von transversalem *flow* dominierte thermische Boltzmannverteilungen, die alle in Rapidität um η geboostet sind. Entsprechend verschiebt sich auch die Temperatur jeder dieser einzelnen Quellen um $T \longrightarrow T/\cosh(y-\eta)$. Diese Verteilungen – die Spektren der Resonanzen – zerfallen nun in Pionen, wobei über transversale Masse und Rapidität der Resonanz integriert wird.

Betrachtet wird ein transversales Massenspektrum bei mittlerer Rapidität, $y_1 = 3$, über die Pion-Rapidität wird daher nicht integriert.

$$\frac{\mathrm{d}N_\pi}{m_t\,\mathrm{d}m_t\,\mathrm{d}y_1} \quad \propto \; e^{\mu/T} \int\limits_{(\sum_{i=2}^{n} m_i)^2}^{(m_R-m_1)^2} \mathrm{d}W^2\, g(W^2) \int\limits_{y_R^{(-)}}^{y_R^{(+)}} \frac{\mathrm{d}y_R}{\sqrt{m_{t1}^2\cosh^2(y_1-y_R)-p_{t1}^2}} \; \cdot$$
$$\int\limits_{m_{tR}^{2\,(-)}}^{m_{tR}^{2\,(+)}} \frac{m_R\,\mathrm{d}m_{tR}^2}{\sqrt{(m_{tR}^{(+)}-m_{tR})(m_{tR}-m_{tR}^{(-)})}} \int\limits_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \mathrm{d}\eta \int_0^R r\,\mathrm{d}r\; m_t \; \cdot$$
$$\mathrm{I}_0\left(\frac{p_t\sinh\rho\cosh(y_1-\eta)}{T}\right)\;\mathrm{K}_1\left(\frac{m_t\cosh\rho\cosh(y_1-\eta)}{T}\right) \qquad (5.1)$$

Um diese Formel anwenden zu können, müssen jedoch eine Reihe Parameter festgelegt werden. Insbesondere stellt sich die Frage nach dem chemischen Potential und der Temperatur. Dabei muß man berücksichtigen, daß sich der Feuerball nach dem chemischen *freeze-out* bei T=175 MeV und μ_B=170 MeV höchstwahrscheinlich weiter ausdehnt und abkühlt bevor es zum thermischen Ausfrieren kommt. Daher wurde angenommen, daß die Spektren erst bei einer Temperatur von 120 MeV "einfrieren".

Diese Temperatur prägt die Form der Kurven – nicht jedoch ihr Integral. Dieses ist vom chemischen *freeze-out* und der höheren Temperatur bestimmt. Da die Normierung ohnehin an die Daten angepaßt wird, spielt dies bei einem rein thermischen Spektrum keine Rolle. Anders jedoch bei den Pionspektren, die auch durch Resonanzzerfälle geprägt sind. Hier legen T und μ_B fest, in welchem Ausmaß die verschiedenen Resonanzteilchen thermisch produziert werden.

Daher wurden im Pionmodell das thermische Spektrum und die Pionspektren für Pionen aus dem Resonanzzerfällen einer Resonanz getrennt bei einer Temperatur von 120 MeV berechnet. Jedes Pionspektrum wurde dann separat nach Resonanz integriert und die so erhaltene Zahl mit dem aus dem erweiterten Modell bei T=175 MeV berechneten Wert verglichen. Anschließend wurden die verschiedenen Spektren getrennt voneinander skaliert, bis ihre Integrale gerade die Verhältnisse des erweiterten Modells bei T=175 Mev, μ_B=270 MeV und R(B)=R(M)=0.3 fm widerspiegelten.

Bsp.: Berechnet man das Pionspektrum aus Zerfällen des Δ^{++} bei T=120 MeV, so stimmt zwar die Kurvenform, doch liegt die Verteilung zu niedrig im Vergleich zur thermischen Verteilung. Denn bei T=120 Mev werden die schweren Δ^{++}_{1232} in weit geringerem Ausmaß thermisch produziert als bei T=175 MeV. Deshalb wird die Pionen-aus-Delta-Kurve nach oben skaliert, bis das Verhältnis der integrierten Pionen aus Δ^{++}-Zerfällen zu thermisch produzierten Pionen das Verhältnis des erweiterten Modells reproduziert.

Als transversaler Radius des Feuerballs wurde 6.5 fm in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten in [34] gewählt, anstatt auf den zu großen Kugelradius von 8.35 fm des erweiterten Modells zurückzugreifen. Außerdem wurde gesetzt: α=1, $\eta_{\max}$=5, $\eta_{\min}$=1, β_S=0.6 und μ=0.

Es wurden alle Zerfallskanäle der Mesonen bis 1285 MeV/c^2 sowie die dominanten Zerfälle des $a2_{1320}$ berücksichtigt. Bei den Baryonen wurden Resonanzen bis 1530 MeV/c^2 aufgenommen und zusätzlich das Δ_{1600}. Antibaryonen mußten nicht berücksichtigt werden, da ihre Produktion sehr stark unterdrückt ist.

Höhere Zerfälle konnten aufgrund der exponentiell steigenden Rechenzeit nicht formal mit eingebaut werden. Statt dessen wurde angenommen, daß die Kurvenform aus höheren Zerfällen der Form aus primären Zerfällen gleicht, und so wurde der Anteil der Zerfallskaskaden an der gesamten Piondichte durch die Skalierung berücksichtigt. Aus den Ergebnissen des erweiterten Modells weiß man, daß die höheren Zerfälle bis zu 25 % der gesamten Piondichte ausmachen (siehe Tabelle 3.1).

