

# UNIVERSITÄT HEIDELBERG

## Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik

### Mechanik und Thermodynamik

- 211 Gekoppelte Pendel
- 212 Zähigkeit von Flüssigkeiten
- 213 Kreisel
- 221 Adiabatenkoeffizient  $\kappa = c_p/c_v$
- 222 Heißluftmotor
- 223 Messung der Boltzmannkonstante  
Teil I Brownsche Bewegung

### Optik

- 232 Michelson-Interferometer
- 233 Fourieroptik (2-Tages-Versuch)
- 234 Lichtquellen und Gitterspektroskopie



## Versuch 211 Gekoppelte Pendel

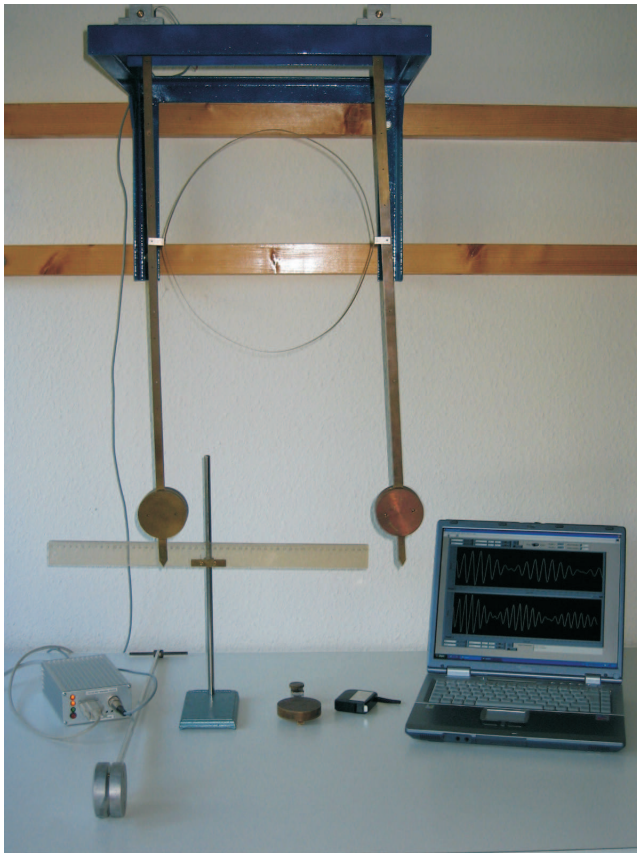


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

### I Messaufbau

- zwei Pendel aus Messing (Dichte:  $\rho=7,5 \text{ g/cm}^3$ )
- Kopplungsfeder (Ring aus Federbronzeband)
- fest montierter magnetischer Winkelaufnehmer
- Analog-Digital Wandler
- PC mit Drucker

### II Literatur

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart
- Sommerfeld-Vorlesungen Band 1
- Demtröder, *Experimentalphysik* Band 1

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: harmonischer Oszillator, gekoppelte Oszillatoren, Dreh- und Trägheitsmoment, physikalisches Pendel, gekoppelte Differentialgleichungen, Schwebung, Normal-schwingungen. Informieren Sie sich auch über die Grundlagen des Hall-Effekts, da die Messung der Auslenkungswinkel der Pendel diesen Effekt ausnutzt.

Verständnisfragen:

1. Überlegen Sie welche Drehmomente auf zwei gekoppelte Pendel wirken. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und skizzieren Sie den Lösungsweg.
2. Beschreiben Sie in Worten die Anfangsbedingungen für die symmetrische-, asymmetrische- und Schwebungsschwingung und diskutieren Sie die jeweiligen Schwingungszustände.
3. Welche Frequenz ist größer, die der symmetrischen oder der antisymmetrischen Schwingung? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Wie lautet die Definition der Begriffe Eigenfrequenz und Eigenschwingung bei einem schwingungsfähigen System von  $N$  Massepunkten? Wie viele Eigenfrequenzen besitzt ein solches System?

## IV Aufgaben

1. Bei drei verschiedenen starken Kopplungen sind die Frequenzen der symmetrischen und der antisymmetrischen Eigenschwingungen von zwei gekoppelten, gleichartigen Messingpendeln zu bestimmen.
2. Für die gleichen Kopplungen wie bei Aufgabe 1 sind Schwebungen zu erzeugen und die Frequenz der Pendel und der Schwebung zu bestimmen.

## V Motivation

„Der niederländische Physiker Christian Huygens beobachtete 1665 ein außerordentlich spannendes Phänomen: Als er wegen einer leichten Erkrankung sein Haus nicht verlassen konnte, betrachtete er gedankenverloren zwei von ihm eigenhändig angefertigte Pendeluhrn, die nebeneinander an der Wand hingen. Schon bald fiel ihm auf, daß sich die beiden Pendel völlig synchron bewegten. Diese Kuriosität beschäftigte Huygens so sehr, daß er über mehrere Stunden die Pendelbewegung verfolgte. Während dieser langen Zeit schwangen sie stets im Gleichtakt. Selbst als der Wissenschaftler eines der beiden Pendel von Hand in einen anderen Schwingungsrhythmus versetzte, mußte er zu seinem großen Erstaunen feststellen, daß sich nach kaum einer halben Stunde der Gleichtakt wieder einstellte. Huygens nahm daraufhin an, daß sich die Uhren gegenseitig beeinflussen müssen, sei es durch Luftbewegung oder schwache, durch die Wand übertragene Vibrationen. Um diese Vermutung zu überprüfen, brachte er die Uhren an gegenüberliegenden Wänden an. Tatsächlich kamen sie zunehmend aus dem Takt und im Laufe eines Tages verlor die eine fünf Sekunden gegenüber der anderen.“<sup>1</sup>

Gekoppelte, schwingungsfähige Systeme spielen in der Physik eine fundamentale Rolle. Ein einfaches Beispiel solch eines Systems sind Moleküle, bei denen einzelne Atome in erster Näherung untereinander elastisch gekoppelt sind ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{NH}_3$

<sup>1</sup>Matthias Ducci, „Periodische und chaotische Oszillationserscheinungen an Metallelektroden und elektrochemische Modelleexperimente zur Erregungsleitung am Nerven“, Dissertation an der Universität Oldenburg, 2000

etc.). Je nach der räumlichen Struktur und den Bindungspartnern können Moleküle verschiedene Schwingungs- und Rotationszustände besitzen. Es können zum Beispiel Drehschwingungen von Atomgruppen um eine Bindungsachse auftreten oder die Bindungspartner schwingen gegeneinander. Finden Änderungen des Rotations- und Schwingungszustands statt, so ist dies, genauso wie bei elektronischen Übergängen in der Atomhülle, mit der Emission elektromagnetischer Strahlung verbunden. Durch Messung der Molekülspektren mit Hilfe der Infrarotspektroskopie können wichtige Moleküldaten wie die Art der Bindung, die Bindungsabstände und Bindungswinkel sowie die „Federkonstante“ bestimmt werden.

Gekoppelte Oszillatoren finden sich auch in jedem Festkörper. Bei einem Kristall sind im Prinzip alle Atome über elektrische Wechselwirkungen miteinander gekoppelt, so daß der Kristall zu Schwingungen angeregt werden kann. Zur mathematischen Beschreibung stellt man sich den Kristall aus regelmäßig angeordneten Massenpunkten vor, die mit ihren nächsten Nachbarn durch Federn gekoppelt sind. Die Auswertung dieses Systems führt zu quantisierten Gitterschwingungen, sogenannte Phononen.

Nicht nur in der Physik, sondern auch in nahezu allen anderen naturwissenschaftlichen Gebieten, stößt man auf gekoppelte Oszillatoren. Beispiele aus der Biologie sind die Schrittmacherzellen des Herzens oder die neuronalen Netzwerke des Gehirns und des Rückenmarks, die rhythmisch-periodische Vorgänge wie Laufen oder Atmen steuern.

Beim vorliegenden Versuch sollen Sie anhand zwei mechanisch gekoppelter Pendel die elementaren Eigenschaften gekoppelter Oszillatoren kennenlernen. Sie werden sehen, daß bei entsprechend gewählten Anfangsbedingungen die Gesamtenergie zwischen den beiden Pendeln hin und her wechselt. Andere Anfangsbedingungen führen zu synchronen oder antisymmetrischen Schwingungen. Desweiteren werden Sie den Einfluss der Kopplungsstärke auf die Eigenfrequenzen untersuchen und ein System mit unterschiedlich schweren Pendel analysieren.

Um die Analogie zu anderen schwingungsfähigen Systemen zu erkennen, sollen Sie qualitativ das Verhalten von elektrisch gekoppelten Schwingkreisen beobachten.

## VI Grundlagen

Um den Schwingungszustand eines gekoppelten Pendels zu beschreiben, müssen zunächst die Differentialgleichungen für die einzelnen Pendel aufgestellt wer-

den. Betrachten wir zunächst ein einzelnes, ungekoppeltes Pendel mit dem Trägheitsmoment  $J$  und dem Direktionsmoment  $D = mgL$ , wobei  $L$  die Pendellänge,  $m$  die Masse und  $g$  die Erdbeschleunigung darstellen. Für das Pendel gilt für kleine Winkel  $\varphi$  die Differentialgleichung:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi. \tag{1}$$

Die Lösung beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{2}$$

Werden nun zwei solcher Pendel durch eine Feder mit dem Direktionsmoment  $D' = D_F l^2$  ( $D_F$  beschreibt die Federkonstante und  $l$  die Länge von der Feder-aufhängung zur Pendelachse) gekoppelt, so wirken zusätzliche Drehmomente  $M_i$ , die von den jeweiligen Auslenkungswinkeln  $\varphi_1, \varphi_2$  abhängen:

$$\text{Pendel 1: } M_1 = D'(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{3}$$

$$\text{Pendel 2: } M_2 = D'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Diese zusätzlichen Drehmomente, müssen bei der Differentialgleichung des freien Pendels (1) hinzuaddiert werden. Wir erhalten somit ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen,

$$J\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 + D'(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{4}$$

$$J\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D'(\varphi_1 - \varphi_2),$$

die sich leicht entkoppelt lassen, wenn man  $u = \varphi_1 + \varphi_2$  und  $v = \varphi_1 - \varphi_2$  substituiert (Hinweis: Addieren und Subtrahieren Sie jeweils die Gleichungen (4) und führen Sie dann die Substitution durch). Damit erhalten wir ein einfaches System von zwei unabhängigen Differentialgleichungen:

$$J\ddot{u} + Du = 0 \tag{5}$$

$$J\ddot{v} + (D + 2D')v = 0.$$

Die Lösungen sind harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen  $\omega_1, \omega_2$ :

$$u = u(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t, \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \tag{6}$$

$$v = v(t) = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t, \quad \text{mit } \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}}$$

Durch erneute Substitution mit  $\varphi_1 = \frac{1}{2}(u + v)$  und  $\varphi_2 = \frac{1}{2}(u - v)$  erhalten wir schließlich die Gleichungen für die Auslenkungswinkel der Pendel:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \tag{7}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t - B_2 \sin \omega_2 t).$$

Diese allgemeinen Lösungen beschreiben auf den ersten Blick eine recht komplexe Bewegung der Pendel. Für bestimmte Anfangsbedingungen ergeben sich allerdings sehr anschauliche Schwingungsgleichungen. Dazu müssen die im folgenden besprochenen Anfangsbedingungen  $\varphi_i(t=0)$  und  $\dot{\varphi}_i(t=0)$  in die Gleichungen (7) eingesetzt werden und die Koeffizienten  $A_i$  und  $B_i$  bestimmt werden.

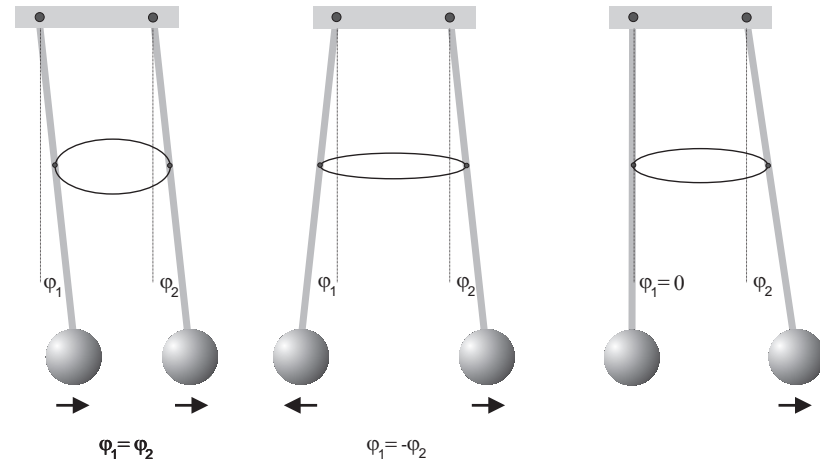


Abbildung 2: Schwingungsformen des gekoppelten Pendel für unterschiedliche Randbedingungen. Von links nach rechts: symmetrische Schwingung, antisymmetrische Schwingung, Schwebung.

Wir wollen drei Spezialfälle, wie sie in Abbildung 2 skizziert sind, genauer betrachten:

### 1. Symmetrische Schwingung

Beide Pendel werden um den gleichen Winkel ausgelenkt und zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleichzeitig losgelassen.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Für die Koeffizienten erhalten wir:

$$A_1 = 2\varphi_0, A_2 = B_1 = B_2 = 0 \quad (9)$$

und damit schließlich

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_1 t. \quad (10)$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch und phasengleich mit der Frequenz  $\omega_1$ . Nach Gleichung (6) hängt  $\omega_1$  nicht vom Direktionsmoment der Kopplung ab ( $\omega_1$  hängt nur vom Direktionsmoment  $D$  des freien, ungekoppelten Pendels ab). Die Pendel schwingen also so, als seien sie gar nicht gekoppelt. Dies ist ja auch sofort einzusehen da beide Pendel stets den gleichen Abstand voneinander aufweisen und so die Kopplungsfeder während der Schwingung niemals gestaucht oder gedehnt wird. Die Kopplungsfeder verharrt also stets im gleichen Zustand, wie zu Beginn der Schwingung. Es findet also keine Kopplung von einem Pendel auf das andere statt.

## 2. Asymmetrische Schwingung

Beide Pendel werden gegenphasig um den gleichen Winkelbetrag ausgelenkt und zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleichzeitig losgelassen.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Für die Koeffizienten ergeben sich in diesem Fall:

$$A_2 = 2\varphi_0, A_1 = B_1 = B_2 = 0 \quad (12)$$

und damit schließlich

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (13)$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch aber diesmal gegenphasig mit der Frequenz  $\omega_2$ . Die Frequenz  $\omega_2$  hängt sowohl vom Direktionsmoment des Pendels als auch vom Direktionsmoment der Kopplung ab!

## 3. Schwebungsschwingung

Das eine Pendel verharrt in der Ruhelage während das andere um den Winkel  $\varphi_0$  ausgelenkt wird.

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung:} \quad \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Für die Koeffizienten erhalten wir

$$A_1 = -A_2 = \varphi_0, B_1 = B_2 = 0 \quad (15)$$

und die Schwingungsgleichungen lauten nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Diese Gleichungen beschreiben eine Schwebung. Das zu Beginn ausgelenkte Pendel überträgt allmählich seine Schwingungsenergie auf das anfangs ruhende Pendel bis es schließlich selbst stillsteht. Danach kehrt sich der Vorgang um und das nun schwingende Pendel regt das ruhende Pendel an. Die Schwingung der gekoppelten Pendel wird in diesem Fall durch zwei Frequenzen beschrieben: Zum einen durch die Frequenz  $\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$  mit denen jedes einzelne Pendel schwingt, zum anderen durch die Schwebungsfrequenz  $\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$  mit der die Energie eines Einzelpendels oszilliert.

Die zu den Eigenfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gehörenden Schwingungen werden als Normalschwingungen bezeichnet. Allgemein gilt, dass ein System aus  $N$  gekoppelten Oszillatoren  $N$  Normalschwingungen besitzt. Jede mögliche Schwingung eines einzelnen Oszillators kann immer durch eine Linearkombination dieser Normalschwingungen dargestellt werden. So ist die Schwebungsschwingung eine Linearkombination der beiden Normalschwingungen mit den Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .

<sup>2</sup>In der Literatur wird manchmal auch die Schwebungsfrequenz ohne den Faktor  $1/2$  durch  $\omega_{II} = \omega_2 - \omega_1$  definiert

### Kopplungsgrad

Um die Stärke der Kopplung zu quantifizieren, definiert man den Kopplungsgrad  $\kappa$  durch

$$\kappa = \frac{D'}{D + D'}. \quad (17)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6) für  $\omega_1$  und  $\omega_2$  erhält man für  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}. \quad (18)$$

Der Kopplungsgrad kann also durch Messung der Schwingungszeiten der Normalschwingungen bestimmt werden.

### Messtechnik

Die Winkelauslenkung beider Pendel wird magnetisch mit Hilfe des Hall-Effekts gemessen. Dazu befindet sich auf der Stirnseite der Pendelachse ein Hall-Sensor, der im homogenen Feld zweier Stabmagnete positioniert ist. Schwingt das Pendel und damit auch der Sensor (relativ zum raumfesten Magnetfeld), so wird eine Hallspannung erzeugt, die proportional zum Sinus des Auslenkungswinkel ist (Abbildung 3).

Die Hall-Spannung wird mit einem Analog-Digital-Wandler digitalisiert und über eine serielle Schnittstelle (RS232) in einen PC eingelesen. Die Daten werden anschließend in die jeweiligen Auslenkungswinkel umgerechnet und als Funktion der Zeit graphisch dargestellt. Neben der graphischen Darstellung der Messwerte wird bei jeder Messung automatisch eine Textdatei angelegt, in der die jeweiligen Messdaten gespeichert werden. Der Name der Datei setzt sich aus dem aktuellen Datum und der Uhrzeit, bei der die Messung beendet wurde, zusammen. Sie finden die Dateien unter C:\Messungen. Damit Sie die Messdaten später richtig zuordnen können, sollten Sie bei jeder Messung im Feld „Dateikommentar“ eine Bemerkung eintragen, die die aktuelle Messung eindeutig beschreibt. Dieser Kommentar wird automatisch mitgespeichert. Zur Bestimmung der Schwingungszeiten können Sie mit Hilfe von verschiedenen Cursors die Kurven ausmessen. Desweiteren können Sie Bereiche auswählen, die vergrößert dargestellt werden sollen (Abbildung 4). Die Bedienung der Software ist weitgehendst selbsterklärend. Über einzelne spezielle Funktionen wird Sie der betreuende Assistent informieren.

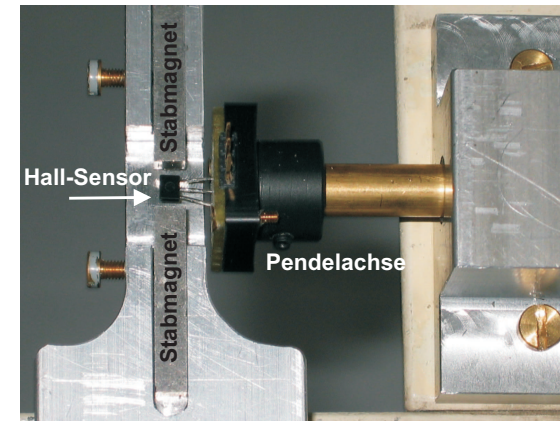


Abbildung 3: Hall-Sensor als Winkelmesser.

## VII Durchführung des Versuchs

1. Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.
2. Schalten Sie die Elektronik des Analog-Digital Wandlers ein und starten Sie das Messprogramm „gekoppelte Pendel“. Eine Verknüpfung des Programms befindet sich auf dem Desktop. Überprüfen Sie zunächst den Nullabgleich der beiden Pendel. Sie können in der Software für jedes Pendel einen Winkel-Offset einstellen, so dass in der Ruhelage der Pendel ein Winkel von  $0^\circ$  angezeigt wird.
3. Messen Sie zunächst ohne Koppelfeder für jedes einzelne Messingpendel die Schwingungsfrequenz. Regen Sie beide Pendel an und starten Sie daraufhin das Messprogramm. Zeichnen Sie mehrere Schwingungsperioden auf und stoppen Sie dann das Programm. Mit den Cursors können Sie nun die Periodendauer der beiden Schwingungen ausmessen. Zur Dokumentation Ihrer Messung sollten Sie diese am besten gleich ausdrucken. Verwenden Sie dazu das Python Programm auf dem Desktop. Ihr Assistent wird Ihnen dabei weiterhelfen.
4. Regen Sie für drei verschiedenen Kopplungsgrade einmal die symmetrische und danach die antisymmetrische Eigenschwingung der beiden Messingpen-

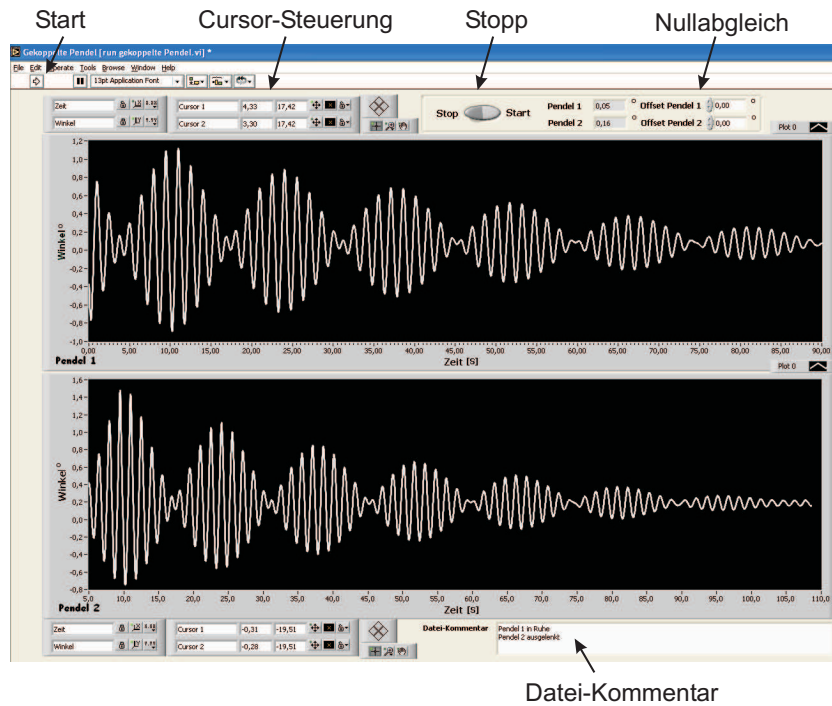


Abbildung 4: Bedienoberfläche der Software.

del an. Die Befestigungslöcher für die Ringfeder ist an der rechten Pendelstange markiert. Notieren Sie, wo die Feder eingehängt wurde und messen Sie die Länge bis zur Pendelachse. Ob eine Eigenschwingung rein angeregt ist, erkennt man daran, dass die Amplituden beider Pendel gleichzeitig monoton abnehmen, während bei gemischter Anregung die Amplituden mehr oder weniger schwanken. Allerdings ist es schwierig die symmetrische Schwingung sauber anzuregen, da die Aufhängung der Feder immer eine leichte Kopplung erzeugt. Die Feder überträgt nicht nur Zug-, sondern auch Druckkräfte. Für kleine Auslenkungen ist die Kraft ausreichend linear von der Auslenkung abhängig. Für große Auslenkungen ist ein solcher Ring aber bei Zug viel steifer als bei Druck. Die differentiellen Federkonstanten in den beiden Lagen unterscheiden sich dann um einen Faktor zehn! Messen

Sie die Frequenzen der Eigenschwingungen und Drucken Sie die Messungen aus.

- Regen Sie beide Eigenschwingungen gleichzeitig an, indem Sie das eine Pendel in der Ruhelage festhalten und erst freigeben, nachdem Sie das andere Pendel bei der Maximalauslenkung losgelassen haben. Bei dieser Anregungsform („gemischte Anregung“) sind die Schwingungs- und die Schwebungsfrequenzen für die gleichen Kopplungen wie zuvor zu messen. Auch hier wieder die Messungen gleich ausdrucken. Bei der Schwebung kommt immer nur das eine Pendel wieder voll zur Ruhe, welches am Anfang in Ruhe war. Sie sehen, auch zwei Pendel mit gleicher Schwingungsdauer können bei einer Kopplung ein überraschendes Verhalten zeigen!
- Zusätzlich zu den gekoppelten Pendeln ist noch ein Aufbau vorhanden, an dem Sie die Kopplung zweier elektrischer Schwingkreise mit Hilfe eines Oszilloskops beobachten können. Die Kopplung erfolgt induktiv über die Spulen. Die Kopplungsstärke können Sie durch variieren des Abstands zwischen den Spulen einstellen.

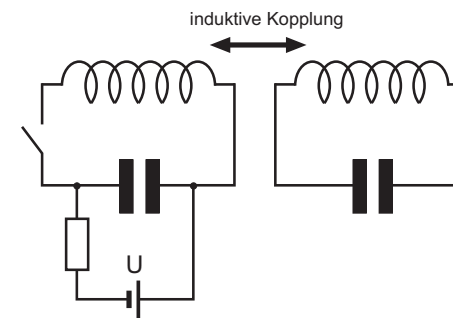


Abbildung 5: Gekoppelte elektrische Schwingkreise. Die Kopplung erfolgt induktiv über die Spulen. Der Kondensator im linken Schaltkreis wird über den Widerstand geladen. Wird der Schalter geschlossen, so wird im linken Kreis eine Schwingung angeregt. Durch die Kopplung überträgt sich allmählich, ganz analog zu den gekoppelten Pendeln, die Energie in den rechten Schwingkreis und wieder zurück. Die Oszillation kann durch Abgriff über den Spulen mit einem Oszilloskop dargestellt werden.

Beobachten Sie für unterschiedliche Kopplungen (Spulenabstände), die



Schwingungen beider Schwingkreise. Hinweise zur Bedienung des Oszilloskops liegen aus.

## VIII Auswertung

Die Frequenzen der reinen  $(\omega_1, \omega_2)$  und der gemischten Schwingungsformen  $(\omega_I, \omega_{II})$  sind zu berechnen und miteinander zu vergleichen. Bei der gemischten Anregung sind die direkt gemessenen Frequenzen mit den theoretischen Werten  $\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$  und  $\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$  zu vergleichen. Tragen Sie dazu die gemessenen und theoretischen Werte der Schwingungs- und Schwebungsfrequenzen mit ihren Fehlern in eine Tabelle ein.

Berechnen Sie aus den gemessenen Schwingungsdauern die Kopplungsgrade. Für schwache Kopplungen ( $D \gg D'$ ) können Sie Gleichung (17) durch

$$\kappa = \frac{D'}{D} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_1^2} \quad (19)$$

nähern. Beachten Sie, dass  $D'$  proportional zu  $l^2$  ( $l$  ist die Länge vom Aufhängungspunkt der Feder zur Pendelachse). Die Verhältnisse zweier Kopplungsgrade entsprechen dann dem Quadrat der Verhältnisse der Koppellängen. Berechnen Sie die Verhältnisse der Kopplungsgrade die Sie aus den gemessenen Frequenzen bestimmt haben und vergleichen Sie diese mit den Verhältnissen der Kopplungsgraden die Sie aus der Längenmessung erhalten.



## Versuch 212

### Zähigkeit von Flüssigkeiten

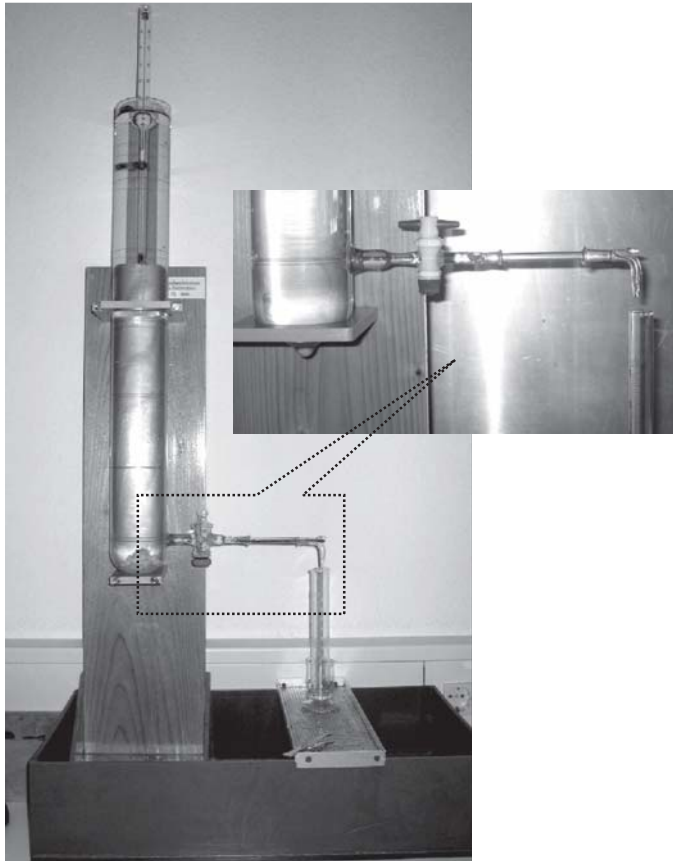


Abbildung 1: Kugelfallviskosimeter und Kapillarviskosimeter.

## I Messaufbau

- Messzylinder aus Hartglas mit Messskaler, gefüllt mit Polyethylenglykol. Am unteren Teil des Zylinders befindet sich eine Präzisionskapillare (Länge:  $100 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$ , Kapillardurchmesser  $1,5 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm}$ ).
- Kugeln aus „Hostaform C“ mit folgenden Durchmessern:  $2r = 2,0 / 3,0 / 4,0 / 5,0 / 6,0 / 7,144 / 8,0 / 9,0 \text{ mm}$  ( $\pm 1\%$ ). Die Dichte der Kugeln und die Dichte von Polyethylenglykol ist im Anhang angegeben.
- Thermometer
- Pinzetten, Bechergläser
- Maßstab
- Stoppuhren

## II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Die Ableitung des Gesetz von Stokes finden Sie in W. Nolting, *Grundkurs: Theoretische Physik, Band 1*.
- Homepage des Praktikums (<http://www.physikpraktika.uni-hd.de>).

## III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Reale Flüssigkeiten, innere Reibung, Zähigkeit (Viskosität), Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit, laminare Strömung, Stokes'sches Gesetz, Gesetz von Hagen-Poiseuille, Reynold'sches Ähnlichkeitsgesetz, Reynoldszahl, Turbulenz.

**Für Mathematiker und Physiker:** Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit  $v(t)$  einer in eine Flüssigkeit fallende Kugel. Stellen Sie

dazu mit Hilfe den an der Kugel angreifenden Kräften eine Differentialgleichung auf und lösen Sie diese unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $v(0) = 0$ . Nach welcher Zeit ist die Geschwindigkeit der Kugel nahezu konstant?

Verständnisfragen:

1. Welche Kräfte wirken auf eine fallende Kugel in einer Flüssigkeit und wie lautet die Differentialgleichung?
2. Wann erreicht die fallende Kugel ihre Endgeschwindigkeit?
3. Erläutern Sie den Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung.
4. Was besagt die Reynoldszahl? Wie groß ist die kritische Reynoldszahl für eine Kugel die in einer Flüssigkeit fällt und wie groß ist sie bei einer Rohrströmung?
5. Welche Kraft wirkt, wenn zwei parallele Platten, zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet, gegeneinander verschoben wird?
6. Was besagt das Gesetz von Hagen-Poiseuille?
7. Wie erhöht sich der Fluss, wenn der Rohrdurchmesser bei konstanten Druck verdoppelt wird?

## IV Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Viskosität von Polyethylenglykol nach Stokes mit einem Kugelfallviskosimeter. Zusätzlich ist die Gültigkeitsgrenze des Stokes'schen Gesetzes zu überprüfen, indem der Übergang von laminarer zu turbulenter Umströmung der Kugel (Wirbelablösung) ermittelt wird.
2. Bestimmen Sie die Zähigkeit von Polyethylenglykol nach Hagen-Poiseuille mit dem Kapillarviskosimeter.
3. Vergleichen Sie die unter 1. und 2. gewonnenen Werte miteinander.

## V Grundlagen

Bewegt sich ein Körper mit **konstanter Geschwindigkeit** in einem fluiden oder gasförmigen Medium, so ist trotz der gleichförmigen Bewegung eine Kraft notwendig, um die Bewegung aufrecht zu erhalten. Dies scheint zunächst widersprüchlich zum zweiten Newtonschen Gesetz zu sein, nach dem ein Körper beschleunigt wird wenn auf ihn eine Kraft wirkt. Allerdings gilt dies nur im Vakuum. Bei der Bewegung in einem Medium wirken zusätzlich Reibungskräfte, die dazu führen, dass bei einer konstanten äußeren Kraft, die Nettokraft verschwindet und sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Die Reibung wird bei Flüssigkeiten durch zwischenmolekulare Kräfte verursacht. Diese führt dazu, dass bei der Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit, **das Medium teilweise mitbewegt wird**. Sie alle haben dies schon beim morgendliche Frühstück erlebt. Taucht man einen Löffel in ein Honigglas und zieht diesen dann senkrecht nach oben heraus, so bleibt aufgrund der Adhäsion eine dünne Honigschicht am Löffel haften. Diese Schicht wechselwirkt mit benachbarten Molekülen, so dass beim Herausziehen ein ganzer Honigklumpen mitbewegt wird. Die Reibungskräfte lassen sich auch beim Umrühren von Honig oder Marmelade beobachten. Sie müssen eine deutliche Kraft aufwenden um den Löffel im Glas zu bewegen. Beim Umrühren von Kaffee ist dieser Effekt kaum wahrzunehmen. Offenbar hängt die Reibungskraft von der „Zähigkeit“ der Flüssigkeit ab.

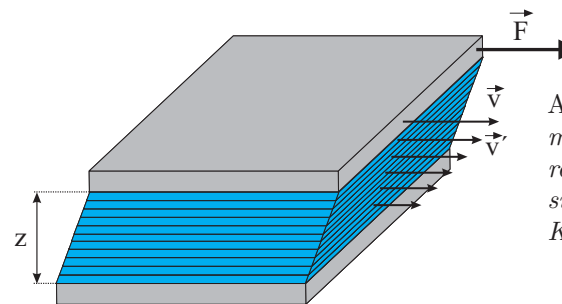


Abbildung 2: Gedankenexperiment zur Bestimmung der inneren Reibung. Die Flüssigkeit soll sich schichtweise in Richtung der Kraft bewegen.

Um die Reibungskräfte eines Körpers in einer Flüssigkeit zu quantifizieren, betrachten wir die Anordnung nach Abbildung 2. Bei diesem (Gedanken-)Experiment befindet sich zwischen zwei gleich großen Platten, die im Abstand  $z$  parallel zueinander ausgerichtet sind, eine Flüssigkeit. Die untere Platte ruht. Auf die obere Platte wird eine Kraft ausgeübt, so dass sie sich mit konstanter

Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Da an der oberen Platte aufgrund der Adhäsion ein Flüssigkeitsfilm haftet, bewegt sich dieser mit der Geschwindigkeit der Platte mit. Andererseits beträgt die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfilms die an der unteren, ruhenden Platte haftet, Null. Aus Stetigkeitsgründen müssen daher die dazwischen liegenden Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Die oberste Flüssigkeitsschicht, die sich mit der Platte mitbewegt, übt auf die darunter liegende Schicht eine Tangentialkraft aus und beschleunigt diese auf eine Geschwindigkeit  $v'$ . So beschleunigt jede Schicht die darunterliegende und wird gleichzeitig von dieser nach dem Reaktionsprinzip gebremst.

Experimentell zeigt sich, dass die Kraft  $F$ , die notwendig ist um die obere Platte zu bewegen, proportional zur Fläche  $A$  und zur Geschwindigkeit  $v$  und umgekehrt proportional zum Abstand  $z$  ist. Bewegt sich die obere Platte gleichförmig, so verschwindet die Nettokraft, d.h. die Reibungskraft  $F_r$  ist vom Betrag her gleich groß wie die auf die obere Platte ausgeübte Kraft  $F$ . Für die (Newtonsche) Reibungskraft gilt dann:

$$F_r = \eta A \frac{v}{z}. \tag{1}$$

Für den allgemeinen Fall drückt man diese Gleichung besser durch den Geschwindigkeitsgradienten  $dv/dz$  aus:

$$F_r = \eta A \frac{dv}{dz}. \tag{2}$$

Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  ist eine flüssigkeitsspezifische Größe und wird als dynamische Viskosität, Zähigkeit oder meist auch nur als Viskosität bezeichnet. Für die Maßeinheit gilt nach Gleichung (1):  $[\eta]=\text{Pa s}$ .<sup>1</sup>

Das Newtonsche Reibungsgesetz gilt natürlich auch für andere Körpergeometrien. Gleiten die einzelnen Flüssigkeitsschichten aneinander ab ohne sich zu vermischen, spricht man von einer Schichtströmung oder von einer **laminaren Strömung**. Bei großen Geschwindigkeiten und bei speziellen Körpergeometrien, ist dies nicht mehr der Fall. In der Flüssigkeit kommt es dann zur Bildung von Wirbeln, die die Schichten vermischen. Bei diesen **turbulenten Strömungen** ist der Strömungswiderstand viel größer als bei einer laminaren Strömung, so dass das Newtonsche Reibungsgesetz seine Gültigkeit (Abbildung 3) verliert. **Reynoldszahl**

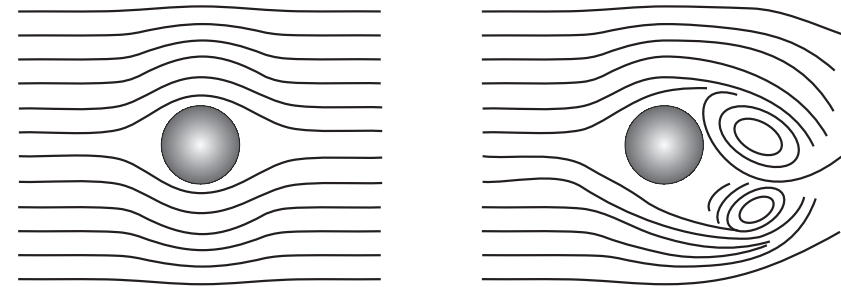


Abbildung 3: *Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit. Links: Laminare Strömung bei der die Flüssigkeit den Körper symmetrisch umfließt. Die einzelnen Schichten gleiten aneinander ab ohne sich zu vermischen. Rechts: Turbulente Strömung bei hohen Geschwindigkeiten. In Folge der Wirbelbildung kommt es zu einer Vermischung der Flüssigkeit.*

Ob sich eine Flüssigkeit laminar oder turbulent verhält, lässt sich mit Hilfe der dimensionslosen Reynoldszahl **abschätzen**. Die Reynoldszahl ist eine semiempirische Größe, die das Verhältnis der (doppelten) kinetischen Energie eines Volumenelements der Flüssigkeit, zu den Reibungsverlusten beschreibt:

$$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}}. \tag{3}$$

Je größer die kinetische Energie der Flüssigkeit, desto instabiler wird die Strömung. Andererseits wirkt die innere Reibung der Flüssigkeit dämpfend und somit stabilisierend auf die Strömungsbewegung. Bei kleinen Reynoldszahlen ist  $E_{kin} \leq W_{Reibung}$  und die Flüssigkeit strömt laminar. Oberhalb eines kritischen Wertes  $Re_{kr}$  tritt dagegen eine turbulente Strömung auf. In diesem Fall gilt:  $E_{kin} \gg W_{Reibung}$ .