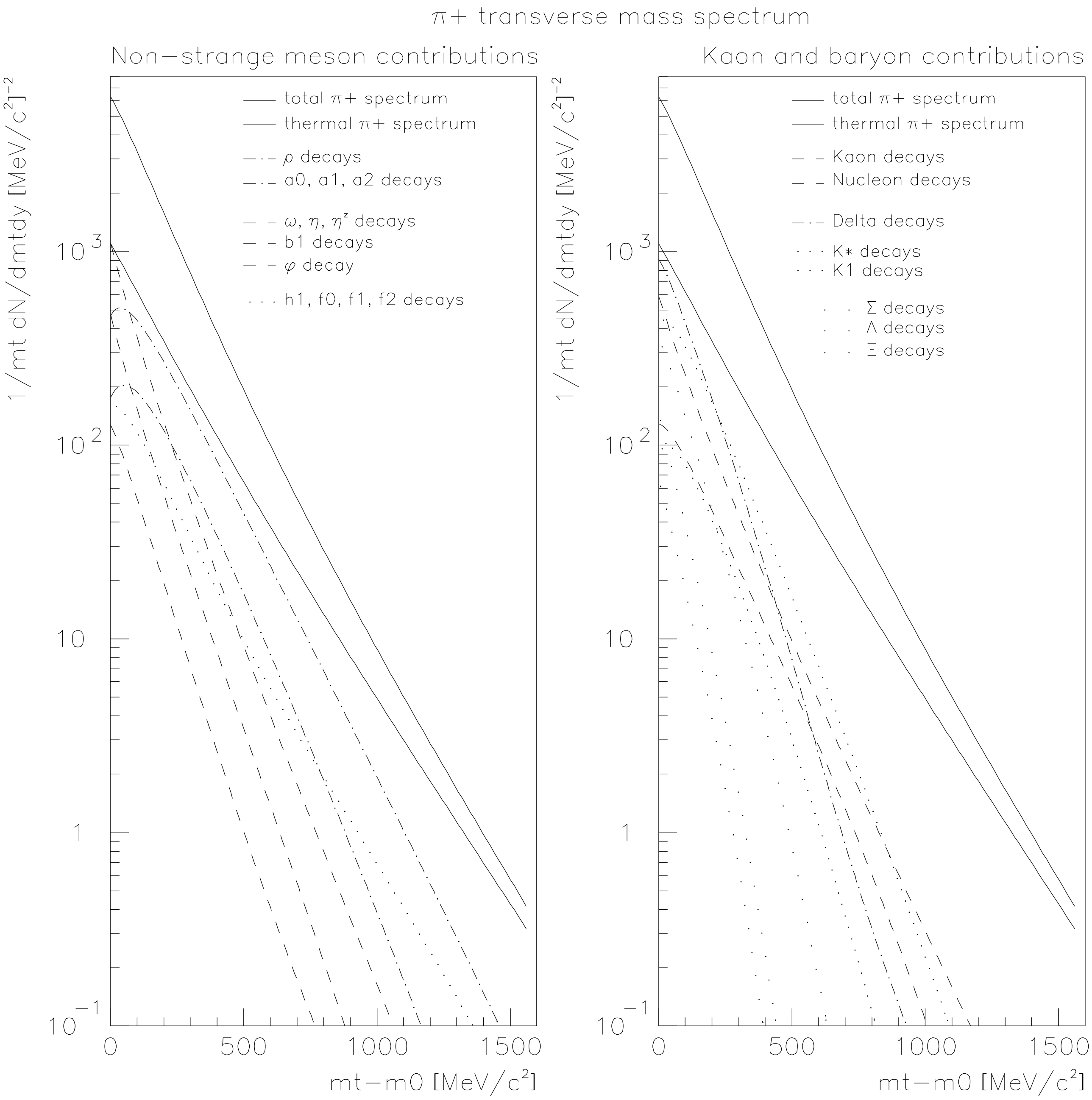

Abbildung 5.1 Modelliertes transversales π^+ Massenspektrum bei y=3, T=120 MeV mit *flow* und Resonanzzerfälle nach Gl. 5.1.

5.2 Das π^+-Spektrum im Datenvergleich

Nach der im vorhergegangenen Kapitel beschriebenen Vorgehensweise wurde das π^+ Spektrum bei y=3 berechnet. Schaubild 5.1 zeigt den Einfluß der verschiedenen Resonanzzerfälle, insbesondere die Überhöhung des Spektrums bei kleinem m_t aufgrund der

Dreikörperzerfälle des ω, η und η' sowie der Zerfälle der Kaonen und der Deltas. Die Verteilungen aus baryonischen Zerfällen sind meist schmaler als die aus Zerfällen von Mesonen.

Die modellierte Kurve wurde in Schaubild 5.2 mit Daten des Experiments NA44 aus Pb-Pb Kollisionen am CERN-SPS verglichen [35]. Die experimentellen Werte erstrecken sich über einen Rapiditätsbereich von y = 3 - 4. Die absolute Normierung wurde an die Daten angepaßt. Die Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment ist gut, obwohl die Modellkurve im Mittelbereich die experimentellen Daten überschätzt. Die gepunktete Linie zeigt die thermische π^+-Verteilung bei gleicher Temperatur - sie weicht deutlich von der Kurvenform der gemessenen Werte ab.

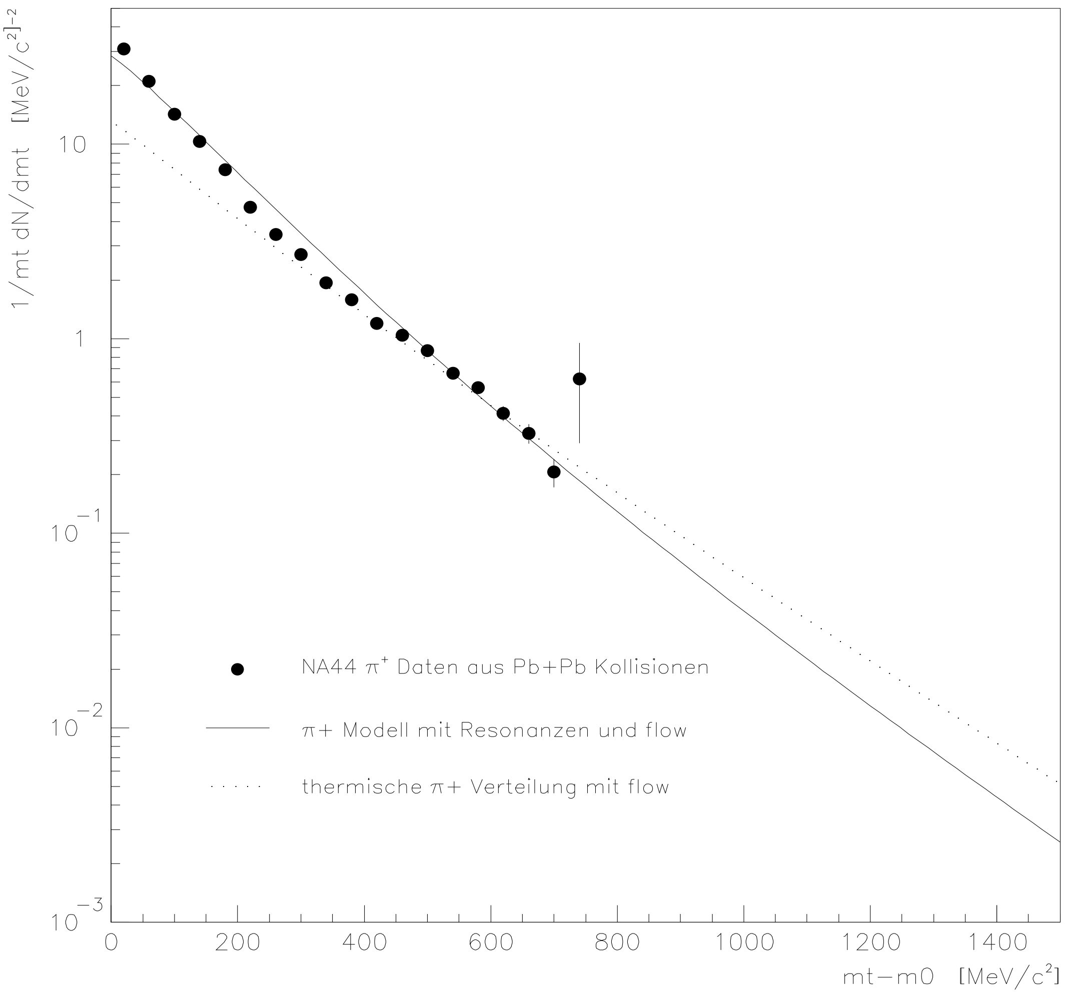

Abbildung 5.2 Modelliertes π^+-Spektrum bei T=120 MeV im Vergleich mit NA44 Daten [35].

Zuletzt kann man die berechnete Pionverteilung $1/\mathrm{m_t}\ \mathrm{dN}/(\mathrm{dm_t} \mathrm{d}y)$ in kleinen mt-Intervallen mit einer einfachen Exponentialfunktion

$$\mathrm{f}(\mathrm{m_t} - \mathrm{m_0}) = \mathrm{const} \cdot \exp \frac{-(\mathrm{m_t} - \mathrm{m_0})}{\mathrm{T}}$$

fitten und erhält mit T die *local inverse slope* der Verteilung. Diese ist für die berechnete π^+-Verteilung in Schaubild 5.3 gezeigt. Jeder Punkt wurde über einen $(m_t - m_0)$-Bereich von 150 MeV/c^2 gefittet.

Man sieht die Abnahme des lokalen inversen Steigungsparameters mit fallender transversaler Masse, die der Überhöhung des Spektrums bei kleinem m_t entspricht. Ebenso kann man erkennen, daß durch die Hinzunahme von transversalem *flow* das thermische Spektrum ohne Zerfälle durch eine weit niedrigere Temperatur erklärt werden kann: Während die Temperatur, mit der das Spektrum berechnet wurde, bei T=120 MeV liegt, so befindet sich die *local inverse slope* des thermischen Spektrums bei T=207 MeV.

Man sieht außerdem, daß die Resonanzzerfälle auch noch bei hohen transversalen Massen über 1.5 GeV/c^2 eine Rolle spielen, da die *local inverse slope* den thermischen Wert noch nicht erreicht hat.