Führt man eine charakteristische Länge  $L$  ein, die die Geometrie des Strömungssystems beschreibt, so lässt sich die Reynoldszahl auch wie folgt darstellen:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}, \tag{4}$$

wobei  $v$  die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit beschreibt. Bei einer Rohrströmung ist für  $L$  der Rohrdurchmesser einzusetzen. Bei der Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit beschreibt  $L$  den Durchmesser der Kugel.

<sup>1</sup>In manchen Lehrbüchern findet man auch noch die Einheit Poise: 10 Poise=1 Pa s.

Die kritische Reynoldszahl hängt vom jeweiligen Experiment ab. Beispielsweise zeigt sich experimentell, dass bei der Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr, der Übergang von laminarer zur turbulenter Strömung bei einer Reynoldszahl von  $Re_{kr}=2300$  erfolgt. Natürlich ist der Übergang nicht scharf, so dass auch bei der kritischen oder höheren Werten der Reynoldszahl noch ein laminarer Fluss möglich ist. Allerdings reicht ab der kritischen Reynoldszahl bereits eine kleine Störung aus, um die Strömung in eine turbulente umschlagen zu lassen. Bei der Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit, erfolgt der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung bereits bei viel kleineren Reynoldszahlen. Experimentell zeigt sich, dass hier die kritische Reynoldszahl ungefähr Eins beträgt:  $Re_{kr} \approx 1$

**Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes**

Bewegt sich eine Kugel mit dem Radius  $r$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  durch eine Flüssigkeit, so wirkt auf sie die Reibungskraft:

$$F_r = 6\pi\eta rv. \tag{5}$$

Diese Gleichung wird als das Gesetz von Stokes bezeichnet. Die Herleitung folgt aus dem Newtonschen Reibungsgesetz (1) und findet sich in den meisten Lehrbüchern der theoretischen Mechanik. Zu beachten ist, dass das Stokes'sche Gesetz eine Näherung für laminare Strömungen mit  $Re < 1$  ist und nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten gültig ist. Wir werden an späterer Stelle daher noch Korrekturen anbringen müssen.

Unter Ausnutzung des Stokes'sche Gesetz lässt sich die Viskosität  $\eta$  einer Flüssigkeit bestimmen. Beim Kugelfallviskosimeter wird eine Kugel mit dem Radius  $r$  in die Flüssigkeit, dessen Viskosität bestimmt werden soll, fallen gelassen. Nach einer Beschleunigungsphase bewegt sich die Kugel mit einer konstanten Sinkgeschwindigkeit  $v_s$ . In diesem Fall verschwinden alle an die Kugel angreifende Kräfte, d.h. Gewichtskraft  $F_g = \rho_k V_k g$ , Auftriebskraft  $F_a = -\rho_f V_k g$  und Reibungskraft  $F_r = -6\pi\eta r v_s$  heben sich auf:

$$F_g + F_a + F_r = 0. \tag{6}$$

Dabei beziehen sich die mit  $k$  indizierten Größen auf die Kugel und die mit  $f$  indizierten, auf die Flüssigkeit. Einsetzen der einzelnen Kräfte und Auflösen

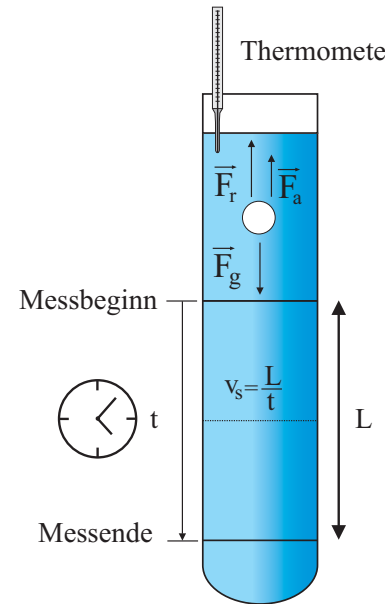


Abbildung 4: Bestimmung der Viskosität einer Flüssigkeit mit einem Kugelfallviskosimeter. Bewegt sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit, heben sich alle angreifenden Kräfte auf.

nach  $\eta$  liefert für die Viskosität der Flüssigkeit:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{v_s} r^2. \tag{7}$$

Durch Messung der Sinkgeschwindigkeit  $v_s$  kann so die Viskosität bestimmt werden.

**Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille: Laminare Rohrströmung**

Eine andere Methode die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen, ist die Messung des Volumenstroms einer laminaren Rohrströmung. Betrachten wir dazu ein Rohr der Länge  $L$  und Radius  $R$  (Abbildung 5). Damit eine Strömung überhaupt möglich ist, muss an den Stirnflächen eine Druckdifferenz  $\Delta p = p_1 - p_2$  vorhanden sein. Im Fall einer laminaren Strömung kann die Bewegung der Flüssigkeit wieder als Schichtströmung interpretiert werden, wobei bei einem Rohr mit kreisförmigen Querschnitt, einzelne Zylindermäntel aneinander abgleiten. Auf einen coaxialen Teilzylinder in der Flüssigkeit mit dem Radius

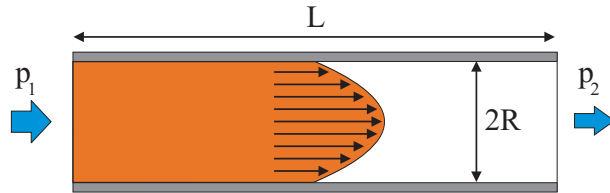


Abbildung 5: *Laminare Rohrströmung. Unter dem Einfluss der Druckdifferenz  $p_1 - p_2$  strömt die Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr mit einem parabol-förmigen Geschwindigkeitsprofil.*

$r < R$ , wirkt aufgrund der Druckdifferenz eine Kraft

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2). \quad (8)$$

Andererseits wirkt auch die Newtonsche Reibungskraft

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}. \quad (9)$$

Bei einer stationären Strömung, bei der sich die einzelnen Schichten mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, muss die Nettokraft verschwinden, d.h.

$F_p = F_r$ :

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = \pi r^2 (p_1 - p_2). \quad (10)$$

Hieraus folgt für den Geschwindigkeitsgradienten

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r. \quad (11)$$

Integration über  $r$  unter Berücksichtigung der Randbedingung  $v(R) = 0$ , liefert für die Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2). \quad (12)$$

Diese Gleichung stellt ein Rotationsparaboloid dar. Die Flüssigkeit besitzt demnach das in Abbildung 5 gezeigte parabolische Geschwindigkeitsprofil.

Um den Volumenstrom, d.h. die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche des Rohres strömt, zu bestimmen, müssen wir über die

gesamte Querschnittsfläche integrieren:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta L}. \quad (13)$$

Beachten Sie die Abhängigkeit von  $R^4$ . Eine Verdopplung des Rohrradius ver-sechzehnfacht den Volumenstrom!

Gleichung (13) wird nach dem deutschen Wasserbau-Ingenieur Gotthilf Hein- rich Ludwig Hagen und nach dem französischen Arzt und Physiologen Poiseuil- le, auch als das Gesetz von Hagen-Poiseuille bezeichnet.

Sind Länge und Radius des Rohres und die Druckdifferenz bekannt, so kann durch Messung des Volumenstroms die Viskosität bestimmt werden.

## VI Durchführung des Versuchs

### 1. Bestimmung der Viskosität nach Stokes mit einem Kugelfallvis- kosimeter

Bei dem Versuch wird die Fallzeit  $\Delta t$  der Kugel zwischen zwei im Ab- stand  $\Delta s$  angebrachten Markierungen gemessen. Die Messungen sind entweder mit steigendem oder mit fallendem Kugelradius durchzuführen. Notieren Sie sich die Temperaturen der Flüssigkeiten während der Messung mit den kleinsten Kugeln.

Legen Sie die Fallstrecke der Kugeln fest und notieren Sie diesen Wert. Der Abstand der ersten Messmarke von der Flüssigkeitsoberfläche ist so zu wählen, dass sich die Kugel beim Durchlaufen der ersten Messmarke, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Lassen Sie von jedem Durchmesser 5 Kugeln die Fall- strecke möglichst in der Rohrachse durchfallen. Zur Bestimmung der Fallzeit dienen die zahlreich beigegebenen Handstoppuhren. Bei den kleinsten Durch- messern empfiehlt sich eine Simultanmessung von mehreren Kugeln durch- zuführen. Damit sich die Messzeiten bei den kleinen Kugeln nicht über einen zu langen Zeitraum erstrecken, können Sie hier eine kürzere Fallstrecke verwen- den. Der Innendurchmesser des Kugelfallgefäßes ist am Viskosimeter angege- ben. Vergessen Sie nicht diesen Wert in Ihr Protokoll aufzunehmen.

Sie müssen bei der Durchführung des Experiments unbedingt darauf achten, dass an den Kugeln keine Luftbläschen haften. Sortieren Sie daher vor dem Einbringen der Kugeln in das Fallgefäß, zunächst einige Kugeln des jeweiligen Durchmessers in ein Becherglas und geben Sie etwas Flüssigkeit mit hinein.

Schwenken Sie das Becherglas vorsichtig um, so dass die Kugeln vollständig benetzt sind und keinerlei Luftbläschen mehr daran zu erkennen sind. Mit der Pinzette werden dann die mit der Flüssigkeit benetzten Kugeln in das Fallgefäß gegeben.

**2. Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille mit einem Kapillarviskosimeter**

Stellen Sie unter den Ausfluss der Kapillare ein Becherglas und öffnen Sie den Hahn, indem Sie ihn parallel zur Kapillare drehen. Warten Sie nach dem Öffnen so lange ab, bis sich die Strömungsverhältnisse stabilisiert haben und eine gleichmäßige Tropfenfolge zu beobachten ist. Sobald dies der Fall ist, stellen Sie einen leeren Messzylinder unter den Ausfluss, starten die Stoppuhr und notieren die Anfangshöhe  $h_A$  der Flüssigkeitssäule. Führen Sie dies am besten gemeinsam mit Ihrem Partner durch, indem einer die Höhe des Flüssigkeitspiegels abliest und der andere gleichzeitig den Messzylinder unterstellt und die Stoppuhr startet. Messen Sie für das Gemisch 1 die Ausströmzeit von ca. 20 cm<sup>3</sup> bis 25 cm<sup>3</sup> der Flüssigkeit. Nachdem diese Mengen ausgeströmt sind, schließen Sie den Hahn und messen erneut die Höhe des Flüssigkeitsspiegels  $h_E$ . Notieren Sie die Raumtemperatur.

Achtung: Da eine Wiederholung der Messung relativ lange dauert, bei einer einmaligen Messung aber die Möglichkeit eines Irrtums besteht, müssen zur Kontrolle Zwischenwerte des Volumens aufgenommen werden. Notieren Sie daher bei laufender Stoppuhr die Ausflusszeit bei 5, 10, 15, 20, 25 cm<sup>3</sup>.

**Achten Sie unbedingt nach Beendigung dieser Messung, dass der Hahn der Kapillare geschlossen ist.**

**VII Auswertung**

Zu 1)

- Nach Gleichung (7) ergibt sich für die Sinkgeschwindigkeit  $v_{lam}$  einer Kugel unter dem Einfluss Stokes'scher Reibung bei laminarer Strömung:

$$v_{lam} = \frac{2}{9} g \frac{\rho_k - \rho_f}{\eta} r^2. \tag{14}$$

Trägt man den Mittelwert der Sinkgeschwindigkeit gegen das Quadrat des Radius auf, so ergibt sich im Gültigkeitsbereich des Stokes'schen Gesetz eine Gerade. Da allerdings die Dichte der Kugeln etwas vom Radius abhängt, ist es besser das Verhältnis  $\bar{v}/(\rho_k - \rho_f)$  gegen  $r^2$  aufzutragen, wobei  $\bar{v}$  den Mittelwert ihrer gemessenen Sinkgeschwindigkeit bei den jeweiligen Radien bezeichnet.

- Das Stokes'sche Gesetz ist nur für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit gültig. Wegen des endlichen Durchmessers des Fallrohres, wird die Sinkgeschwindigkeit verfälscht und systematisch zu klein gemessen, wobei der Fehler mit wachsendem Kugelradius zunimmt. Dies lässt sich durch die Ladenburg'sche Korrektur  $\lambda$  im Stokes'schen Gesetz berücksichtigen:

$$F_r = 6\pi\eta r v \lambda \tag{15}$$

mit

$$\lambda = \left(1 + 2,1 \frac{r}{R}\right), \tag{16}$$

wobei  $R$  den Radius des Fallrohres beschreibt. Bei der Korrektur müssen daher die Sinkgeschwindigkeiten mit dem Faktor  $\lambda$  multipliziert werden. Überlegen Sie sich, ob im Rahmen der Messgenauigkeit der Sinkgeschwindigkeiten der einzelnen Kugeln, eine Korrektur sinnvoll ist und tragen Sie diese gegebenenfalls in das gleiche Diagramm mit ein.

- Legen Sie durch den linearen Bereich eine Gerade die durch den Ursprung geht und bestimmen Sie aus der Steigung die Viskosität. Berechnen Sie mit diesem Viskositätswert für jeden Kugelradius nach Gleichung (14) den zu jedem Messwert  $v$  gehörenden theoretischen Wert  $v_{lam}$ , d.h. die Werte, die auf der extrapolierten Anfangsgeraden liegen. Zusätzlich ist für jeden Kugelradius (Durchmesser  $d$ ) die Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho_f v d}{\eta} \tag{17}$$

zu berechnen. Dabei beschreibt  $v$  die bei dem jeweiligen Kugelradius gemessene Sinkgeschwindigkeit.

Tragen Sie das Verhältnis  $v/v_{lam}$  gegen  $\log Re$  auf (einfach logarithmisches Papier mit drei Dekaden) und bestimmen Sie die Stelle, an denen ein Knick in der Kurve auftritt. An dieser Stelle verliert das Stokes'sche Gesetz seine Gültigkeit und die laminare Strömung schlägt in eine turbulente Strömung um. Schätzen Sie den Zahlenwert für die kritische Reynoldszahl ab.



Zu 2)

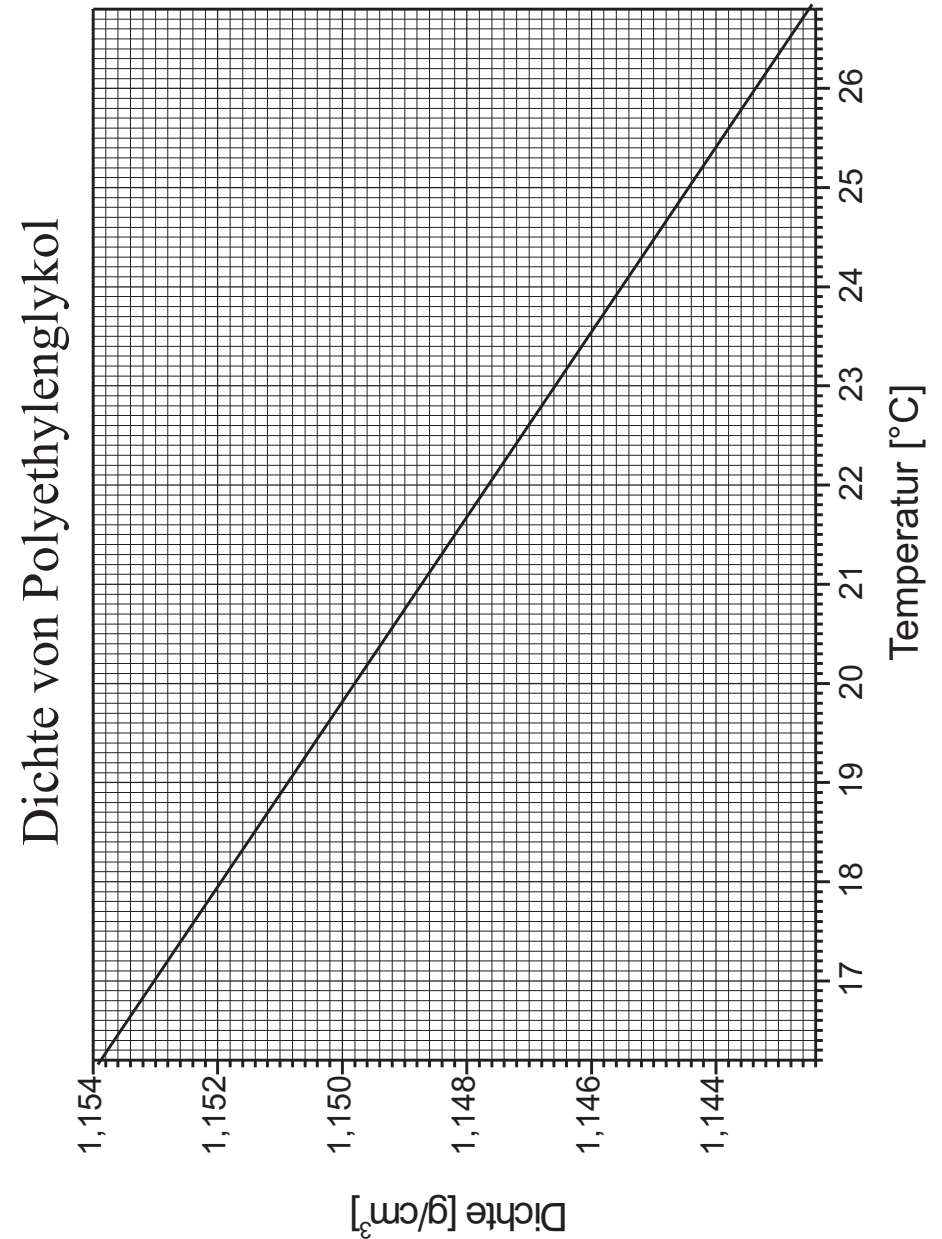
- Berechnen Sie die Zähigkeit nach Hagen-Poiseuille. Beachten Sie, dass der Druck in der Kapillare durch die Höhe der Flüssigkeitssäule bestimmt wird. Während des Abfließens der Flüssigkeit ändert sich in der Säule die Flüssigkeitshöhe und damit die Druckdifferenz in der Kapillare. Für die Berechnung der Druckdifferenz ist daher der Mittelwert von Anfangs- und Endhöhe  $h_A, h_E$  zu benutzen.
- Berechnen Sie die Reynoldszahl der Kapillare und überzeugen Sie sich, dass laminare Strömung vorlag.
- Vergleichen Sie die gemessenen Viskositäten nach Hagen-Poiseuille mit den Werten nach Stokes (Fehlergrenzen abschätzen!). Achten Sie darauf, dass die Temperaturen u.U. verschieden sind.

### VIII Anhang

Dichte der Kugeln:

∅ 2 mm bis 7,144 mm	$1,375 \text{ g/cm}^3 < \rho < 1,380 \text{ g/cm}^3$
∅ 8 mm	$1,355 \text{ g/cm}^3 < \rho < 1,360 \text{ g/cm}^3$
∅ 9 mm	$1,360 \text{ g/cm}^3 < \rho < 1,365 \text{ g/cm}^3$

(Bitte die Werte mit den Angaben auf dem Kugelsortierkasten vergleichen.)





## Versuch 213 Kreisel



Abbildung 1: Aufbau des Kreisel- Versuchs.

### I Messaufbau

- Stahlkugel mit Aluminiumstab ( $m = 4,164$  kg incl. Stab, Kugelradius  $r=5,08$  cm) als Kreisel gelagert in einer Luftkissenpfanne
- 2 Gewichte ( $r_a=0,725$  cm,  $r_i=0,325$  cm,  $h=1,1$  cm,  $m=9,85$  g)
- Farbscheibe, Scheibe mit konzentrischen Ringen
- Stroboskop
- Stoppuhr
- Motor mit Netzgerät
- Gyroskop zur Demonstration der Kreiseigenschaften

### II Literatur

- Bergmann-Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1*.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- Pohl, *Einführung in die Physik, Band 1: Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Springer Verlag.
- Für Interessierende der theoretischen Physik sind die Bücher von Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Verlag Wiley-VCH und von Herbert Goldstein, *Klassische Mechanik*, Akademische Verl.-Ges., zu empfehlen.

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Mechanik des starren Körpers, Drehmoment und Drehimpuls - insbesondere deren Vektoreigenschaften, Trägheitsmoment und Trägheitstensor, Hauptträgheitsmomente, kräftefreier und schwerer Kreisel, Präzession und Nutation. Schauen Sie sich auch nochmals den Versuch Trägheitsmoment an, den Sie im Praktikum 1 durchgeführt haben.

Verständnisfragen:

1. In welcher Beziehung stehen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines um eine Achse rotierenden Körpers? In welchem Koordinatensystem nimmt der Trägheitstensor Diagonalgestalt an?
2. Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Kugel; wo liegen ihre Hauptträgheitsachsen? Beschreiben Sie die Lagen der Hauptträgheitsmomente bei einem rotationssymmetrischen Körper.
3. Warum fällt ein Kreisel nicht um?
4. Was ist die Ursache für das Auftreten von Präzession und Nutation?

## IV Aufgaben

1. Untersuchen Sie in einem Vorversuch qualitativ das Verhalten eines Kreisels.
2. Messen Sie die Reibungsverluste des Kreisels und bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und Halbwertszeit.
3. Bestimmen Sie aus der Präzessionsfrequenz eines schweren Kreisels das Trägheitsmoment um die Figurenachse.
4. Aus Größe und Richtung der Umlaufgeschwindigkeit der momentanen Drehachse um die Figurenachse soll das Trägheitsmoment senkrecht zur Figurenachse bestimmt werden.
5. Das gleiche Trägheitsmoment ist zusätzlich aus der Nutationsfrequenz zu bestimmen.

## V Motivation

Seit unserer Geburt sind wir zu jeder Zeit der Schwerkraft ausgesetzt. Wir empfinden es daher als selbstverständlich, dass ein Gegenstand, der nicht im Schwerpunkt gelagert oder durch irgendwelche Aufhängungen fixiert wird, stets nach „unten“ fällt oder umkippt. Umso faszinierender ist es daher, dass sich ein rotierender Körper unter Umständen völlig anders verhalten kann. Wird ein

schnell rotierender Kreisel angestoßen und damit der Schwerpunkt außerhalb der Symmetrieachse verlagert, fällt er nicht um, sondern weicht senkrecht zur Richtung der Schwerkraft aus. Dadurch erhält er einen zusätzlichen Drehimpuls. Der Kreisel rotiert dann zum einen um seine eigene Achse und zum anderen führt er gleichzeitig eine Drehbewegung um die Richtung der Erdanziehung aus. Diese Bewegung wird als Präzession bezeichnet. Erst wenn die Rotation zu gering wird, wird der Kreisel instabil und kippt.

Kreiselpänomene finden sich in vielen Bereichen. Wir leben sogar auf einem Kreisel, der zudem eine Präzessionsbewegung durchführt! Die Erde ist keine ideale Kugel, sondern infolge der Rotation abgeplattet. Ihr Durchmesser ist am Äquator rund 43 km größer als der Poldurchmesser. Zudem ist die Erde um etwa  $66,5^\circ$  gegen die Erdbahnebene geneigt. Aufgrund dieser Schiefstellung üben Sonne und Mond ein Drehmoment auf die Erde aus, welches versucht, die Erdachse aufzurichten und damit die Ekliptikschiefe zu verkleinern. Diesem Drehmoment weicht die Erde in einer rechtwinkligen Bewegung aus und präzessiert so um die Ekliptikebene. Die Zeit, die die Erdachse für einen vollen Präzessionsumlauf benötigt, beträgt ca. 25800 Jahre. Mit der Präzessionsbewegung ist eine stetige Wanderung des Himmelnordpols verbunden. Zur Zeit zeigt die Erdachse auf den Polarstern, der somit die Nordrichtung anzeigt. In etwa 12000 Jahre wird der Stern Vega diese Aufgabe übernehmen.



*Innenansicht eines  
Kreiselkompass.*

Technische Anwendung findet der Kreisel (Gyroskop) im Bereich der Navigation als Kreiselkompass, als künstlicher Horizont (Kreiselhorizont) und als Autopilot bei Flugzeugen. Bei letzterem wird mit dem Kreisel die Neigung der Tragflächen und mit einem zweiten Kreisel der Winkel zwischen Heck und dem Cockpit des Flugzeuges bestimmt. Zusammen mit einem Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsmesser kann so der Kurs der Maschine automatisch eingestellt werden. Mechanische Kreiselsysteme finden sich auch im Hubble-Teleskop. Sie dienen der Kursstabilisierung und helfen dem Teleskop die Balance zu halten und in der Bahn zu bleiben. Die Lebensdauer eines Satelliten wird oft durch die Lebensdauer seiner Gyroskope begrenzt. Fallen sie aus, so sind Richtung und Ausmaß von Lageänderungen nicht mehr feststellbar.

Beim Hubble-Weltraumteleskop war dies bereits schon zweimal der Fall. Zum Glück hat man das Teleskop mit insgesamt drei Ersatzkreiseln ausgestattet, so dass die Ausfälle nur von kurzer Dauer waren.

Auch in der Physik treten in vielen Bereichen Kreiselphänomene auf. So lassen sich die Eigenschaften eines mechanischen Kreisels zusammen mit quantenmechanischen Überlegungen auf Moleküle übertragen. Damit können z.B. die Rotationsspektren von Molekülen interpretiert werden.

Eine weitere Kreiselercheinung ist die Larmor-Präzession. Aus klassischer Sicht bewegt sich im Atom ein Elektron um den Atomkern. Mit der Elektronenbewegung ist ein Kreisstrom verbunden, das ein magnetisches Dipolmoment induziert, welches senkrecht zur Ebene der Elektronenbewegung orientiert ist. Befindet sich nun solch ein Atom in einem äußeren  $\vec{B}$ -Feld, so strebt das magnetische Moment eine Ausrichtung parallel zum Magnetfeld an. Somit kommt es zu einer Präzession um die Feldrichtung.

Das mechanische Kreisel auch heute noch in der Forschung eingesetzt werden, dokumentiert der folgende Zeitungsartikel.

### Einstein wird überprüft

## Quarzkugeln in Raum und Zeit

**Los Angeles (AP).** Zwei grundlegende Annahmen von Albert Einstein sollen jetzt endlich überprüft werden. Am 17. April soll die von der Nasa finanzierte und von der Universität Stanford entwickelte Sonde Gravity Probe 2 (Schwerkraftsonde 2) vom US-Luftwaffenstützpunkt Vandenberg ins All starten. Die Sonde soll zwei Theorien Einsteins überprüfen: über Raum und Zeit und wie die Erde beide beeinflusst. Kern des Experiments sind vier Gyroskope – absolut runde, sich drehende Quarzkugeln von der Größe von Tischtennisbällen. Wenn sie einmal im Weltraum sind und sich drehen, sollten die Quarze ihre Richtung ändern – wenn Einstein Recht hatte.

Abbildung 2: *Bei dem Experiment sollen die Zusammenhänge von Raum, Zeit und Schwerkraft erforscht werden. Nach Einstein wird die Raumzeit durch einen schweren Körper „gekrümmt“. Auch eine rotierende Masse wie unsere Erde sollte das Raumzeit-Gewebe quasi mit sich reißen. Wenn Einsteins Theorie richtig ist, muss sich diese Raumverwirbelung auf die Rotation von Kreiseln auswirken, die sich in einem Satelliten um die Erde bewegen. (Quelle: Sonntag Aktuell, 4.4.04)*

## VI Grundlagen

### Der kräftefreie, symmetrische Kreisel

Jeder starrer Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, stellt einen Kreisel dar. Wird der Kreisel im Schwerpunkt gelagert, so wird er als kräftefreier Kreisel bezeichnet. Bei dieser Aufhängung übt die Gewichtskraft kein äußeres Drehmoment  $\vec{M}$  auf den Kreisel aus, so dass Betrag und Richtung des Drehimpulses  $\vec{L}$  zeitlich konstant bleiben. Sind zudem zwei Hauptträgheitsmomente gleich groß, so wird der Kreisel als symmetrisch bezeichnet.

Zur Beschreibung der Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels wollen wir im Folgenden drei charakteristische Achsen heranziehen. Die Symmetrieachse des Kreisels wird als Figurenachse bezeichnet und durch die Größe  $\vec{F}$  beschrieben. Daneben ist noch die raumfeste Drehimpulsachse  $\vec{L}$  und die Richtung der Drehachse  $\vec{\omega}$  zur Beschreibung der Kreiselmovement wichtig.

Wird der Kreisel an der Figurenachse festgehalten und derart in Rotation versetzt, dass sich beim Andrehen die Richtung der Figurenachse nicht ändert, so fallen alle drei Achsen zusammen und sind zeitlich und räumlich konstant (Abbildung 3 links). Nur für diesen Spezialfall zeigten die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und der Drehimpuls  $\vec{L}$  in die gleiche Richtung und sind über das Hauptträgheitsmoment der Figurenachse miteinander verknüpft.

Die **allgemeine** Bewegung des kräftefreien, symmetrischen Kreisels ist weitaus komplizierter. Experimentell kann man den allgemeinen Bewegungszustand dadurch einstellen, indem man dem um seine Figurenachse rotierenden Kreisel einen leichten Schlag erteilt. Dies führt dazu, dass die charakteristischen Kreiselachsen nicht mehr wie zuvor parallel ausgerichtet sind, sondern unterschiedliche Orientierungen einnehmen. Der Kreisel vollführt dann eine recht komplizierte Taumelbewegung, die als **Nutation**<sup>1</sup> bezeichnet wird (Abbildung 3 Mitte). Der Drehimpuls ist auch bei dieser Kreiselmovement weiterhin räumlich und zeitlich konstant. Allerdings rotiert die Figurenachse auf einem Kegelmantel (Nutationskegel) mit der Nutationsfrequenz  $\vec{\omega}_N$  um die raumfeste Drehimpulsachse und führt dabei gleichzeitig eine Eigenrotation  $\vec{\omega}_F$  durch. Die resultierende Drehachse ist daher nicht konstant sondern eine Überlagerung der Eigenrotation um die Figurenachse und der Nutationsbewegung der Figurenachse um die Richtung des Drehimpulses. Daher wollen wir im Folgenden von der **momentanen Drehrichtung**  $\vec{\omega}$  des Kreisels sprechen, die die Rotation des Kreisels zu einem

<sup>1</sup>lat. nutare: nicken, schwanken

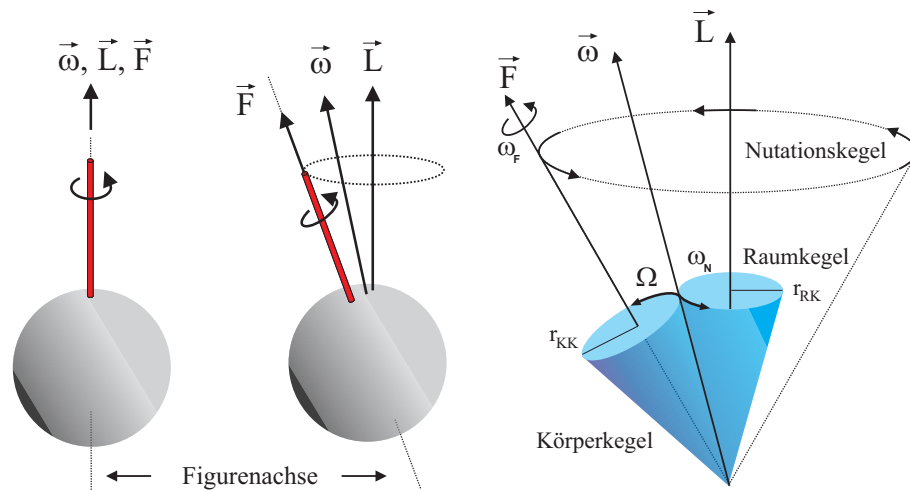


Abbildung 3: Bewegungen des kräftefreien symmetrischen Kreisels. Links: Figurenachse, momentane Drehrichtung und Drehimpuls sind parallel ausgerichtet und zeitlich konstant. Mitte: Nutationsbewegung. Alle drei charakteristische Achsen haben unterschiedliche Richtungen und nur der Drehimpuls ist zeitlich konstant. Rechts: Orientierung und Bewegung der Achsen im Nutationsfall für einen Kreisel mit  $I_z < I_x = I_y$ , wobei  $I_z$  das Trägheitsmoment um die Figurenachse darstellt. Die Bewegung kann man sich durch das Abrollen eines körperfesten Kegels auf einem raumfesten Kegel veranschaulichen.

bestimmten Zeitpunkt beschreibt.

Die Ausrichtung der einzelnen Kreiselachsen lässt sich leichter verstehen, wenn wir die rechte Skizze in Abbildung 3 betrachten. Die Figurenachse stellt hier die Symmetrieachse eines **gedachten Kegels** dar. Dieser körperfeste, sogenannte Körperkegel, rollt auf dem Mantel eines weiteren, raumfesten Kegels (Raumkegel), mit dem Drehimpuls als Symmetrieachse, ab. Die Lage der momentanen Drehrichtung ergibt sich in dieser Darstellung aus der Berührlinie der beiden Kegelmäntel.

Aus Abbildung 3 rechts folgt unmittelbar, dass bei der Nutation die Figurenachse, der Drehimpuls und die momentane Winkelgeschwindigkeit immer in einer Ebene liegen. Somit kann die momentane Winkelgeschwindigkeit in einen Nutationsanteil  $\vec{\omega}_N$  und in einen Anteil der Eigenrotation der Figurenachse  $\vec{\omega}_F$

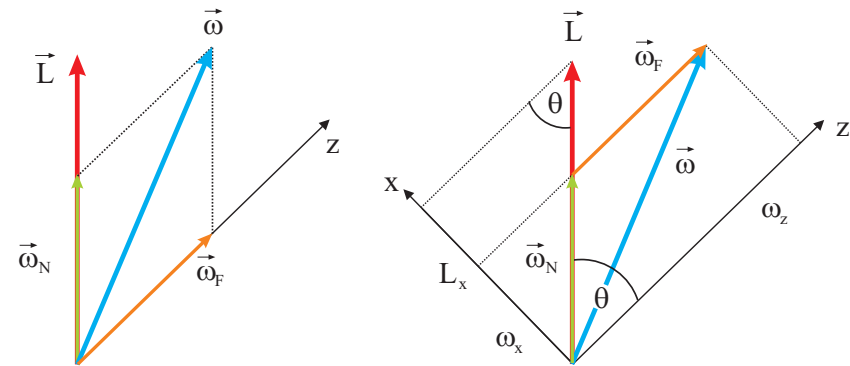


Abbildung 4: Geometrie der Nutationsbewegung. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass es körperfest ist und seine Achsen mit den Hauptachsen des Kreisels zusammenfallen. Die z-Richtung ist parallel zur Figurenachse orientiert.

zerlegt werden (Abbildung 4 links):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F. \quad (1)$$

Zerlegen wir zusätzlich Drehimpuls und momentane Winkelgeschwindigkeit in x- und z- Komponenten, so ergibt sich aus

$$\omega_x = \omega_N \sin \theta \quad (2)$$

und mit Hilfe der Beziehungen  $L_x = L \sin \theta$  und  $L_x = I_x \omega_x$  für den Betrag der Nutationsfrequenz:

$$\omega_N = \frac{L}{I_x} \quad (3)$$

Ist die Nutationsbewegung nur schwach ausgeprägt, d.h. bei kleinem Winkel  $\theta$ , so kann der Betrag des Drehimpulses angenähert werden durch

$$L \approx I_z \omega \approx I_z \omega_F. \quad (4)$$

Hiermit ergibt sich für die Nutationsfrequenz

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F. \quad (5)$$

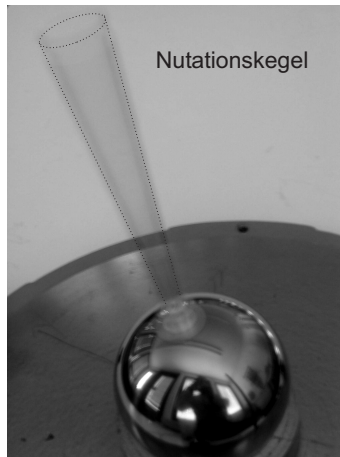


Abbildung 5: Nutationsbewegung der Figurenachse: Die Figurenachse läuft auf einem Kegelmantel um die raumfeste Drehimpulsachse.