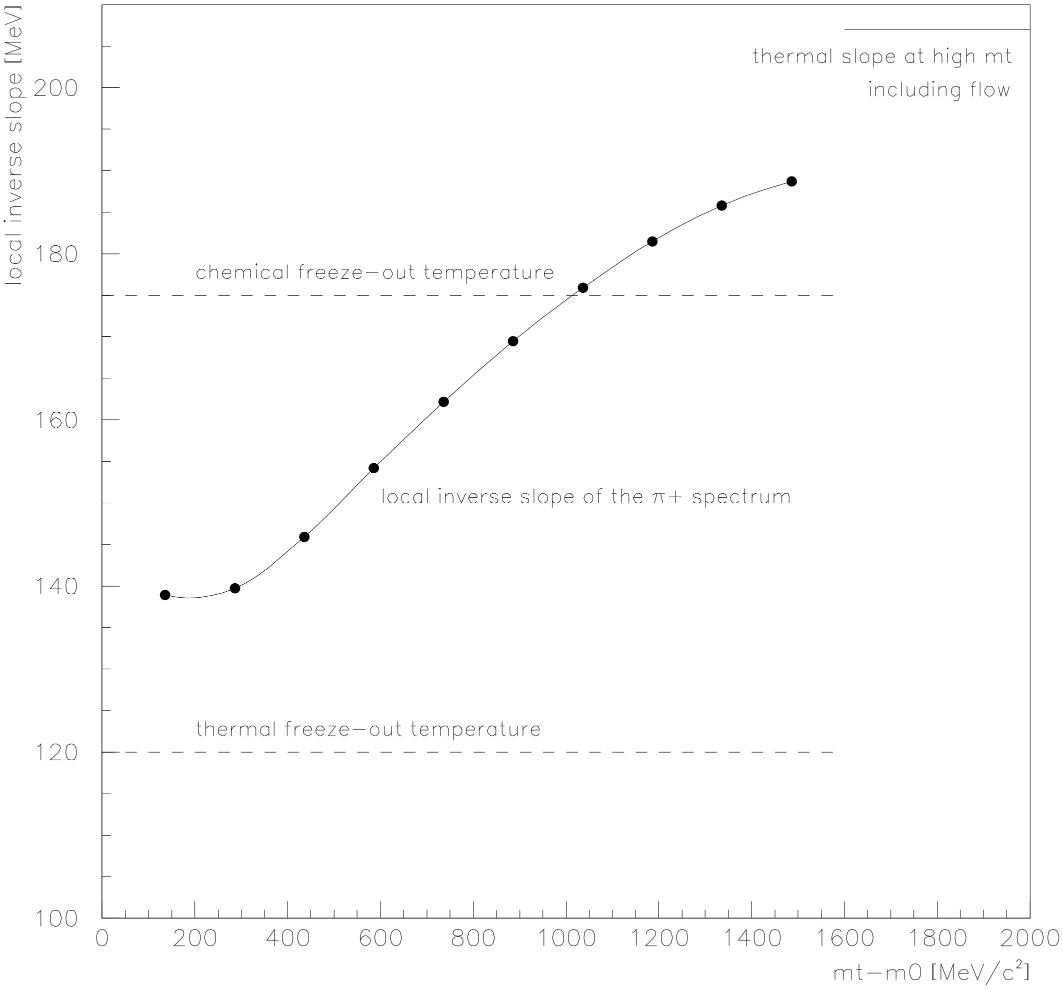

Abbildung 5.3 *Local inverse slope* des modellierten transversalen π^+ Massenspektrums.

5.3 Das π^--Spektrum im Datenvergleich

Wendet man die gleiche Vorgehensweise wie im vorangegangenen Abschnitt an, um ein π^- Spektrum zu generieren, so ändert sich die thermische Komponente nicht. Es tragen jedoch andere Zerfallskanäle in leicht geänderter Gewichtung zum π^- Spektrum bei. Der Unterschied ist geringfügig.

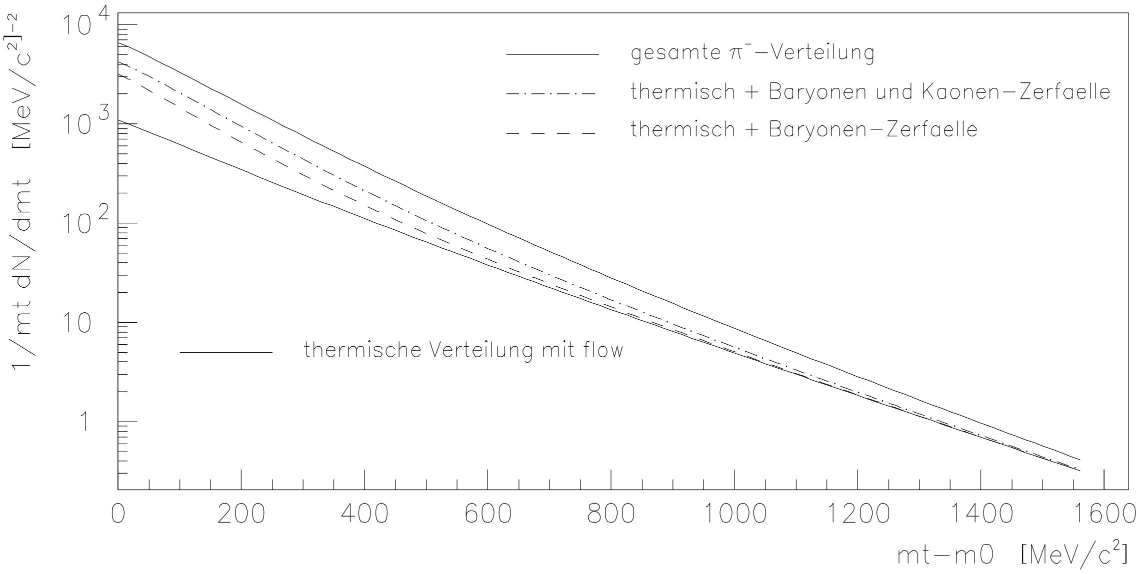

Abbildung 5.4 Beiträge der Resonanzen zum π^- Spektrum: Die Zerfälle der Baryonen erhöhen die Pionzahl bei kleinem m_t, während die Kaonenzerfälle auch Pionen mit höheren Transversalimpulsen zur Folge haben. Die Zerfälle der Mesonen erstrecken sich über den ganzen betrachteten m_t-Bereich.

Der Vergleich des Pionmodells mit den identifizierten π^- des Experiments NA44 [35] fällt auch diesmal gut aus (siehe Schaubild 5.5). Da die experimentellen Werte bei kleinen Transversalimpulsen liegen, ist der Vergleich insbesondere ein Test für die Resonanzerfälle, die das Spektrum bei kleinem m_t dominieren. Die thermische Komponente spielt erst bei größeren Transversalimpulsen eine Rolle, so daß sich anhand von Schaubild 5.5 nicht entscheiden läßt, ob T=120 MeV eine passende Wahl war.

Von dem CERES-Experiment wie auch von NA49 gibt es h^- Daten, also Pionen mit leichter Verunreinigung durch Kaonen, Antiprotonen und Elektronen, die einen weit größeren Transversalimpulsbereich abdecken. Beide Datensätze (siehe [36] und [27]), stellen eine Auswahl der 5% zentralsten Kollisionen dar. Die CERES Daten wurden in einem Rapiditätsbereich zwischen 2.1 und 2.6 gemessen, die NA49 Daten zwischen y=3.15 und y=3.65.

Die Schaubilder 5.6 und 5.7 zeigen, daß die Annahme einer niedrigen Ausfriertemperatur nicht mit diesen Daten verträglich ist, wenn man Resonanzzerfälle mitberücksichtigt: Das jeweils erste Bild zeigt die Daten im Vergleich mit der thermischen Verteilung bei T=120 MeV. Die Normierung der Daten ist willkürlich. Man erwartet,

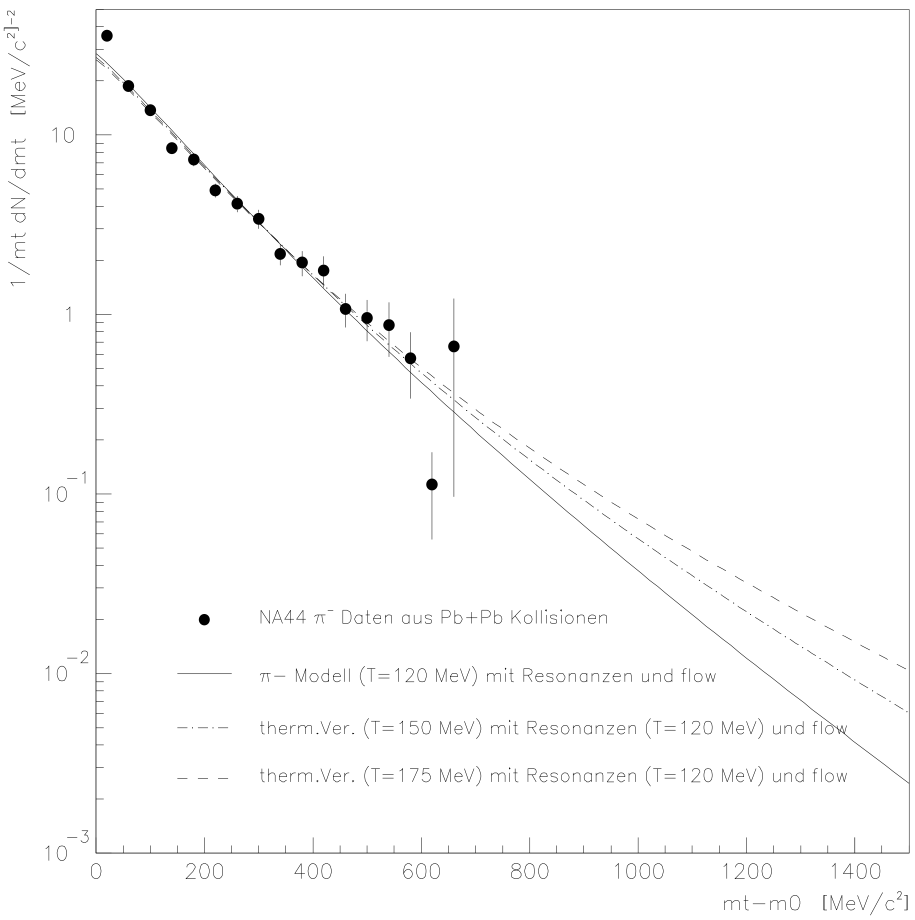

Abbildung 5.5 π^- Modell im Vergleich mit NA44 Daten [35].

daß die thermische Verteilung die Daten bei mittlerem m_t gut beschreibt, bei hohem und niedrigem m_t jedoch unter den gemessenen Werten bleibt, da dort die Verunreinigungen durch andere Teilchen bzw. durch Resonanzzerfälle einsetzen. Solch ein Verhalten ist jedoch nicht zu erkennen; die modellierte Kurve ist viel zu steil. Durch die Hinzunahme von Zerfallspionen wird die Verteilung noch steiler (2. Bild in den Abb. 5.6 und 5.7).

In den folgenden zwei Bildern wurde versucht, die wahrscheinlich falsche Annahme einer Ausfriertemperatur von T=120 MeV zu korrigieren. Dazu wurde nun eine thermische Verteilung mit einer höheren Temperatur aber dem gleichen transversalen flow von β_S=0.6 generiert und mit dem Zerfallsspektrum kombiniert. Dies ist selbstverständlich nur eine grobe Näherung, da die Zerfallsspektren nach wie vor bei T=120 MeV erzeugt wurden. Da diese Verteilungen jedoch stärker von der Zerfallskinematik als von der Temperatur beeinflußt sein sollten, ist dieses Vorgehen zumindest als Näherung möglich.

Man erkennt, daß sich beide experimentellen Datensätze mit dieser Annahme besser beschreiben lassen. Dennoch liegt das Modell im Vergleich mit den Daten des CERES Experimentes gerade bei kleinem m_t um einen Faktor 2 zu hoch. Außerdem liegt die Modellkurve bei beiden Datensätzen im Bereich um m_t=0.9 Gev/c^2 zu niedrig.

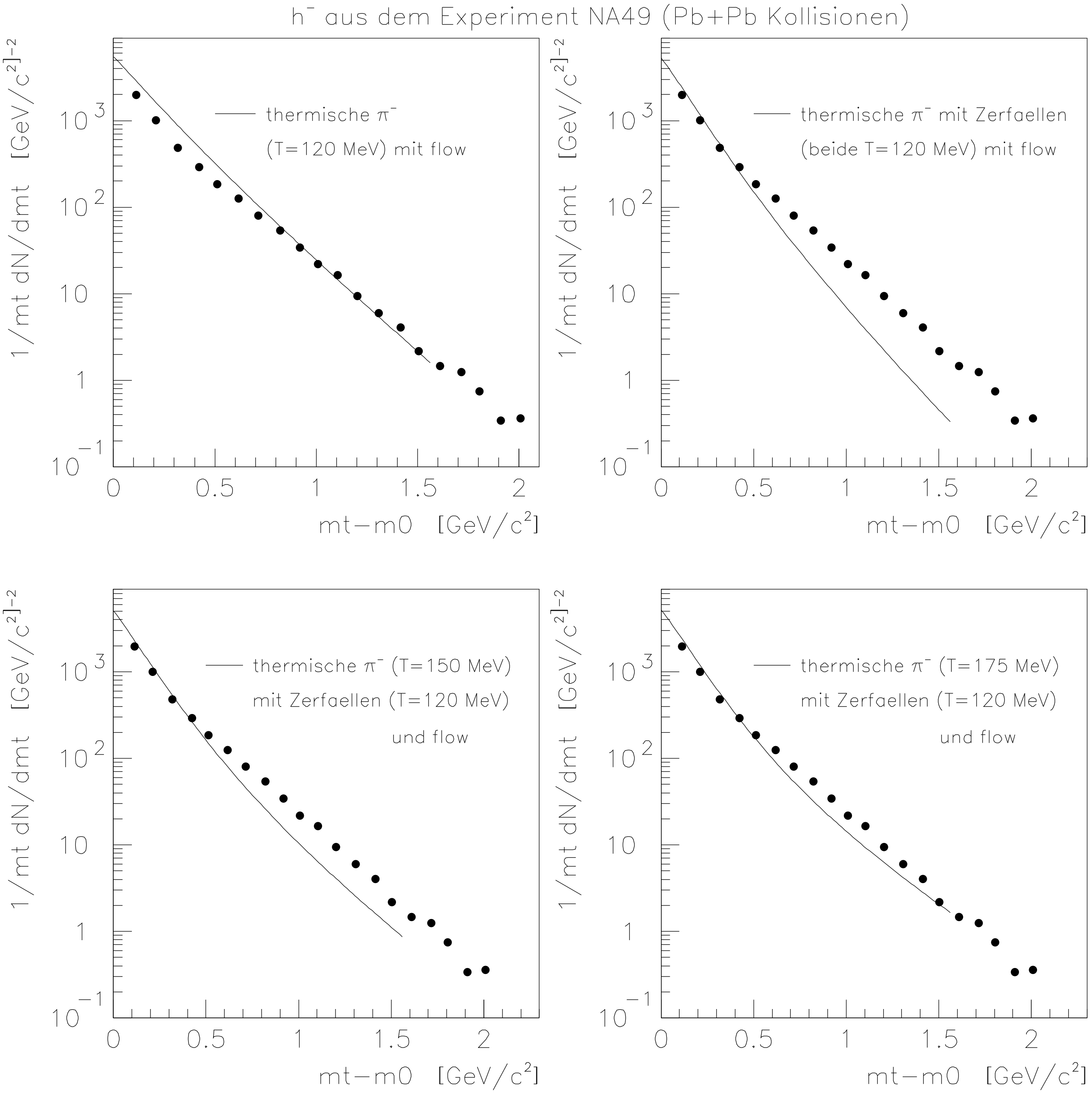

Abbildung 5.6 π^- Modell im Vergleich mit NA49 Daten [27]. Die Anpassung der Kurve erfolgte "von Hand" in dem Bereich, in dem die Übereinstimmung am größten sein sollte.