Die Nutationsbewegung der Figurenachse lässt sich im Experiment leicht beobachten (Abbildung 5). Schwieriger gestaltet sich die Visualisierung der momentanen Drehachse. Um die momentane Drehachse zu beobachten, müssen wir einen Trick anwenden. Dazu wird auf die Figurenachse eine Scheibe mit unterschiedlich farbigen Segmenten gesteckt. Für einen Beobachter, der auf die mit dem Kreisel rotierende Scheibe blickt, verschwimmen aufgrund der Trägheit des Auges die Farben, so dass er nur die Mischfarbe der einzelnen Farbsegmente wahrnimmt. Nur in dem Punkt, in dem die momentane Drehachse die Farbscheibe durchstößt, steht die Farbscheibe „kurzfristig still“ und der Beobachter erkennt die „unverfälschte“ Farbe eines Segments. Dieser Punkt kennzeichnet somit die Orientierung der momentanen Drehrichtung.

Aufgrund der Wanderung der momentanen Drehachse auf dem Körperkegel um die Figurenachse, sieht der Beobachter am Ort der momentanen Drehachse, wie die einzelnen Farben der Sektorenscheibe durchlaufen werden (Abbildung 6). Der Farbwechsel erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  (Abbildung 3), dessen Betrag sich aus dem Verhältnis der Radien von Körperkegel ( $r_{KK}$ ) und Raumkegel ( $r_{RK}$ ) sowie der Nutationsfrequenz  $\omega_N$  bestimmen lässt:

$$\frac{\Omega}{\omega_N} = \frac{r_{RK}}{r_{KK}}. \tag{6}$$

Da die Berechnung von  $\Omega$  algebraisch recht aufwendig ist, soll hier direkt das Ergebnis angegeben werden. Eine analytische Berechnung von  $\Omega$  wird im Anhang

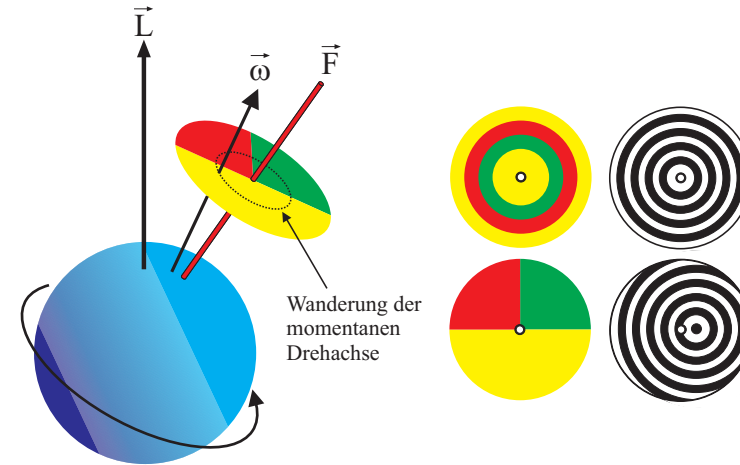


Abbildung 6: Visualisierung der momentanen Drehachse mit Hilfe einer farbigen Sektorenscheibe. Neben der Farbscheibe stehen noch anders gemusterte Scheiben im Praktikumsversuch zur Verfügung.

durchgeführt:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_F. \tag{7}$$

Für eine spätere Anwendung ist noch folgende Umformung nützlich:

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\omega_F/\Omega - 1}. \tag{8}$$

### Der schwere, symmetrische Kreisel

Beim schweren Kreisel liegt der Unterstützungspunkt nicht mehr im Schwerpunkt, aber im Fall des symmetrischen Kreisels ( $I_x = I_y$ ) immer noch auf der Figurenachse. Im Versuch wird dazu auf den Aluminiumstab eine Zusatzmasse  $m$  montiert, wodurch der Schwerpunkt entlang der Figurenachse verschoben wird. Wir wollen hier nur den Fall analytisch untersuchen, bei dem die Orientierungen von  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  zusammenfallen, d.h. es soll keine Nutationsbewegungen vorhanden sein.

Aufgrund der Gewichtskraft wirkt auf den Kreisel ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}, \tag{9}$$

wobei  $\vec{l}$  den Vektor darstellt, der vom Unterstützungspunkt des Kreisel zur Zusatzmasse auf der Figurenachse zeigt (Abbildung 7).

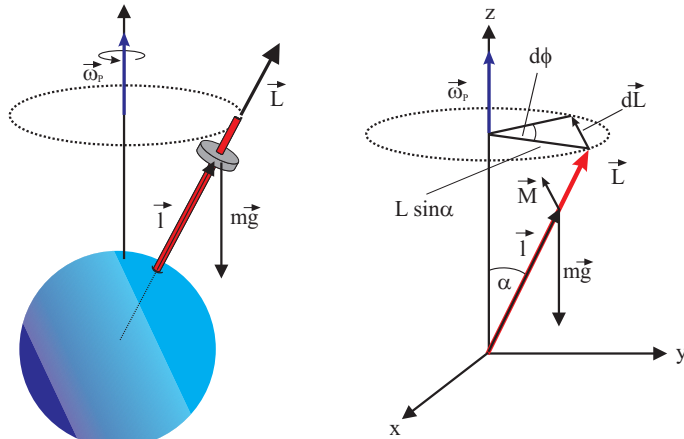


Abbildung 7: Links: Durch eine Zusatzmasse an der Figurenachse wird aus dem kräftefreien Kreisel ein schwerer Kreisel. Die Gewichtskraft übt ein äußeres Drehmoment  $\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g}$  aus, so dass der Kreisel mit der Frequenz  $\vec{\omega}_P$  um die z-Achse präzidiert. Rechts: Geometrie zur Bestimmung der Präzessionsfrequenz.

Dieses Drehmoment bewirkt, dass sich der Drehimpuls zeitlich ändert. Wegen  $\vec{M} \perp \vec{L}$  zeigt die Änderung des Drehimpulses in Richtung des Drehmoments, d.h.  $d\vec{L} \parallel \vec{M}$  und damit  $d\vec{L} \perp \vec{L}$ , woraus unmittelbar folgt, dass der Betrag des Drehimpulses zeitlich konstant bleibt. Das äußere Drehmoment bewirkt demnach nur eine Änderung der Drehimpulsrichtung: **Der Drehimpulsvektor läuft auf einem Kegelmantel um die z-Richtung und versucht sozusagen der Gewichtskraft seitlich auszuweichen.** Man bezeichnet diese Kreiselbewegung als **Präzession**<sup>2</sup>. Die Präzessionsfrequenz  $\vec{\omega}_P$ , d.h. die Frequenz mit der der Drehimpuls um die z-Richtung rotiert, kann nach Abbildung 7 aus der zeitlichen Änderung des Präzessionswinkels  $\varphi$  abgeleitet werden:

<sup>2</sup>lat. praecedere: das Vorangehen

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{L \sin \alpha dt}. \tag{10}$$

Mit  $L = I_z \omega_F$  erhalten wir

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \tag{11}$$

oder allgemein

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L}. \tag{12}$$

Die Präzessionsfrequenz ist demnach unabhängig von der räumlichen Orientierung des Kreisels und hängt nur vom Drehimpuls und vom Drehmoment ab.

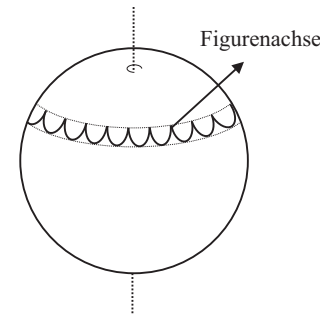


Abbildung 8: Bewegung der Figurenachse bei einer Überlagerung von Präzession und Nutation.

Bisher haben wir nur den Fall untersucht, bei dem der schwere Kreisel keine Nutation vollführt. Im Fall einer zusätzlichen Nutationsbewegung, weist der Kreisel eine komplexere Bewegung auf. Bei dieser Überlagerung von Präzession und Nutation durchläuft die Spitze der Figurenachse eine „girlandenförmige“ Bahn, deren genaue Form vom Verhältnis der Nutationsfrequenz zur Präzessionsfrequenz abhängt (Abbildung 8). Diese Bewegung ist im Praktikumsversuch leicht zu beobachten, soll hier aber quantitativ nicht weiter untersucht werden.

### Zusammenfassung

- Ein starrer Körper, der um einen festen Punkt rotiert, stellt einen Kreisel dar. Sind genau zwei Hauptträgheitsmomente identisch, so wird der Kreisel als symmetrisch bezeichnet. Wird der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt



so heißt der Kreisel kräftefrei. In diesem Fall wirken keine äußeren Drehmomente und der Drehimpuls ist räumlich und zeitlich konstant.

- Die allgemeine Bewegung eines kräftefreien Kreisels stellt eine Nutationsbewegung dar. Dabei führt die Figurenachse eine Eigendrehung mit  $\omega_F$  durch und rotiert mit der Nutationsfrequenz  $\omega_N$  gleichzeitig um die raumfeste Drehimpulsachse. Die Winkelgeschwindigkeit ist nicht konstant sondern bewegt sich mit  $\Omega$  um die Figurenachse. Diese Bewegung kann mit Hilfe einer farbigen Sektorscheibe beobachtet werden. Die Bewegungen der charakteristischen Kreiselachsen kann man sich durch ein Abrollen eines körperfesten Kegels auf einen raumfesten Kegels veranschaulichen.
- Liegt der Auflagepunkt des Kreisels nicht im Schwerpunkt, so heißt der Kreisel schwerer Kreisel. In diesem Fall übt die Gewichtskraft ein Drehmoment aus, das zu einer Präzession führt. Dabei bewegt sich der Drehimpuls mit der Frequenz  $\omega_P$  auf einem Kegelmantel um die Richtung der Gewichtskraft.

## VII Durchführung des Versuchs

### Beschreibung des Luftkissenkreisels

Als Kreisel dient eine luftkissengelagerte Stahlkugel, in die ein Aluminiumstab eingeschraubt ist und etwa 17 cm über die Kugeloberfläche hinausragt. Die Kugel ist nicht gehärtet und kann durch unsachgemäße Behandlung beschädigt werden (z.B. durch Fallenlassen). **Der Kreisel darf beim Herausnehmen niemals am Stab festgehalten werden. Verbiegt sich die Aluminiumstange auch nur geringfügig, ist der Versuch nicht mehr durchführbar!**

Durch den Stab wird die Figurenachse und die  $I_2$ -Achse festgelegt. Auf ihm werden während des Versuchs Gewichtsstücke und Farbscheiben angebracht. Der Stab ist mit Rillen im Abstand von 1 cm versehen. Im Abstand von 10, 15 und 20 cm von der Kugelmitte sind zusätzlich noch Doppelrillen markiert. Am Stabende ist ein Kugellager befestigt, an dem der Stab zur Änderung seiner Orientierung angefasst werden kann, ohne dabei die Frequenz Eigenrotation merklich zu verändern. Trotz des eingebauten Stabs ist die Stabseite der Kugel leichter. Einen kräftefreien Kreisel kann man daher nur erhalten, wenn man ein Zusatzgewicht an dem Stab befestigt. Dazu dient unter

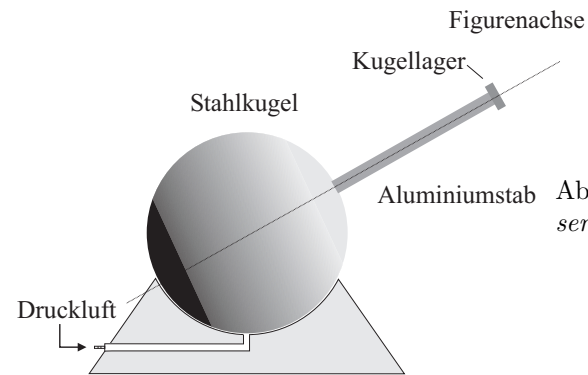


Abbildung 9: Aufbau des Luftkissenkreisels.

anderem die Farbscheibe, die auch für stroboskopische Messungen benutzt wird.

### Justierung des Kreisels

Schieben Sie die Farbscheibe auf den Stab bis nahe an die Kugel und lassen Sie den Kreisel mit etwa 1-2 Hz rotieren. Verschieben Sie die Figurenachse mit Hilfe des Kugellagers in horizontaler Lage und lassen Sie dann die Achse vorsichtig los. Falls der Kreisel präzessiert, müssen Sie die Scheibe je nach Richtung der Präzession entlang des Stabs verschieben. Ist der Kreisel schließlich kräftefrei, so schieben Sie eine passende Zahl von Unterlegscheiben zwischen Scheibe und Kreisel. Damit ist gewährleistet, dass Sie bei einem Wechsel der Scheibe, den kräftefreien Zustand leichter wieder einstellen können.

### Beschleunigen des Kreisels

Für kleine Geschwindigkeiten genügt es, die Kugel dadurch zu beschleunigen, dass man den senkrechten Stab zwischen den beiden gegeneinander gleitenden Handflächen in Drehung versetzt. Für höhere Geschwindigkeiten ist es bequemer, den Motor zu benutzen: Halten Sie dabei den Kreisel am Kugellager fest und versetzen Sie den Kreisel durch Andrücken des Filzrad am Kugelumfang in Rotation.

### Bedienung des Stroboskops

Die Bestimmung der charakteristischen Kreiselfrequenzen werden mit einem Stroboskop durchgeführt. Das Stroboskop<sup>3</sup> sendet mit einstellbarer Frequenz, Lichtpulse von etwa  $10 \mu\text{s}$  Dauer aus. Bewegt sich die auf den Kreisel montierte Farbscheibe mit der gleichen Frequenz wie die Blitzfrequenz des Stroboskops, so wird diese immer in der gleichen Lage beleuchtet. Für den Beobachter scheint die Scheibe dann still zu stehen. Allerdings tritt diese Erscheinung auch dann auf, wenn die Scheibe mit der  $n$ -fachen Blitzfrequenz rotiert. Ist dagegen die Blitzfrequenz beispielsweise doppelt so hoch wie die des Kreisels, so beobachtet man zwei gleichfarbige Sektoren. Durch gezieltes Variieren um die  $n$ -fache Frequenz müssen Sie die richtige Frequenz herausfinden.

Mit dem kleinen Motor kann der Kreisel auf maximal  $800 \text{ min}^{-1}$  beschleunigt werden. Diesen Bereich können sie komplett in der Stellung I des Stroboskops erfassen. Sie brauchen daher den Messbereich des Stroboskops nicht umzuschalten. Da die Sektorenscheibe natürlich auch vom Raumlicht beleuchtet wird, erscheinen die Farben immer etwas vermischt, nur die Trennlinien der Sektoren bleiben bei der richtigen Frequenz stehen.

### 1. Vorversuch

Der Vorversuch soll Sie mit dem Kreisel vertraut machen und Ihnen die später genauer zu untersuchenden Erscheinungen qualitativ demonstrieren.

a) Öffnen Sie das Druckluftventil an der Wand. Stecken Sie die Scheibe mit den Farbsektoren nach oben auf den Stab und balancieren Sie die Scheibe wie zuvor beschrieben aus, so dass der Kreisel kräftefrei wird. Beschleunigen Sie den Kreisel auf einige Umdrehungen pro Sekunde und beobachten Sie die Reaktion des Kreisels, wenn Sie den Metallring des Kugellagers am Stabende mit einem Finger zur Seite drücken. Erläutern Sie Ihre Beobachtungen.

b) Stellen Sie nun eine Nutationsbewegung ein, indem Sie dem Stab einen leichten, seitlichen Stoß erteilen. Beobachten Sie die Farbscheibe: In der mischfarbigen Fläche der sich drehenden Scheibe sollten Sie einen Punkt erkennen, an dem eine „reine, unvermischte“ Farbe erscheint. An dieser Stelle ändert sich die Farbe gemäß der Farbanordnung auf der Sektorenscheibe. Dieser Punkt stellt den um die Figurenachse wandernden Ort der momentanen Drehachse dar. Drehen Sie die Scheibe um, so dass die Seite mit den farbigen Ringen

nach oben zeigt und wiederholen Sie den Versuch. Wenn Sie beim Anschlagen des Kreisels einen Nutationskegel erreichen, der gerade in einem der Farbringe verläuft, ändert sich die Farbe am Ort der momentanen Drehachse nicht, d.h.  $\vec{\omega}$  läuft auf einem Kreis um die Figurenachse.

c) Legen Sie zusätzlich die Scheibe mit den konzentrischen Kreisen auf die Farbscheibe. Wählen Sie zunächst die Seite der Scheibe, bei der der Mittelpunkt der Kreise seitlich gegen die Aufnahmeachse verschoben ist. Liegt keine Nutation vor ( $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$ ) so erkennt man ein System konzentrischer, verwaschener Kreise um den Stab. D.h. der Mittelpunkt des Kreissystems zeigt die Drehachse an. Drehen Sie nun die Scheibe um und versetzen Sie den Kreisel in Drehung. Durch einen seitlichen Stoß werden wieder die drei Kreiselachsen getrennt. Warum markiert jetzt der Mittelpunkt der verwaschenen Kreise die Drehimpulsachse, die räumlich stehen bleibt? Bringen Sie ein Zusatzgewicht am Stab an und wiederholen Sie den Versuch. Die Drehimpulsachse sollte nun ein Präzessionsbewegung durchführen.

d) Ohne zusätzliche Farbscheibe richtet sich der Stab immer auf, d.h. der Schwerpunkt liegt unterhalb der Kugelmitte. Mit einem Zusatzgewicht am Ende des Stabes fällt dagegen der Kreisel um. In diesem Fall liegt der Schwerpunkt oberhalb der Kugelmitte. Versetzen Sie in beiden Fällen den Kreisel in Drehung und lassen Sie den Stab aus einer nichtvertikalen Stellung los. Beobachten Sie die Drehrichtung der Präzession. Ändern Sie die Drehrichtung des Kreisels und wiederholen Sie den Versuch.

### 2. Dämpfung des Kreisels

Bringen Sie wieder die Sektorenscheibe an und überprüfen Sie ob der Kreisel kräftefrei ist. Montieren Sie zusätzlich beide Gewichte am Stabende. Beschleunigen Sie den Kreisel mit Hilfe des Motors bei senkrechter Achse auf ca.  $600 - 700 \text{ min}^{-1}$ . Messen Sie alle 2 Minuten die Drehfrequenz des Kreisels über einen Zeitraum von 12 Minuten. Notieren Sie die Drehfrequenz bei der jeweiligen Zeit unter Berücksichtigung der Fehler.