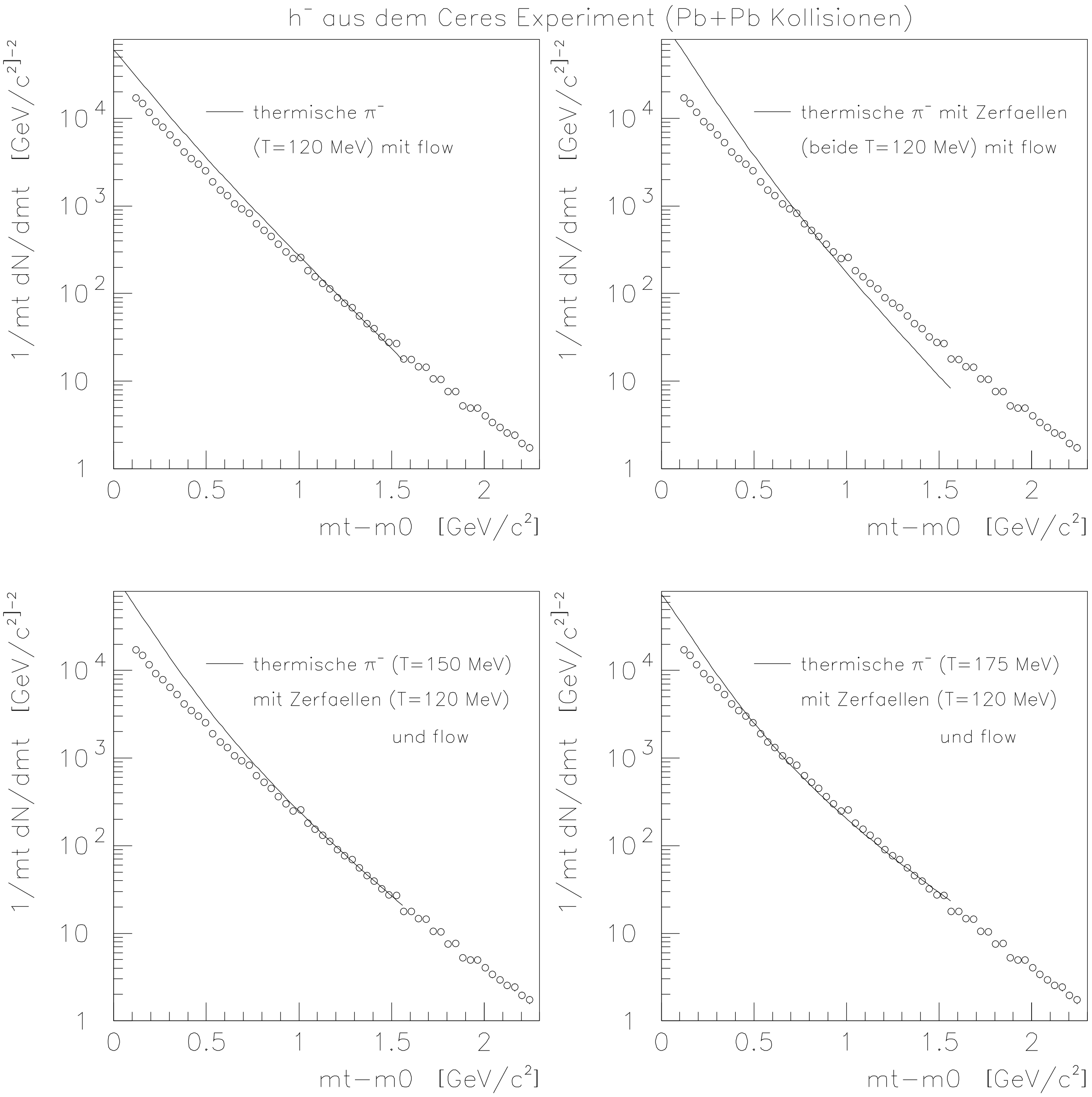

Abbildung 5.7 π^- Modell im Vergleich mit CERES-Daten [36]. Die Anpassung der Kurve erfolgte "von Hand" in dem Bereich, in dem die Übereinstimmung am größten sein sollte.

Für diese Abweichungen kann es zwei Gründe geben: Einerseits wurden die Zerfallsspektren bei nur T=120 MeV berechnet. Da bei höheren Temperaturen der durchschnittliche Transversalimpuls der Resonanzen größer ist, sollten bei einer konsistenten Berechnung bei höherer Temperatur die Verteilungen der Zerfallspionen breiter werden. Da das Integral normiert ist, wäre diese Verteilung außerdem bei kleinem m_t weniger steil.

Andererseits sollte man auch bedenken, daß Modell und Daten nicht unbedingt miteinander vergleichbar sind: Während das Modell bei fester Rapidität berechnet wurde, erstrecken sich die Daten über einen breiteren Bereich von Δy=0.5, der in beiden Fällen die Rapidität, bei der das Modell berechnet wurde, nicht einmal miteinschließt.

5.4 Das $\pi^+ + \pi^-$ Spektrum und π^-/π^+-Verhältnis im Datenvergleich

Addiert man positive und negative Pionspektren, so erhält man in erster Näherung das Spektrum des π^0. Dies wurde mit Daten von NA44 [35] (3<y<4), F. Ceretto (CERES-Coll.) [37] (2.1<y<2.6) und C. Blume (WA98-Coll.) [38] (2.0<y<3.2) verglichen. Die Normierung des Modellspektrums sowie der experimentellen Werte wurde wechselseitig angepaßt.

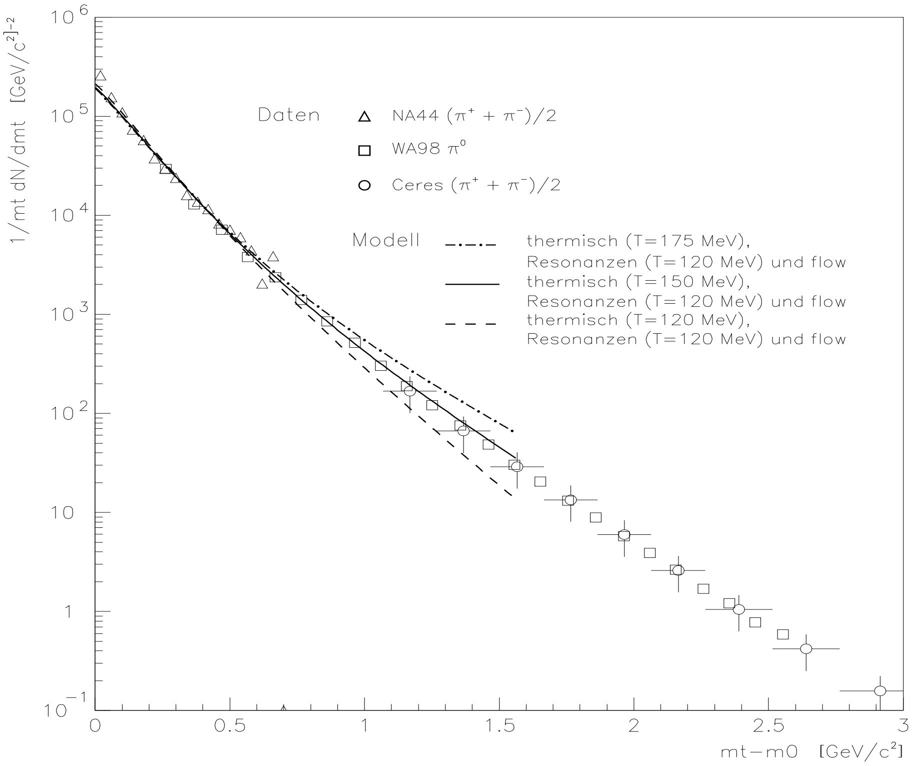

Abbildung 5.8 Das Pionmodell im Datenvergleich mit π^0.

In Schaubild 5.8 ist die Übereinstimmung zwischen Modell und Daten deutlich besser als beim h^--Spektrum. Doch auch hier erklärt eine niedrige Ausfriertemperatur von 120 MeV die Daten nicht. Am besten passen Theorie und Experiment bei einer Temperatur von 150 MeV zusammen.

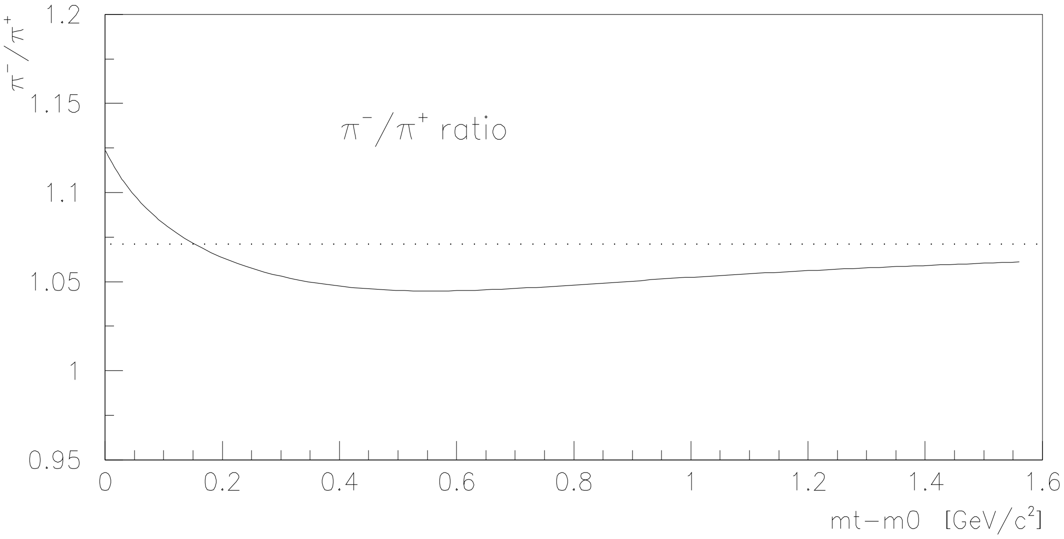

Abbildung 5.9 Modelliertes π^-/π^+ Verhältnis.

Zuletzt wurde in Schaubild 5.9 das Verhältnis zwischen π^- und π^+ über den betrachteten $(\mathrm{m_t} - \mathrm{m_0})$-Bereich aufgetragen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß beide Spektren nicht normiert sind. Da jedoch das Verhältnis der thermischen Pionen aus dem erweiterten Modell bekannt ist, wurden die modellierten Pionspektren entsprechend skaliert. Wie auch die experimentellen Daten von NA44 in Abb. 5.10 zeigt das modellierte π^-/π^+-Verhältnis eine Überhöhung bei kleinem $\mathrm{m_t}$.

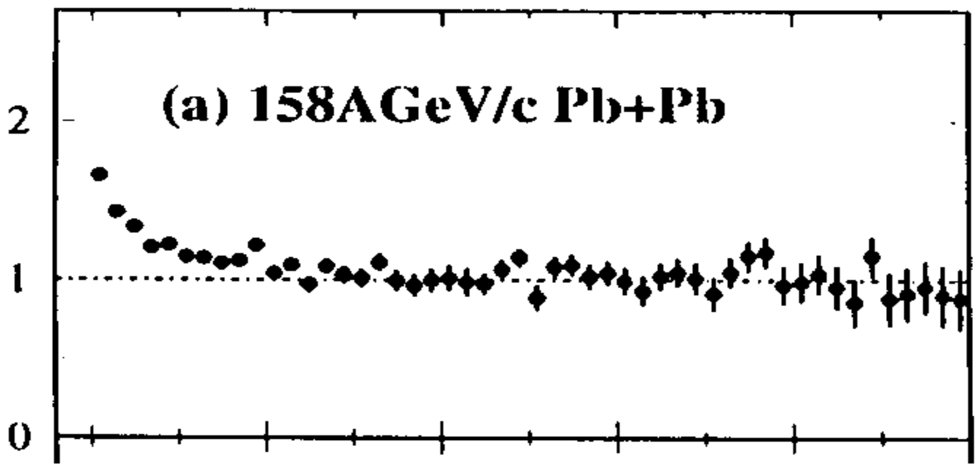

Abbildung 5.10 π^-/π^+ Verhältnis von NA44 aus [35] aufgetragen über $(\mathrm{m_t} - \mathrm{m_0})$ im Bereich zwischen 0 und 500 MeV.

Der absolute Betrag dieser Überhöhung bleibt jedoch weit hinter den Daten zurück. Bei $(m_t - m_0) \geq 500$ MeV nähert sich das Modellspektrum schließlich von unten dem Verhältnis der thermischen Pionen, das dem erweiterten Modell entnommen wurde.

5.5 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorangegangenen Abschnitte haben verdeutlicht, daß die Resonanzzerfälle einen nicht zu vernachlässigenden Anteil an Form und Steigung der Pionspektren haben – sogar über Transversalimpulse von 1.5 GeV/c^2 hinaus. Weiterhin hat sich gezeigt, daß die ursprünglich erwartete Ausfriertemperatur von 120 MeV nicht mit den Daten von NA49 und CERES verträglich ist. Die Ergebnisse der π^- Modellierung legen sogar nahe, daß chemischer und thermischer *freeze-out* bei gleicher Temperatur geschieht. Der Vergleich der kombinierten π^+ und π^- Daten korrigiert diesen Eindruck jedoch nach unten auf eine thermische Ausfriertemperatur um die 150 MeV – und damit deutlich niedriger als der chemische *freeze-out* bei T=175 MeV.

Es würde sich sicher lohnen, die Pionspektren bei einer höheren Temperatur konsistent neu zu modellieren. Dabei wäre interessant zu erfahren, wie stark sich die Kurvenform ändert, wenn auch die Resonanzen und nicht nur die thermischen Pionen bei einer hohen Temperatur erzeugt werden. Und nicht nur die Pionen – auch andere Hadronspezies dürften bei hohen thermischen *freeze-out* Temperaturen durch Resonanzzerfälle beieinflußt sein.

Obwohl die deutlich steigende Rechenzeit problematisch ist, wäre ebenfalls interessant, wie sich das Modellspektrum bei Integration über Rapiditätsbereiche ändert. Dann wäre der Vergleich mit den Daten aussagekräftiger, da sich der inverse Steigungsparameter der transversalen Massenspektren mit der Rapidität verändert (siehe z.B. [27]).

Abschließend läßt sich feststellen, daß Teilchenverhältnisse, die durch den chemischen *freeze-out* geprägt sind, in sehr guter Näherung durch statistische Modelle reproduziert werden, so daß angenommen werden kann, daß sich der Feuerball zu diesem Zeitpunkt im Gleichgewicht befindet.

Spektren, die in erster Linie den Moment des thermischen *freeze-outs* widerspiegeln, lassen sich nicht so eindeutig mit Hilfe der einfachen Statistik beschreiben. Die Expansion des Feuerballs hat einen spürbaren Einfluß auf die Spektren und wurde deshalb auch im Pionmodell berücksichtigt. Möglicherweise tragen jedoch auch andere dynamische Effekte zur Kurvenform der Pionspektren bei, so daß die Prozesse vielfältiger sind, als daß sie von der thermodynamischen Statistik allein hervorgerufen werden können.