### 3. Präzession

Bei allen Messungen dieser Aufgabe wird der Kreisel zunächst bei senk-

<sup>3</sup>Am Stroboskop wird die Frequenz in Umdrehungen/Minute angezeigt.

rechter Achse auf die gewünschte Geschwindigkeit gebracht. Anschließend wird die Achse durch Angreifen am Kugellager schräg gestellt und kurz vor der gewählten Ablesemarke möglichst nutationsfrei losgelassen. Als Ablesemarke dient ein Messingstab in der Kreiselbasis.

a) Montieren Sie auf den Stab die Farbscheibe und vergewissern Sie sich, dass der Kreisel kräftefrei ist. Befestigen Sie im Abstand von 20 cm zur Kugelmittle ein Zusatzgewicht auf den Stab. Die Drehgeschwindigkeit sollten Sie auf ungefähr  $500 \text{ min}^{-1}$  einstellen. Lassen Sie den Stab bei gleicher Drehgeschwindigkeit des Kreisels möglichst nutationsfrei unter drei verschiedenen Winkeln des Stabs gegen die Vertikale los und bestimmen Sie jeweils die Zeit für einen Umlauf (Präzessionsdauer  $T_P$ ).

b) Belasten Sie den kräftefreien Kreisel mit folgenden Zusatzmassen:

- Ein Gewichtsstück bei 15 cm.
- Ein Gewichtsstück bei 20 cm.
- Zwei Gewichtsstücke bei 15 cm.
- Zwei Gewichtsstücke bei 20 cm.

Messen Sie für jede Gewichtseinstellung bei jeweils vier verschiedene Frequenzen  $f$  im Bereich  $250 \text{ min}^{-1} < f < 700 \text{ min}^{-1}$ , mit der Stoppuhr die Präzessionsdauer  $T_P$ . Beginnen Sie bei jeder Masseneinstellung bei einer hohen Frequenz und bremsen Sie dann für die folgenden Messungen den Kreisel etwas ab. Notieren Sie für jede Messung die Frequenz  $\omega_F$  und die Präzessionsdauer  $T_P$ .

#### 4. Umlauf der momentanen Drehachse um die Figurenchse

Überprüfen Sie, ob der Kreisel kräftefrei ist. Versetzen Sie anschließend den Kreisel bei senkrechter Achse mit Hilfe des Motors in Rotation. Nach dem Anwerfen wird durch einen leichten seitlichen Stoß auf die Achse, der Kreisel in Nutation versetzt.

a) Bestimmen Sie die Umlaufrichtung der momentanen Drehachse mit Hilfe der Farbscheibe. Beachten Sie die Reihenfolge der Farben.

b) Messen Sie mit der Stoppuhr für 10 Frequenzen im Bereich  $300 \text{ min}^{-1} < f < 600 \text{ min}^{-1}$  jeweils die Zeit  $t$  für 10 Umläufe der momentanen Drehachse um die Figurenchse (Frequenz des Farbwechsels  $\Omega$  der Sektorscheibe).

#### 5. Nutation

Versetzen Sie den kräftefreien Kreisel durch vorsichtiges Anschlagen an die Achse in Nutation. Damit die in Gleichung (5) gemachte Näherung gilt, sollte die Öffnung des Nutationskegels an der Spitze des Stabes nur 1-2 cm betragen. Bestimmen Sie 10 Wertepaare von  $\omega_N$  und  $\omega_F$ . Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Aufgrund der Luftreibung nehmen die Frequenzen ständig ab. Es ist daher wichtig, dass beide Frequenzen möglichst schnell hintereinander gemessen werden. Es empfiehlt sich daher, erst das Stroboskop auf eine Frequenz einzustellen, die etwas kleiner ist als die momentane Frequenz  $\omega_F$ . Notieren Sie diese Frequenz und warten Sie bis der Kreisel diese Frequenz erreicht und bestimmen Sie dann rasch die zugehörige Frequenz  $\omega_N$ .

### VIII Auswertung

zu 1) Diskutieren Sie Ihre Beobachtungen des Vorversuchs.

zu 2) Tragen Sie die Messpunkte auf halb-logarithmischen Papier auf. Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und Halbwertszeit.

zu 3a) Vergleichen Sie die gemessenen Präzessionszeiten und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

zu 3b) Aufgrund der Dämpfung des Kreisels ändert sich während der Präzessionsbewegung die Drehfrequenz  $\omega_F$ . Berechnen Sie für jede Messung mit Hilfe der Dämpfungsmessung aus Aufgabe 2 und dem Startwert von  $\omega_F$  die Drehfrequenz am Ende der Präzessionsbewegung und bestimmen Sie daraus ein mittleres  $\bar{\omega}_F$ . Tragen Sie jeweils  $T_P$  als Funktion von  $\bar{\omega}_F$  auf und bestimmen Sie für jedes äußere Drehmoment die Steigung  $s_i$ . Beachten Sie, dass die Geraden durch den Ursprung gehen. Berechnen Sie aus den Steigungswerten nach Gleichung (11) das Trägheitsmoment  $I_z$ . Das zusätzliche Trägheitsmoment der unterschiedlichen Gewichtsstücke kann vernachlässigt werden. Der Mittelwert

der vier Messungen ist dann das gesuchte Trägheitsmoment  $I_z$  des Kreisel

zu 4a) Vergleichen Sie Ihre Beobachtungen mit Gleichung (8) und den zu Abbildung 3 gegebenen Erläuterungen. Welches der beiden Trägheitsmomente  $I_x, I_z$  ist größer?

zu 4b) Tragen Sie die gemessene Umlauffrequenz der momentanen Drehachse gegen  $\omega_F$  auf und bestimmen Sie die Steigung der Geraden. Mit Gleichung (8) und dem in Aufgabe 3 bestimmten Trägheitsmoment  $I_z$  kann  $\Delta I = I_x - I_z$  und damit  $I_x$  berechnet werden.

zu 5) Tragen Sie  $\omega_N$  über  $\omega_F$  in einem Diagramm auf und bestimmen Sie mit Gleichung (5) und dem bekannten  $I_z$  wieder  $I_x$ .

## IX Anhang: Berechnung der Kreisfrequenz $\Omega$ mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen

Bei einem starren Körper, der um eine beliebige Achse durch seinen Schwerpunkt rotiert, fallen im Allgemeinen die Richtungen des Drehimpulses  $\vec{L}'$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}'$  nicht zusammen. In einem **raumfesten**, karthesischen Koordinatensystem<sup>4</sup>, gilt für den Drehimpuls:

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{yx} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{zx} & I'_{zy} & I'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

bzw.

$$\vec{L}' = \hat{I}' \vec{\omega}', \quad (14)$$

wobei  $\hat{I}'$  den Trägheitstensor darstellt. Wählen wir dagegen ein **körperfestes** Koordinatensystem, das parallel zu den Hauptachsen des Kreisels orientiert ist, so nimmt der Trägheitstensor eine sehr einfache Form an. In diesem Hauptachsensystem verschwinden alle Nebenmomente und der

<sup>4</sup>Größen, die mit einem Strich versehen sind, beziehen sich hier stets auf ein raumfestes Koordinatensystem.

Trägheitstensor hat Diagonalfom:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}' \quad (16)$$

gilt aber nur in einem Inertialsystem, z.B. im raumfesten Koordinatensystem. Bei dem körperfestem System handelt es sich um ein rotierendes und damit um ein beschleunigtes Bezugssystem. Allerdings können die Größen des raumfesten Systems auf das mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  rotierende Koordinatensystem durch

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (17)$$

transformiert werden. Im körperfesten Koordinatensystem lautet dann die Bewegungsgleichung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \quad (18)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (15) erhalten wir schließlich die Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_x &= I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \\ M_y &= I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ M_z &= I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \quad (19)$$

Wenden wir diese Gleichungen auf den kräftefreien, symmetrischen Kreisel an: Die Kräftefreiheit führt dazu, dass kein Drehmoment auf den Kreisel wirkt, d.h.  $M_i = 0$  und aufgrund der Symmetrie gilt zudem  $I_x = I_y \equiv I_x$ . Mit diesen Randbedingungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_x) \omega_y \omega_z &= 0 \\ I_x \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= 0 \\ I_z \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar, dass die z-Komponente von  $\vec{\omega}$  konstant ist. Definieren wir zusätzlich noch die Größe

$$\Omega = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_z, \quad (21)$$

so folgt schließlich

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x + \Omega\omega_y &= 0 \\ \dot{\omega}_y - \Omega\omega_x &= 0.\end{aligned}\tag{22}$$

Differentiation einer Gleichung nach der Zeit und Eliminierung der jeweils anderen Frequenz liefert zwei identische Oszillatorgleichungen

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_x + \Omega^2\omega_x &= 0 \\ \ddot{\omega}_y + \Omega^2\omega_y &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

Wir erhalten schließlich für die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}\omega_x &= A \cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_y &= A \sin(\Omega t + \varphi) \\ \omega_z &= \text{konst.},\end{aligned}\tag{24}$$

wobei  $A^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{konst.}$  und  $\varphi$  von den Anfangsbedingungen abhängt. Aus den Gleichungen (24) lesen wir, dass im körperfesten System die Spitze des Winkelgeschwindigkeits-Vektors  $\vec{\omega}$  mit der Frequenz  $\Omega = \text{konst.}$  (Gleichung (21)) auf einer zur Figurenachse senkrechten Ebene rotiert. Die momentane Winkelgeschwindigkeit bewegt sich somit auf einem Kegel, entsprechend dem Körperkegel in Abbildung 3 um die Figurenachse. Dies entspricht unseren Überlegungen, die wir in den Gleichungen (6) und (7) angegeben haben.



## Versuch 221

### Adiabatenkoeffizient $\kappa = c_p/c_V$



Abbildung 1: Links: Versuchsaufbau nach Rüchardt. Rechts: Aufbau nach Clément-Desormes. Der Gasbehälter befindet sich im Aluminiumgehäuse.

## I Messaufbau

Aufbau nach Clément-Desormes:

- Gasbehälter mit Manometeraufsatz und Luftbalg

Aufbau nach Rüchardt:

- Gasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil

- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Gasflaschen (Argon, Luft)
- Stoppuhr

## II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler, Demtröder.
- Homepage des Praktikums (<http://www.physikpraktika.uni-hd.de>).

## III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Zustandsänderungen eines Gases und deren Darstellung im pV-Diagramm (Isotherme, Isobare, Isochore, Adiabate), Adiabaten-Exponent, Poisson-Gleichung, spezifische Wärme eines Gases, Gleichverteilungssatz, Freiheitsgrade (theoretische Werte für  $c_p/c_V$  bei ein- und mehratomigen Gasen).

Verständnisfragen:

1. Für welchen thermodynamischen Prozess ist die Größe  $\kappa$  von Bedeutung?
2. Welche Beziehung besteht zwischen den Größen  $c_p$ ,  $c_V$ ,  $\kappa$  und  $f$  (Anzahl der Freiheitsgrade)? Wie groß ist der theoretische Wert von  $\kappa$  für ein Edelgas? Was erwarten Sie für Luft bzw. für Kohlendioxid?
3. Was ist größer:  $c_p$  oder  $c_V$ ?

## IV Aufgabe

1. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $c_p/c_V$  ist für Luft auf zwei verschiedene Weisen und für Argon nach Rüchardt zu messen.

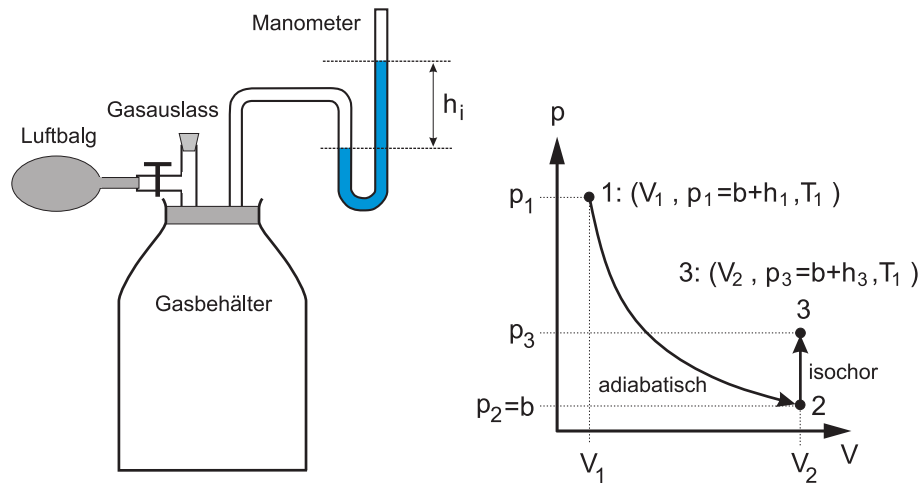


Abbildung 2: Links: Skizze des Aufbaus nach Clément und Desormes. Rechts: Dazugehöriges  $pV$ -Diagramm.

## V Grundlagen

### V.1 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes

Der Messaufbau ist in Abbildung 2 dargestellt. Der Druck in einem luftgefüllten Gasbehälter lässt sich mit Hilfe eines Luftbalgs vergrößern und kann mit einem Manometer abgelesen werden.

Durch Pumpen mit dem Luftbalg wird in dem Gasbehälter ein Überdruck erzeugt, wobei sich das Gas dabei erwärmt. Wartet man nun so lange ab, bis sich das Gas wieder auf Zimmertemperatur abgekühlt hat, so ist der Zustand 1 im  $pV$ -Diagramm in Abbildung 2 erreicht:

$$\text{Zustand 1: } V_1, \quad p_1 = b + h_1, \quad T_1 \quad (1)$$

wobei  $V_1$  das Volumen im Zustand 1,  $b$  der äußere Luftdruck,  $h_1$  die Höhendifferenz des Manometers und  $T_1$  die Temperatur des Gases im Zustand 1 (Zimmertemperatur) bezeichnen.

Im nächsten Schritt wird der Gasauslassstopfen am Gasbehälter für eine kurze Zeit geöffnet, so dass sich der Druck im Behälter dem äußeren Luftdruck  $b$  an-

gleicht. Dabei entweichen Moleküle aus der Flasche, d.h. die Gasmenge ändert sich. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass man durch eine Volumenvergrößerung um  $\Delta V$  zu dem Druck  $b$  kommt. Da der Druckausgleich sehr schnell erfolgt, findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt. Es handelt sich daher um einen adiabatischen Prozess, bei dem sich die Temperatur des Gases um  $\Delta T$  abkühlt. Für den Zustand 2 des Gases gilt dann:

$$\text{Zustand 2: } V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_2 = b, \quad T_2 = T_1 - \Delta T. \quad (2)$$

Nun wartet man solange ab, bis die Temperatur des Gases wieder auf Zimmertemperatur angestiegen ist. Da sich dabei das Volumen nicht ändert, handelt es sich um eine isochore Zustandsänderung bei der der Druck ansteigt. Hat die Temperatur des Gases schließlich Zimmertemperatur erreicht, befindet sich das Gas im Zustand 3:

$$\text{Zustand 3: } V_3 = V_2 = V_1 + \Delta V, \quad p_3 = b + h_3, \quad T_3 = T_1. \quad (3)$$

Die Zustände 1 und 2 sind durch die Poisson'sche Gleichung miteinander verknüpft:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa. \quad (4)$$

Hiermit berechnen wir

$$(b + h_1) V_1^\kappa = b (V_1 + \Delta V)^\kappa. \quad (5)$$

Da  $\Delta V \ll V_1$  ist können wir  $(V_1 + \Delta V)^\kappa$  nähern durch

$$(V_1 + \Delta V)^\kappa = V_1^\kappa \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right)^\kappa \approx V_1^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right). \quad (6)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (5) ein, so erhalten wir

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1}. \quad (7)$$

In den Zuständen 1 und 3 ist die Temperatur der Luft im Gasbehälter gleich, d.h. es gilt das Boyle-Mariotte'sche Gesetz  $pV = \text{konst.}$ :

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \quad (8)$$

$$\rightarrow (b + h_1) V_1 = (b + h_3) (V_1 + \Delta V). \quad (9)$$



Da  $h_3 \ll b$  und  $\Delta V \ll V_1$ , kann der Term  $h_3 \Delta V$  vernachlässigt werden. Somit ergibt sich:

$$h_1 V_1 = h_3 V_1 + b \Delta V, \quad \text{bzw.} \quad (10)$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b}. \quad (11)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (7) ein, so erhalten wir schließlich:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}. \quad (12)$$

Wir können somit den Adiabatenkoeffizient  $\kappa$  allein durch Ablesen des Manometerstandes in den Zuständen „1“ und „3“ bestimmen.

## V.2 Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt

Eine weitere Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten eines Gases, ist mit der Methode nach Rüchardt möglich (Abbildung 3). Auf einem Gasbehälter ist eine Glasröhre montiert. Bringt man in das Glasrohr einen Schwingkörper, der nahezu den gleichen Durchmesser wie das Glasrohr besitzt, so schwingt dieser in der Röhre auf und ab. Dabei wird das Gas periodisch adiabatisch komprimiert und expandiert. Allerdings ist die Schwingung stark gedämpft, so dass nur wenige Perioden beobachtbar sind.

Um dem entgegenzuwirken befindet sich in der Mitte des Glasrohrs eine kleine Öffnung von ungefähr 1 mm Durchmesser. Lässt man einen gleichmäßigen Gasstrom in die Flasche, dann wirkt, sofern sich der Schwingkörper unterhalb der Öffnung befindet, ein zusätzlicher Druck auf den Schwingkörper. Befindet sich der Schwingkörper über der Öffnung, so entweicht der Gasstrom durch die Öffnung und der Druck sinkt. Beachten Sie, dass durch diese Maßnahme nur die Reibungsverluste ausgeglichen werden. Die eigentliche Bewegung des Schwingkörpers beruht auch weiterhin auf die adiabatische Kompression und Expansion des Gases.

Der Schwingkörper befindet sich im Gleichgewicht wenn der Druck  $p$  in der Flasche gleich der Summe aus dem Luftdruck  $p_0$  und dem „Schweredruck“ des Schwingkörpers ist:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A}, \quad (13)$$

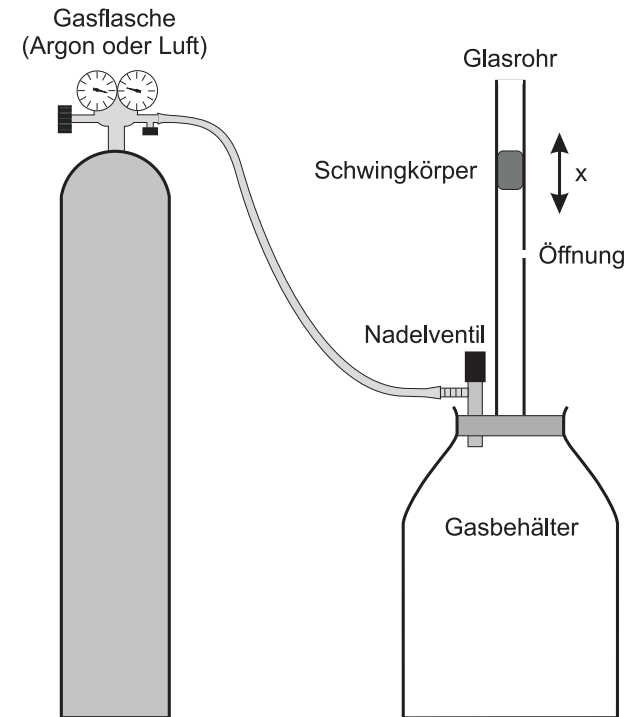


Abbildung 3: Versuchsaufbau nach Rüchardt.

wobei  $m$  die Masse und  $A$  die Querschnittsfläche des Schwingkörpers beschreiben. Schwingt der Körper um eine kleine Strecke  $x$  über die Gleichgewichtslage hinaus, wobei sich der Druck  $p$  um  $dp$  ändert, so gilt nach dem Newton'schen Gesetz:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = A dp. \quad (14)$$

Da der Vorgang adiabatisch erfolgt, gilt die Poisson'sche Gleichung

$$pV^\kappa = \text{konst.} \quad (15)$$

Differentiation dieses Ausdrucks nach  $V$  liefert:

$$p = V^{-\kappa} \cdot \text{konst.} \quad (16)$$

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa V^{-\kappa-1} \cdot \text{konst.} \quad (17)$$

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p}{V} \quad (18)$$

$$dp = -\kappa \frac{p}{V} dV. \quad (19)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gleichung (14) ein, so erhalten wir:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -A \kappa \frac{p}{V} dV. \quad (20)$$

Mit  $dV = Ax = \pi r^2 x$ , wobei  $r$  den Radius des Glasrohrs darstellt, ergibt sich:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\pi^2 r^4 \kappa \frac{p}{V} x \quad (21)$$

bzw.

$$\ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV} x = 0. \quad (22)$$

Gleichung (22) ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Die allgemeine Form lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (23)$$

Vergleichen wir dies mit Gleichung (22), so ergibt sich für die Kreisfrequenz des Schwingkörpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV}} \quad (24)$$

bzw. für die Periodendauer  $T$

$$T = \sqrt{\frac{4mV}{r^4 \kappa p}}. \quad (25)$$

Für den Adiabatenkoeffizienten  $\kappa$  folgt dann:

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}. \quad (26)$$

Die Größen  $m$ ,  $V$  und  $r$  sind bekannt und an der Versuchsanordnung angegeben. Für  $p$  ist der Druck gemäß Gleichung (13) einzusetzen. Somit kann der Adiabatenkoeffizient allein durch Messung der Periodendauer  $T$  bestimmt werden.

## VI Durchführung des Versuchs

Da für jede Teilaufgabe nur ein Messaufbau zur Verfügung steht, beginnt die eine Gruppe mit der Messung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément und Desormes, die andere mit der Messung nach Rüchardt. Anschließend wechseln beide Gruppen den Versuchsaufbau.

### 1. Methode nach Clément und Desormes

1. Erzeugen Sie durch mehrmaliges Pumpen mit dem Luftball ein Überdruck im Gasbehälter. Bei diesem Vorgang erwärmt sich das Gas. Warten Sie daher nach der Druckerhöhung einige Minuten ab, bis die Temperatur des Gases wieder auf Zimmertemperatur abgesunken ist. Sie können das Erreichen der Zimmertemperatur am asymptotischen Absinken des Druckes am Manometer auf den Endwert  $h_1$  beobachten. Dies entspricht, wie im Kapitel „Grundlagen“ erläutert, dem Zustand 1 im pV-Diagramm. Notieren Sie den Druck  $h_1$  in Ihr Protokollheft.
2. Öffnen Sie nun für etwa 2 Sekunden den Stopfen der Gasauslassöffnung. Dadurch wird ein adiabatischer Druckausgleich erzielt (Zustand 2 im pV-Diagramm). Warten Sie anschließend wieder den Temperatúrausgleich ab, bis sich ein konstanter Überdruck  $h_3$  eingestellt hat (Zustand 3). Dieser Wert wird abgelesen und im Protokollheft notiert.
3. Der Versuch ist mindestens 5-mal zu wiederholen. Falls der Enddruck  $h_3$  noch groß genug ist, kann man diesen Zustand als Anfangszustand für die folgende Messung benutzen. Falls nicht, müssen Sie den Druck durch Pumpen mit dem Luftball erneut erhöhen.

### 2. Methode nach Rüchardt

1. Stellen Sie am Reduzierventil der Gasflasche einen Druck von ca. 0,4 bar ein und regeln Sie das Nadelventil an der Apparatur so ein, dass sich eine Schwingung um die Mitte des Rohres (d.h. um die Gasaustrittsöffnung) einstellt. Um sicherzustellen, dass der Gasbehälter vollständig mit dem

entsprechenden Gas gefüllt ist, sollten Sie bevor Sie mit der Messung beginnen einige Minuten abwarten.

- Die Größen  $m$ ,  $V$  und  $r$  sind an der Versuchsapparatur angegeben. Notieren Sie diese Werte sowie den Luftdruck in Ihr Protokollheft.
- Messen Sie an jedem Aufbau die Zeit für mindestens 50 Schwingungen.

## VII Auswertung

Berechnen Sie für beide Messmethoden die Adiabatenkoeffizienten der entsprechenden Gase und vergleichen Sie diese mit den theoretisch zu erwartenden Werten. Was könnten die Ursachen für mögliche Abweichungen sein?

## VIII Anhang

### Bemerkung zum Adiabatenkoeffizient:

Der Unterschied der molaren Wärmen eines idealen Gases ist gegeben durch

$$c_p - c_V = R, \quad (27)$$

wobei  $R$  die allgemeine Gaskonstante darstellt. Bei der Ableitung dieser Beziehung wird vorausgesetzt, dass die innere Energie des Gases nicht vom Volumen sondern nur von der Temperatur abhängt. Dies ist für verdünnten Gase einigermaßen der Fall. Bei der Betrachtung der kinetischen Gastheorie in den Lehrbüchern sagt man, einatomige Gase haben drei, nämlich die translatorischen Freiheitsgrade, zweiatomige Gase (oder gestreckte Moleküle) zusätzlich zwei rotatorische Freiheitsgrade und drei- oder mehratomige Gase insgesamt 6 Freiheitsgrade, woraus sich dann  $c_V = 1,5R$ , bzw.  $2,5R$  und  $3R$  ergibt und somit  $\kappa = 5/3$  bzw.  $7/5$  und  $4/3$  folgt. Tatsächlich treten aber z.B. bei dem linearen  $\text{CO}_2$ -Molekül bei Zimmertemperatur bereits Knickschwingungen auf, oder bei Ethan machen die beiden  $\text{CH}_3$ -Gruppen Rotationspendelschwingungen gegeneinander, so dass zur inneren Energie weitere Beiträge kommen, die zu einer Erniedrigung von  $\kappa$  führen. In der folgenden Tabelle sind einige Werte für  $\kappa$  nach Kohlrausch aufgelistet:

Gas	$\kappa$
Ar	1,648
He	1,63
$\text{H}_2$	1,41
$\text{N}_2$	1,401
$\text{O}_2$	1,398
$\text{CO}_2$	1,293
Methan	1,308
Ethan	1,188
Propan	1,13



## Versuch 222 Heißluftmotor

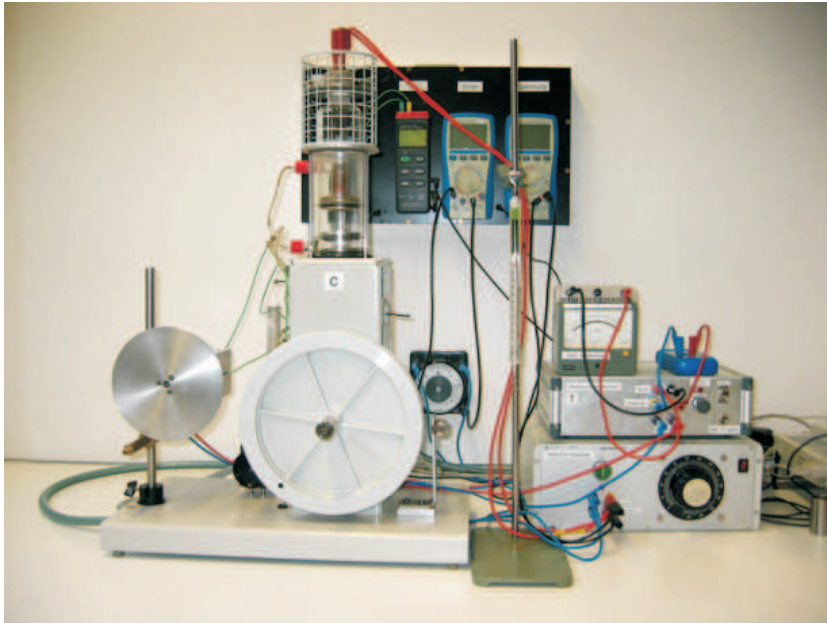


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

### I Messaufbau

- Heißluftmotor
- regelbares Netzteil für die Heizwendel
- Sensorsystem „Cassy“ mit Druck- Temperatur- und Wegsensor
- PC mit Drucker

- Dreikanal Thermometer
- Multimeter
- Elektrischer Antriebsmotor mit regelbarem Netzteil
- Durchflussmengen- Messgerät des Kühlwassers

### II Literatur

- Bergmann- Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band I*, de Gruyter Berlin.
- Eichler, Kronfeldt, Sahn, *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*, Springer Verlag.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wärmelehre, ideales Gasgesetz, Zustandsgrößen, Hauptsätze der Thermodynamik, thermodynamischer Kreisprozess, Wärmekraftmaschine, Kältemaschine und Wärmepumpe, Carnot- Prozess, Wirkungsgrad.

*Verständnisfragen:*

1. Wie lauten die drei Hauptsätze der Thermodynamik?
2. Worin unterscheiden sich isotherme, adiabatische, isochore und isobare Zustandsänderungen? Wie verlaufen diese im pV- Diagramm?
3. Beschreiben Sie den Carnot'schen Kreisprozess. Wie groß ist der theoretische Wirkungsgrad?
4. Diskutieren Sie die Wirkungsweise eines Stirlingmotors anhand des pV- Diagramms. Erläutern Sie für jeden Takt die Änderung der inneren Energie, die zugeführter Wärme und die geleistete Arbeit.

5. Beschreiben Sie die Funktion des Regenerators und diskutieren Sie warum der Stirling- Prozess mit einem idealem Regenerator den maximalen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine erreicht.
6. Erklären Sie mit Hilfe des pV-Diagramms die Funktionen der Stirling- Maschine beim Betrieb als Kältemaschine und als Wärmepumpe.
7. Laufen Wärmepumpen und Kältemaschinen gleichsinnig oder gegensinnig?
8. Worin liegt der Vorteil einer Wärmepumpe gegenüber anderen Heizquellen?

## IV Aufgaben

1. Untersuchen Sie qualitativ die Wirkungsweise des Heißluftmotors als Kältemaschine und Wärmepumpe.
2. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad des Heißluftmotors aus dem pV- Diagramm.
3. Ermitteln Sie den Wirkungsgrad durch Messung der abgegebenen Arbeit mit Hilfe einer Drehmomentmessung.

## V Motivation

„...*These imperfections have been in great measure removed by time and especially by the genius of the distinguished Bessemer*<sup>1</sup>. *If Bessemer iron or steel had been known thirtyfive or forty years ago there is scarce a doubt that the air engine would have been a great success.*“

Robert Stirling, 1876

In diesem Zitat bezieht sich Robert Stirling auf die Gefahren der Anfang des 19. Jahrhunderts aufkommenden Hochdruckdampfmaschinen. Um den Wirkungsgrad der Dampfmaschine zu steigern, wurde die Kesseltemperatur unter hohem Druck weit über den Siedepunkt des Wassers erhöht. Allerdings waren die damals zur Verfügung stehenden Materialien- Stahl war noch nicht bekannt-

<sup>1</sup>Ein nach Henry Bessemer benannte Stahlsorte bzw. ein Verfahren zur Massenstahlerzeugung.

ungeeignet, diesen hohen Drücken dauerhaft standzuhalten. Zahlreiche Kessel- explosionen waren die Folge, die viele Menschenopfer forderten.

Die technischen Mängel der Hochdruckdampfmaschine, insbesondere die Gefahren für die Arbeiter, waren mitverantwortlich dafür, dass sich der schottische Pfarrer Robert Stirling mit der Entwicklung eines neuen Motortyps beschäftigte. 1816 wurde von dem damals 26-jährigen Stirling der Heißluftmotor zum Patent angemeldet. Damit ist der Stirlingmotor, nach der Dampfmaschine, die älteste periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine.

Die ersten Anwendungen des Stirlingmotors waren vor allem Wasserpumpen und Maschinenantriebe mit kleinem bis mittlerem Leistungsbedarf. Allerdings gelang es dem Stirlingmotor niemals sich gegen die Dampfmaschine so richtig durchzusetzen. Mit der Entwicklung neuer Materialien, insbesondere des Stahls, wurden die Dampfmaschinen betriebssicherer und verdrängten den Heißluftmotor immer mehr vom Markt. Lediglich in solchen Bereichen, in denen Antriebe mit geringer Leistung benötigt wurden, wie z.B. Ventilatoren oder Nähmaschinen, wurden Heißluftmotoren in größerer Stückzahl eingesetzt.

Das endgültige Ende der Stirlingmotoren, aber auch letztendlich der Dampfmaschinen, wurde durch die Erfindung des Verbrennungsmotors und des Elektromotors eingeleitet. Diese neuen Motoren waren bei gleichem Gewicht deutlich leistungsstärker und auch günstiger herzustellen als der Heißluftmotor, so dass dieser allmählich vom Markt verschwand.

Im Jahre 1938 griff die Firma Philips die Ideen Stirlings erneut auf. Philips suchte für seine Radioempfänger und Sendestationen neue Absatzmärkte in Afrika und Asien. Da die Elektrifizierung dieser Länder noch nicht vorangeschritten war, benötigte man Stromgeneratoren, die auf Basis des Heißluftmotors entwickelt werden sollten. Kurz nach dem zweiten Weltkrieg wurden die ersten Prototypen und 1950 ein 200 W Stirlingmotor vorgestellt. Allerdings wurde dieser Motor niemals in großen Stückzahlen gefertigt. Mit der Erfindung des Transistors wurden die Radioempfänger immer energiesparender und benötigten daher keine zusätzlichen Stromgeneratoren. Trotzdem wurde an der Entwicklung des Heißluftmotors weiter gearbeitet. 1975 stellte Philips einen 4-Zylinder Heißluftmotor vor, der eine Leistung von 115 PS bei 3200 Umdrehungen pro Minute erreichte. Der Wirkungsgrad dieses Motors betrug 40 %!

Ein wesentlicher Vorteil der Heißluftmotoren besteht darin, dass die „Wärme von außen zugeführt wird“ und nicht wie bei Otto- oder Dieselmotoren eine innere Verbrennung erfolgt. Dadurch können nahezu alle Energieträger verwendet werden; nicht nur flüssige, feste oder gasförmige Brennstoffe, sondern auch Son-

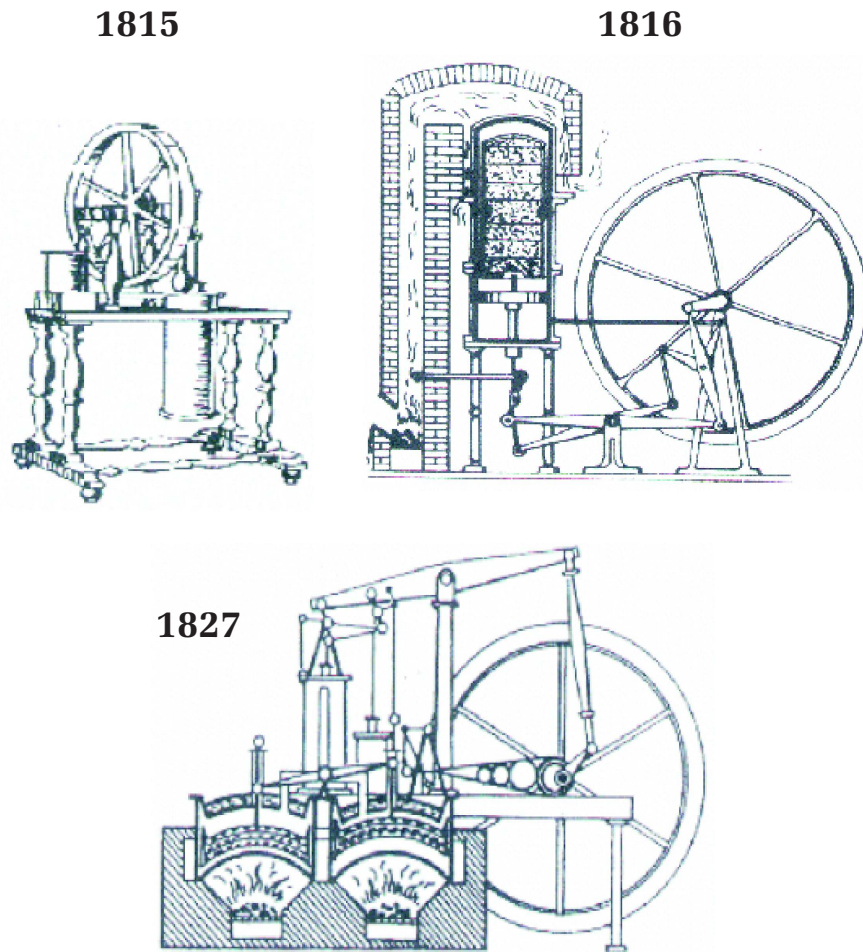


Abbildung 2: *Historische Stirlingmotoren. Quelle: Hermann Schmidt. Hat der Stirlingmotor eine Zukunft? Eine allgemeine Übersicht.*

nenenergie, die bei chemischen Reaktionen freiwerdende Wärme und im Prinzip auch Kernenergie. Die äußere Verbrennung ist zudem sehr umweltschonend. Durch einen externen Brenner kann die Verbrennung optimal reguliert werden, so dass ein Minimum an Umweltschadstoffen wie Kohlenmonoxid oder Stickoxide erzeugt werden. Desweiteren entstehen bei der äußeren Verbrennung keine Verschmutzungen und Rückstände innerhalb des Motors, wodurch eine hohe Standzeit gewährleistet ist und ein wartungsbedingter Ölwechsel des Motors nur selten oder gar nicht notwendig ist. Weitere Vorteile liegen in der geringen Geräuschemission, der Laufruhe und dem hohen Wirkungsgrad. Der theoretische Wirkungsgrad des Stirlingmotors entspricht dem des Carnot- Wirkungsgrades und ist damit höher als der theoretische Wirkungsgrad von Otto- und Dieselmotoren.

Allerdings besitzt der Heißluftmotor gegenüber den hochgezüchteten Verbrennungsmotoren auch deutliche Nachteile: Um bei kleiner Bauhöhe und geringem Gewicht hohe Leistungen zu erzielen, muss das Arbeitsgas auf einen sehr hohen Druck ( $\approx 150$  bar) „vorgespannt“ werden und zudem der Motor bei hohen Drehzahlen betrieben werden. Damit sind äußerst hohe mechanische Belastungen bei den trockenlaufende Lagern und Dichtungen verbunden. Die Materialien des Erhitzers müssen bis zu  $1000^\circ\text{C}$  hitze- und druckbeständig sein. Bei einem Innendruck von 150 bar ist dies nicht trivial! Diese Anforderungen setzen spezielle Materialien voraus, die die Herstellung dieses Motors gegenüber den Verbrennungsmotoren verteuern. Ein weiterer Nachteil liegt in dem hohem Aufwand der Leistungsregulierung. Bei einem Verbrennungsmotor lässt sich die Leistung durch die Einspritzmenge des Brennstoffes sehr einfach einstellen. Bei dem Heißluftmotor ist dies nicht möglich. Eine schnelle Leistungsregulierung ist hier nur über eine Variierung des Innendrucks möglich- bei typischerweise 150 bar ebenfalls nicht trivial.