A Liste aller Modell-Hadrondichten nach Pb+Pb-Kollisionen

T=175 MeV, μ_B=270 MeV, μ_S=77.93 MeV, μ_{I_3}=-5.52.
Radius des Feuerballs = 8.35 fm.
Druck nach Gl. 2.19 = 114.4 MeV/fm^3.
Energiedichte = 610.2 MeV/fm^3.

n corr: thermische Teilchendichte mit *excluded volume* Korrektur.
n decay: Teilchendichte nach Zerfällen.

num	Name	n corr	n decay
1	Pi +	0.0371922	0.210426
2	Pi -	0.0398355	0.220489
3	Pi 0	0.0388719	0.24004
4	Eta	0.0104764	0.0203606
5	Rho +	0.0124488	0.0207203
6	Rho -	0.0132618	0.0212087
7	Rho 0	0.0128488	0.0226074
8	Omega	0.0121398	0.0164821
9	Eta'	0.00188102	0.00188102
10	f0 980	0.00170346	0.00170346
11	a0 + 980	0.00162486	0.00198062
12	a0 - 980	0.00173075	0.00208651
13	a0 0 980	0.00167697	0.00175312
14	Phi 0	0.00428068	0.00428068
15	h1 1170	0.00214728	0.00214728
16	b1 + 1235	0.00156535	0.00156535
17	b1 - 1235	0.00166731	0.00166731
18	b1 0 1235	0.00161553	0.00161553
19	a1 + 1260	0.00157271	0.00157271

num	Name	n corr	n decay
20	a1 - 1260	0.00167514	0.00167514
21	a1 0 1260	0.00162311	0.00162311
22	f2 1270	0.00218938	0.00218938
23	f1 1285	0.00127095	0.00127095
24	Eta 1295	0.00039841	0.00039841
25	Pi + 1300	0.000377014	0.000377014
26	Pi - 1300	0.000401568	0.000401568
27	Pi 0 1300	0.000389097	0.000389097
28	a2 + 1320	0.00173096	0.00173096
29	a2 - 1320	0.0018437	0.0018437
30	a2 0 1320	0.00178644	0.00178644
31	f0 1370	0.000278953	0.000517398
32	f1 1420	0.00063686	0.00063686
33	Omega 1420	0.000661818	0.000661818
34	Eta 1440	0.000224884	0.000224884
35	Rho + 1450	0.000513856	0.000513856
36	Rho - 1450	0.000547319	0.000547319
37	Rho 0 1450	0.000530324	0.000530324
38	K +	0.0198626	0.0414127
39	K -	0.00831946	0.0214525
40	K 0	0.0202056	0.0408604
41	anti-K 0	0.00794081	0.0202148
42	K* +	0.0116265	0.0146703
43	K* -	0.00491835	0.00630233
44	K* 0	0.0117651	0.0147844
45	anti-K* 0	0.00467243	0.00606443
46	K1 + 1270	0.00203777	0.00203777
47	K1 - 1270	0.000862971	0.000862971
48	K1 0 1270	0.00210309	0.00210309
49	anti-K1 0 1270	0.000836173	0.000836173
50	K1 + 1400	0.00110339	0.00110339
51	K1 - 1400	0.000467308	0.000467308
52	K1 0 1400	0.00113875	0.00113875
53	anti-K1 0 1400	0.000452797	0.000452797
54	K* + 1410	0.00105172	0.00105172
55	K* - 1410	0.000445425	0.000445425
56	K* 0 1410	0.00108542	0.00108542
57	anti-K* 0 1410	0.000431593	0.000431593
58	K*0 + 1430	0.00032308	0.000905871
59	K*0 - 1430	0.000136832	0.000373453

num	Name	n corr	n decay
60	K*0 0 1430	0.000333435	0.000910085
61	anti-K*0 0 1430	0.000132583	0.000371723
62	K2* + 1430	0.00164677	0.00164677
63	K2* - 1430	0.000697444	0.000697444
64	K2* 0 1430	0.00164329	0.00164329
65	anti-K2*0 1430	0.000653422	0.000653422
66	Proton	0.0187799	0.064279
67	Neutron	0.0192681	0.0663525
68	p 1440	0.00183587	0.00291437
69	n 1440	0.00189469	0.00303129
70	p 1520	0.00249426	0.00249426
71	n 1520	0.00257417	0.00257417
72	p 1535	0.00115949	0.00115949
73	n 1535	0.00119664	0.00119664
74	p 1650-1720	0.00654548	0.00654548
75	n 1650-1720	0.00675522	0.00675522
76	Delta ++	0.00955515	0.0138918
77	Delta +	0.00986106	0.0142812
78	Delta 0	0.0101768	0.014681
79	Delta -	0.0105026	0.0150915
80	Delta++1600	0.00163655	0.00163655
81	Delta+ 1600	0.00168899	0.00168899
82	Delta0 1600	0.00174311	0.00174311
83	Delta- 1600	0.00179896	0.00179896
84	Delta++1620	0.000741942	0.000741942
85	Delta+ 1620	0.000765715	0.000765715
86	Delta0 1620	0.000790251	0.000790251
87	Delta- 1620	0.000815572	0.000815572
88	Delta++1700	0.00100122	0.00100122
89	Delta+ 1700	0.0010333	0.0010333
90	Delta0 1700	0.00106641	0.00106641
91	Delta- 1700	0.00110058	0.00110058
92	Delta++1900-50	0.00228707	0.00228707
93	Delta+ 1900-50	0.00236036	0.00236036
94	Delta0 1900-50	0.002436	0.002436
95	Delta- 1900-50	0.00251406	0.00251406
96	anti-Proton	0.000890219	0.00319741
97	anti-Neutron	0.000857617	0.0030887
98	anti-p 1440	8.66095e-05	0.000138555
99	anti-n 1440	8.39202e-05	0.00013321

num	Name	n corr	n decay
100	anti-p 1520	0.000117656	0.000117656
101	anti-n 1520	0.000114003	0.000114003
102	anti-p 1535	5.46932e-05	5.46932e-05
103	anti-n 1535	5.2995e-05	5.2995e-05
104	anti-p 1650-1720	0.000308719	0.000308719
105	anti-n 1650-1720	0.000299133	0.000299133
106	anti-Delta ++	0.000480443	0.000703549
107	anti-Delta +	0.000465525	0.00068448
108	anti-Delta 0	0.000451069	0.000665911
109	anti-Delta -	0.000437063	0.000647817
110	anti-Delta++1600	8.22186e-05	8.22186e-05
111	anti-Delta+ 1600	7.96656e-05	7.96656e-05
112	anti-Delta0 1600	7.71919e-05	7.71919e-05
113	anti-Delta- 1600	7.47951e-05	7.47951e-05
114	anti-Delta++1620	3.72739e-05	3.72739e-05
115	anti-Delta+ 1620	3.61165e-05	3.61165e-05
116	anti-Delta0 1620	3.4995e-05	3.4995e-05
117	anti-Delta- 1620	3.39084e-05	3.39084e-05
118	anti-Delta++1700	5.02974e-05	5.02974e-05
119	anti-Delta+ 1700	4.87357e-05	4.87357e-05
120	anti-Delta0 1700	4.72224e-05	4.72224e-05
121	anti-Delta- 1700	4.57561e-05	4.57561e-05
122	anti-Delta++1900-50	0.000114888	0.000114888
123	anti-Delta+ 1900-50	0.000111321	0.000111321
124	anti-Delta0 1900-50	0.000107865	0.000107865
125	anti-Delta- 1900-50	0.000104515	0.000104515
126	Lambda	0.00550489	0.0245386
127	Lambda 1405	0.00140018	0.00170794
128	Lambda 1520	0.00162338	0.00202508
129	Lambda 1600	0.000549625	0.000549625
130	Lambda 1670	0.000389829	0.000389829
131	Lambda 1690	0.000706499	0.000706499
132	oth.Lambdas	0.00172966	0.00172966
133	Sigma +	0.00379439	0.00643167
134	Sigma 0	0.00385802	0.00651021
135	Sigma -	0.00389358	0.00656226
136	Sigma+ 1385	0.00304674	0.00343149
137	Sigma0 1385	0.00313085	0.00351987
138	Sigma- 1385	0.00317753	0.00357069
139	Sigma+ 1660/70	0.00115173	0.00115173

num	Name	n corr	n decay
140	Sigma0 1660/70	0.00118864	0.00118864
141	Sigma- 1660/70	0.00122673	0.00122673
142	Sigma+ 1750/75	0.000926253	0.000926253
143	Sigma0 1750/75	0.000955935	0.000955935
144	Sigma- 1750/75	0.000986567	0.000986567
145	Sigma+ 1915/40	0.00053159	0.00053159
146	Sigma0 1915/40	0.000548625	0.000548625
147	Sigma- 1915/40	0.000566206	0.000566206
148	Xi 0	0.00136988	0.00250927
149	Xi -	0.00137151	0.00248134
150	Xi 0 1530	0.000966719	0.00101379
151	Xi - 1530	0.000982296	0.00102888
152	Xi 0 1690	0.000222762	0.000222762
153	Xi - 1690	0.000229901	0.000229901
154	Xi 0 1820	0.000230438	0.000230438
155	Xi - 1820	0.000237823	0.000237823
156	Xi 0 1950	6.10311e-05	6.10311e-05
157	Xi - 1950	6.29869e-05	6.29869e-05
158	Omega -	0.000316066	0.000316066
159	anti-Lambda	0.000613768	0.00285107
160	anti-Lambda 1405	0.000155949	0.000190219
161	anti-Lambda 1520	0.000180786	0.000225516
162	anti-Lambda 1600	6.12055e-05	6.12055e-05
163	anti-Lambda 1670	4.34096e-05	4.34096e-05
164	anti-Lambda 1690	7.8672e-05	7.8672e-05
165	anti-oth.Lambdas	0.0001926	0.0001926
166	anti-Sigma +	0.000450394	0.000769975
167	anti-Sigma 0	0.000429953	0.000746968
168	anti-Sigma -	0.000407386	0.000721913
169	anti-Sigma+ 1385	0.000361446	0.000405226
170	anti-Sigma0 1385	0.000348719	0.000392037
171	anti-Sigma- 1385	0.00033228	0.000375123
172	anti-Sigma+ 1660/70	0.000136603	0.000136603
173	anti-Sigma0 1660/70	0.000132361	0.000132361
174	anti-Sigma- 1660/70	0.000128251	0.000128251
175	anti-Sigma+ 1750/75	0.000109857	0.000109857
176	anti-Sigma0 1750/75	0.000106446	0.000106446
177	anti-Sigma- 1750/75	0.000103141	0.000103141
178	anti-Sigma+ 1915/40	6.30473e-05	6.30473e-05
179	anti-Sigma0 1915/40	6.10897e-05	6.10897e-05

num	Name	n corr	n decay
180	anti-Sigma- 1915/40	5.91928e-05	5.91928e-05
181	anti-Xi 0	0.000383705	0.000704509
182	anti-Xi -	0.000360673	0.000670141
183	anti-Xi 0 1530	0.00027072	0.000283359
184	anti-Xi - 1530	0.000258264	0.000271036
185	anti-Xi 0 1690	6.2379e-05	6.2379e-05
186	anti-Xi - 1690	6.04421e-05	6.04421e-05
187	anti-Xi 0 1820	6.45271e-05	6.45271e-05
188	anti-Xi - 1820	6.25235e-05	6.25235e-05
189	anti-Xi 0 1950	1.70897e-05	1.70897e-05
190	anti-Xi - 1950	1.65591e-05	1.65591e-05
191	anti-Omega -	0.000208963	0.000208963
192	Deuteron	0.00153942	0.00153942
193	anti-Deuteron	3.21431e-06	3.21431e-06

Literaturverzeichnis

[1] F. Karsch, Nucl. Phys. A **590** (1995) 367c.

[2] B.Povh, K.Rith, C.Scholz, F.Zetsche, *Teilchen und Kerne*, (1995) Heidelberg, Springer-Verlag.

[3] U. Heinz, Nucl. Phys. A **566** (1994) 205c.

[4] J. Sollfrank, U. Heinz, *Quark-Gluon Plasma 2* (1995), R.C. Hwa (Eds.), World Scientific.

[5] U. Heinz, Nucl. Phys. A **638** (1998), im Druck.

[6] R.D. Pisarski, Phys. Lett. B **110** (1982) 155.

[7] G.E. Brown, M. Rho, Phys, Rev. Lett. **66** (1991) 2700.

[8] R.J. Furnstahl, T. Hatsuda, S.H. Lee, Phys. Rev. D **42** (1990) 1744.

[9] V. Bernard, U. Meißner, Phys. Lett. B **227** (1989) 465.

[10] H. Horner, *Statistische Physik*, Vorlesungsskript SS 1995, Universität Heidelberg.

[11] F. Reif, *Physikalische Statistik und Physik der Wärme*, (1976) Berlin, Verlag de Gruyter.

[12] F. Becattini, hep-ph/9708248 (1997).

[13] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels, N. Xu, Phys. Lett. B **365** (1996) 1.

[14] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels, N. Xu, Phys. Lett. B **344** (1995) 43.

[15] J. Cleymans, H. Satz, Z. Phys C **57** (1993) 135.

[16] J. Cleymans, D. Elliot, H. Satz, R.L. Thews, Z. Phys. C **74** (1997) 319.

[17] D.H. Rischke, M.I. Gorenstein, H. Stöcker, W. Greiner, Z. Phys. C **51**, (1990) 485.

[18] G. Yen, M. Gorenstein, W. Greiner, S.N. Yang, nucl-th/9711062 (1997).

[19] Physical Review D **54**, *Particles and Fields* (1996).

[20] J. Barrette et al., E814 Coll., Phys. Lett. B **333** (1994) 33.
N. Xu, E814 Coll. Nucl. Phys. A **566** (1994) 585c.

[21] J. Cleymans, Vortrag, *Third International Conference on Physics and Astrophysics of Quark-Gluon Plasma* Jaipur, Indien (1997).

[22] J. Sollfrank, P. Koch, U. Heinz, Phys. Lett. B **252** (1990) 256.
J. Sollfrank, P, Koch, U. Heinz, Z. Phys. C **52** (1991) 593.

[23] K.S. Lee, U. Heinz, E. Schnedermann, Z. Phys. C **48** (1990) 525.
E. Schnedermann, J. Sollfrank, U. Heinz, Phys. Rev. C **48** 5 (1993) 2462.

[24] G.E. Brown, J. Stachel, G.M. Welke, Phys. Lett. B **253** (1991) 19.

[25] M. Kaneta, NA44 Coll., Nucl. Phys. A **638** (1998), im Druck.

[26] A. Sakaguchi, NA44 Coll., Nucl. Phys. A **638** (1998), im Druck.

[27] P.G. Jones, NA49 Coll., Nucl. Phys. A **610** (1996), 188c.

[28] J. Günther, Doktorarbeit, Frankfurt (1998) 152.

[29] G. Roland, NA49 Coll., Nucl. Phys. A **638** (1998), im Druck.
F. Becattini, M. Gazdzicki, J. Sollfrank, hep-ph/9710529, (1997)

[30] D. Röhrich, *Proceedings of the International Workshop XXV on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Exitations*, Hirschegg (1997) 299.

[31] F. Pühlhofer, Na49 Coll., Nucl. Phys. A **638** (1998), im Druck.

[32] Frank Gabler, private Mitteilung.

[33] I. Kralik, WA97 Coll., Nucl. Phys. A **638** (1998), im Druck.

[34] H. Appelshäuser et al., NA49 Coll., Euro. Phys. J. C2 **611** (1998).

[35] N. Xu, NA44 Coll., Nucl. Phys. A **610** (1996) 175c.

[36] F. Ceretto, Doktorarbeit, Heidelberg (1998) 61.

[37] F. Ceretto, Ceres-Coll., Nucl. Phys. A **638** (1998), im Druck.

[38] C. Blume, Doktorarbeit, Münster (1998).

Danksagung

Ich bedanke mich bei meiner Betreuerin, Frau Prof. Dr. Stachel für ihre Unterstützung und die viele Geduld, die sie mit mir gehabt hat. Hannes danke ich für das Probelesen meiner Arbeit und das besorgte Nachfragen, wenn ich am Telefon völlig deprimiert klang. Jörg danke ich ganz herzlich für all die Kleinigkeiten, ohne die diese Arbeit wahrscheinlich in einem Nervenzusammenbruch geendet hätte: angefangen vom Neuinstallieren aller schreibens-notwendigen Programme, über das intensive Korrekturlesen meiner Arbeit, der seelisch-moralischen Unterstützung im Kampf gegen Welt und Computer, die Hilfe bei der Jagd nach den NA49-Daten bis hin zu seinem wunderbaren Kaffee!

Last but not least – Herzlichen Dank an meine Eltern, die mir dieses Studium ermöglicht haben. Ihr habt nie versucht, mir dieses seltsame Studienfach auszureden und seid immer mit Rat und Tat für mich dagewesen!

Erklärung:

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den ....