Angesicht des heutigen Entwicklungsstand ist der Einsatz von Heißluftmotoren nur in solchen Bereichen wirtschaftlich, in denen Otto- oder Dieselmotoren nicht eingesetzt werden können. Ein erfolgversprechendes Anwendungsgebiet stellen Blockheizkraftwerk (BHKW) zur dezentralen Energieversorgung dar. Solche Kraftwerke können zur Stromerzeugung mit günstigen und nachwachsenden Brennstoffen (z.B. Holzpellets) befeuert werden. Zudem lässt sich die Abwärme zu Heizzwecken nutzen, so dass ein sehr hoher Wirkungsgrad erreicht wird. Zur Zeit wird von der Sindelfinger Firma Solo ein Blockheizkraftwerk auf Basis eines Stirling- Motors in Serie gefertigt. Dieses Stirling- Modul liefert eine elektrische Leistung von 2-9 kW bei einem elektrischen Wirkungsgrad von 24 %. Der Ge-

samtwirkungsgrad des BHKW liegt nach Angaben der Firma Solo bei 90 %. Gute Marktchancen besitzt der Heißluftmotor auch im Bereich der FCKW-freien Kälteerzeugung. Der Stirling-Motor kann nämlich nicht nur als Wärmekraftmaschine, sondern auch zum Heizen bzw. Kühlen verwendet werden. Wird der Motor von außen mechanisch angetrieben, so arbeitet er je nach Drehrichtung des Antriebs als Wärmepumpe oder als Kältemaschine. Vor allem im Betrieb als Kältemaschine finden sich zahlreiche technische Anwendungen. Da Temperaturen von bis zu  $-190^{\circ}\text{C}$  erreicht werden können, eignen sich Stirling-Motoren zur Kühlung von Supraleitern, von Infrarotsensoren und zur Luft- oder Erdgasverflüssigung. Das Konzept der Stirlingmaschinen ist noch lange nicht beendet. Gerade in der jetzigen Zeit, in der man immer mehr nach umweltschonenden und regenerativen Energiequellen sucht, stellt der Heißluftmotor ein erfolgversprechendes Konzept dar. Die Entwicklung neuer Werkstoffe und Verfahren ist so weit voran geschritten, dass die von Stirling vorhergesagte Ära bereits begonnen hat:

*„It remains for some skilled and ambitious mechanist in a future age to repeat it under favourable circumstances and with complete success.“*  
Robert Stirling, 1876

## VI Grundlagen

### Wirkungsweise des Heißluftmotors

Es gibt unterschiedliche Typen von Stirlingmotoren. Wegen des einfachen Aufbaus wollen wir zunächst das Funktionsprinzip des Stirlingmotors anhand eines sogenannten  $\gamma$ -Typ Heißluftmotors diskutieren (Abbildung 3 oben). Dieser Motor besitzt zwei separate Zylinder, die durch ein Rohr miteinander verbunden sind. Beide Zylinder sind mit Luft gefüllt und nach außen abgedichtet. Um den Wirkungsgrad zu erhöhen, werden bei industriell gefertigten Motoren statt Luft auch Edelgase oder Wasserstoff als Arbeitsgas verwendet. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Betrachten wir zunächst den linken Zylinder (Abbildung 3 unten) des Heißluftmotors. Der untere Bereich wird von außen beheizt, der obere gekühlt. Bei den im Praktikum verwendeten Motoren erfolgt die Heizung elektrisch mit einer

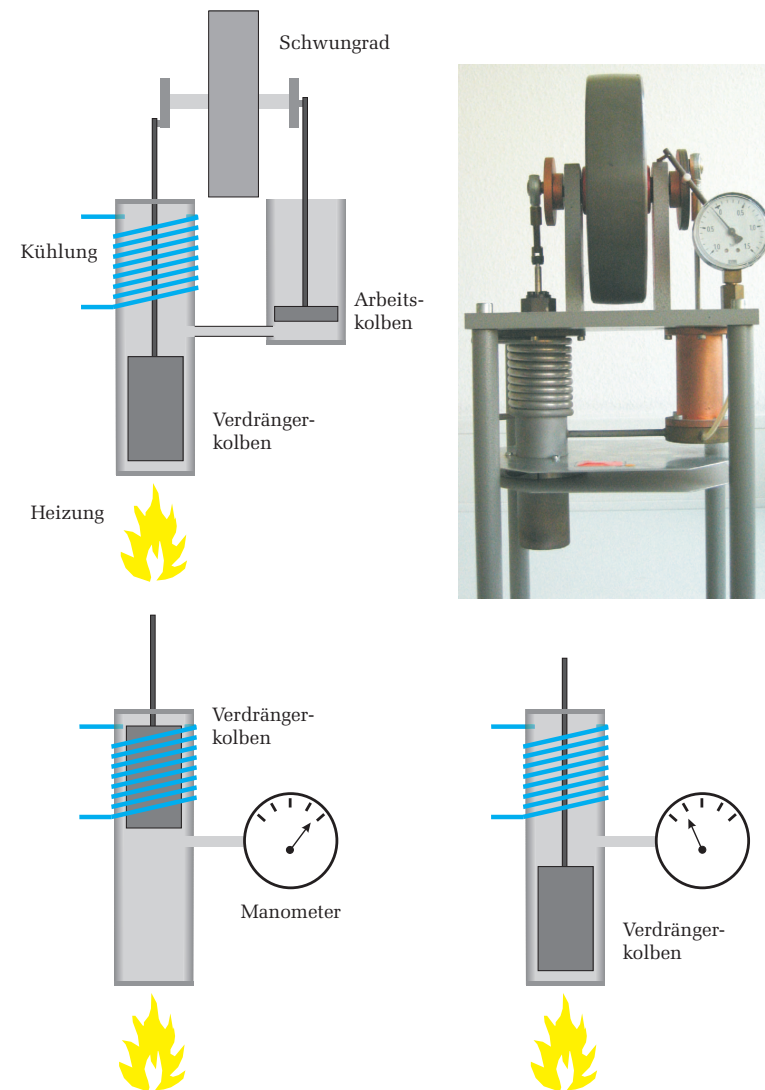


Abbildung 3: Oben: Aufbau eines  $\gamma$ -Typ Stirlingmotors. Unten: Wirkungsweise des Verdrängers.



Heizwendel und die Kühlung durch eine Wasserkühlung. Im Zylinder befindet sich der sogenannte **Verdrängerkolben** der ungefähr die Hälfte des Zylindervolumen einnimmt. Seine Aufgabe besteht darin, das Arbeitsgas zwischen dem heißen und dem kalten Bereich des Zylinders hin und her zu bewegen. Befindet sich der Verdrängerkolben im oberen Bereich, so hat er die Luft in den unteren, beheizten Bereich des Zylinders verdrängt. Umgekehrt wurde die Luft in den kalten Bereich des Zylinders verdrängt, wenn sich der Verdrängerkolben im unteren Teil des Zylinders befindet. Beachten Sie, dass der Verdrängerkolben das Arbeitsgas nicht komprimiert, sondern es nur zwischen den beiden Wärmereservoirs hin und her schiebt. Je nach Stellung des Verdrängers, wird das Gas einmal aufgeheizt und im anderen Fall abgekühlt. Befindet sich das Gas im geheizten Bereich, so steigt auch der Druck im Zylinder. Hat dagegen der Verdränger die Luft in den kalten Bereich verschoben, so kühlt sich die Luft ab und der Druck sinkt. Dieser „Heizzyylinder“ ist nun mit einem weiteren Zylinder, dem Arbeitszylinder, über ein Rohr verbunden (Abbildung 3 oben). In ihm erfolgt die eigentliche Kompression und Expansion des Gases durch den sogenannten **Arbeitskolben**. Verdrängerkolben und Arbeitskolben werden durch eine gemeinsame Kurbelwelle gesteuert. Die Kolben sind so angeordnet, dass eine Kompression des Gases dann erfolgt, wenn sich die Luft im kalten Bereich des Heizzyinders, und damit über das Rohr auch im Arbeitszylinder, befindet. Das Arbeitsgas wird demnach bei einem geringen Druck komprimiert. Nach der Kompression verdrängt der Verdrängerkolben die Luft in den heißen Bereich, der Druck steigt, das Arbeitsgas expandiert und verschiebt den Arbeitskolben, so dass nach außen mechanische Arbeit verrichtet wird. Danach wird die Luft wieder abgekühlt und einen Teil der zuvor freigewordenen Arbeit dazu verwendet, dass Gas erneut zu komprimieren. Der Kreisprozess beginnt von vorne.

Im Gegensatz zu dem  $\gamma$ -Typ Heißluftmotor besitzt der  $\beta$ -Typ Stirlingmotor (Abbildung 4) nur einen Zylinder, in dem sowohl Arbeitskolben als auch Verdrängerkolben gemeinsam angeordnet sind. Das Funktionsprinzip entspricht dem des  $\gamma$ -Typ Heißluftmotors, mit dem Unterschied, dass der Gaswechsel von heiß nach kalt im Kompressionsraum nicht durch ein Rohr, sondern in einem gemeinsamen Zylinder erfolgt. Dadurch verringert sich das Totvolumen und der Wirkungsgrad steigt. Im Praktikumsversuch werden wir quantitative Messungen nur am  $\beta$ -Typ Stirlingmotor durchführen. Ein  $\gamma$ -Typ Motor steht zu Demonstrationszwecken zur Verfügung.

Abbildung 5 links zeigt den Stirling- Prozess im pV- Diagramm; rechts daneben die entsprechenden Stellungen des Arbeits- und Verdrängerkolbens. Beim

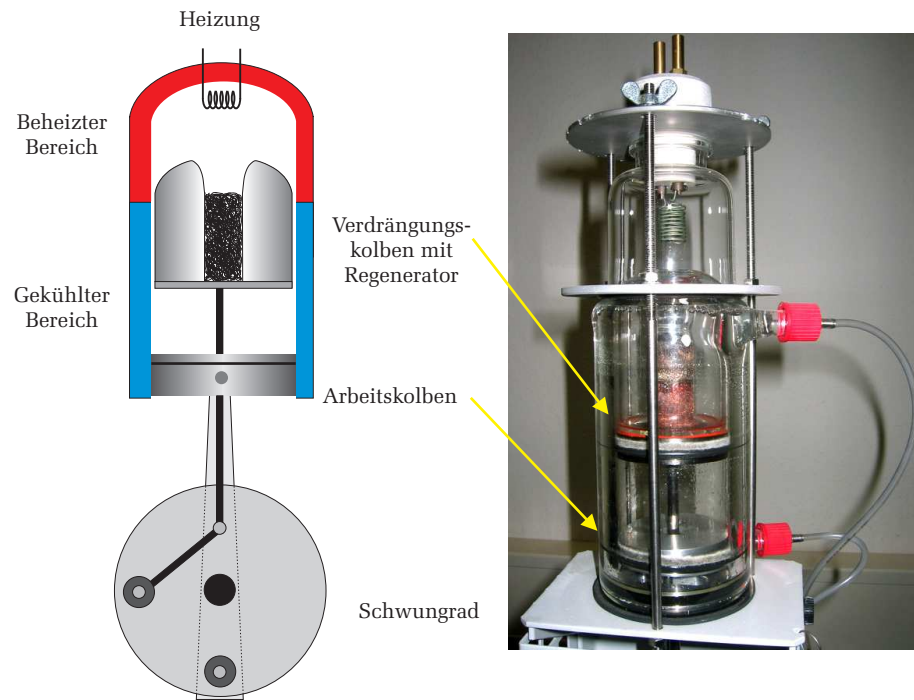


Abbildung 4: Aufbau eines  $\beta$ -Typ Stirlingmotors.

idealen Stirling- Prozess werden vier Zustandsänderungen durchlaufen:

- $1 \rightarrow 2$  Isotherme Expansion: In Stellung 1 befindet sich der Verdrängerkolben ganz unten (unterer Totpunkt). Die Luft befindet sich im **heißen** Zylinderbereich und wird aufgeheizt. Bei der isothermen Expansion nimmt das Arbeitsgas die Wärmemenge  $Q_1$  auf, dehnt sich dabei aus und verschiebt den Arbeitskolben gegen den Atmosphärendruck nach unten, wobei vom Gas die Arbeit  $W_1$  geleistet wird.
- $2 \rightarrow 3$  Isochore Abkühlung: Der Verdrängerkolben bewegt sich nach oben und verdrängt das Arbeitsgas in den gekühlten Bereich. Das Gas wird auf die Temperatur  $T_2$  abgekühlt und gibt dabei die Wärmemenge  $Q_2$  an das Kühlsystem ab.

- 3 → 4 Isotherme Kompression: Der Arbeitskolben bewegt sich nach oben und komprimiert die **kalte** Luft. Dabei wird vom Kolben die Arbeit  $W_3$  verrichtet. Die bei der Kompression freiwerdende Wärmemenge  $Q_3$  wird an das Kühlsystem abgeführt.
- 4 → 1 Isochore Erwärmung: Der Verdrängerkolben bewegt sich nach unten und schiebt das Arbeitsgas in den heißen Bereich zurück. Durch Aufnahme der Wärmemenge  $Q_4$  steigt die Temperatur wieder auf den Anfangswert  $T_1$ .

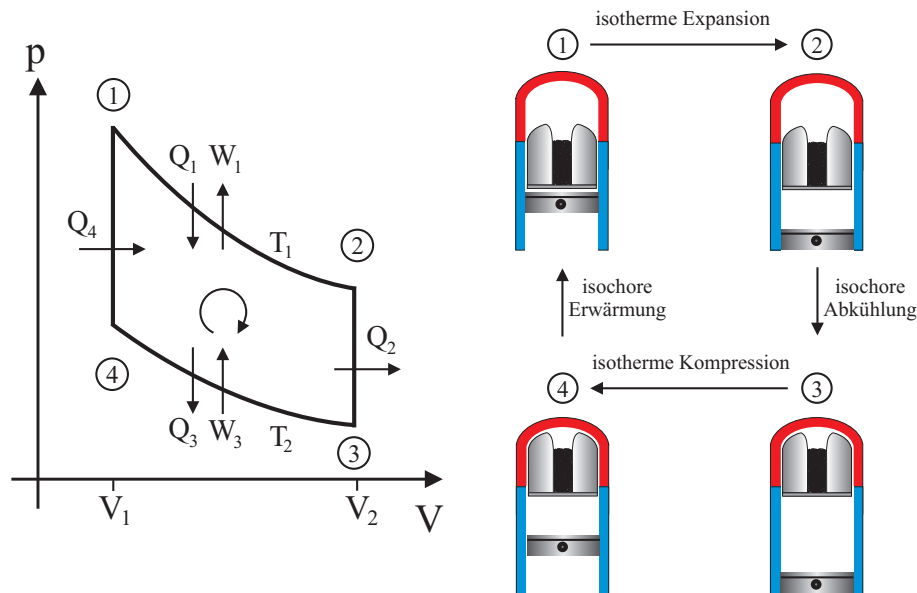


Abbildung 5: Links:  $pV$ -Diagramm des idealen Stirling Prozesses. Rechts: Korrespondierende Stellungen des Arbeits- und Verdrängerkolbens bei einem  $\beta$ -Typ Heißluftmotor.

Der ideale Stirling Prozess lässt sich technisch nicht realisieren. Eine isochore Zustandsänderung setzt eine diskontinuierliche Kolbenbewegung voraus. Bei den Zustandsänderungen 2 → 3 und 4 → 1 müsste der Arbeitskolben im Stillstand verharren und nur der Verdrängerkolben bewegt werden. Zudem müssten

die Isothermen sehr langsam durchlaufen werden, so dass ein hinreichender Wärmeaustausch mit dem Heiz- bzw. Kühlsystem gewährleistet ist. Solch eine Maschine könnte nur diskontinuierlich mit geringer Drehzahl arbeiten, womit ein äußerst unruhiger Lauf und sehr hohe mechanische Belastungen verbunden wären.

Bei dem im Praktikum verwendeten Motor sind sowohl Arbeits- als auch Verdrängerkolben über das Schwungrad direkt an die Kurbelwelle angekoppelt (Abbildung 4). Beide Kolben weisen somit eine annähernd sinusförmige Bewegung auf, wodurch ein ruhiger, belastungsarmer Lauf möglich ist. Zudem sind Arbeits- und Verdrängerkolben um  $90^\circ$  phasenverschoben angeordnet, so dass der ideale Stirling-Prozess einigermaßen gut angenähert werden kann (Abbildung 6 links). Der Nachteil bei diesem kontinuierlich laufenden Kurbeltrieb liegt darin, dass der Kreisprozess nicht in vier diskreten Zustandsänderungen durchlaufen wird, sondern dass es zu einer Überlappung der einzelnen Takte kommt. So findet beispielsweise bei der Expansion im Arbeitstakt 1 → 2 auch gleichzeitig ein vorzeitiger Gasaustausch vom heißen in den kalten Bereich statt und zu Beginn des Kompressionstaktes 3 → 4 befindet sich noch nicht die gesamte Luft im gekühlten Teil des Motors. Diese Überlappungen führen zu einer Reduzierung des Wirkungsgrads gegenüber dem idealen Stirling-Prozess. Das  $pV$ -Diagramm eines realen Heißluftmotors zeigt daher deutliche Abweichungen vom idealen Stirling-Prozess (Abbildung 6 rechts). Die starken Abrundungen im Bereich der Isochoren gegenüber dem idealen Prozess sind auf die kontinuierliche Bewegung des Kolbens und die Trägheit der Wärmeleitung zurückzuführen.

### Funktion des Regenerators

Durch den Einsatz eines Regenerators kann die Effizienz des Heißluftmotors erheblich gesteigert werden. Um dies zu verstehen, blicken wir nochmals auf die Funktion des Verdrängerkolbens zurück. Der Verdrängerkolben hat die Aufgabe das Arbeitsgas periodisch zwischen dem geheizten und dem gekühlten Bereich zu bewegen. Im Takt 2 → 3 der isochoren Abkühlung bewegt sich der Verdrängerkolben nach oben und schiebt das Arbeitsgas in den gekühlten Bereich.

Beim „Gasaustausch“ ist es zum einen wichtig, dass die Temperaturänderung des Arbeitsgases möglichst rasch erfolgt und zum anderen, dass die von außen zugeführte Wärme dem System nicht völlig verlorenght. Beides wird mit dem Regenerator erreicht, der als Kurzzeitwärmespeicher wirkt. Der Verdrängerkolben besitzt in axialer Richtung eine Öffnung, die mit Kupferwolle

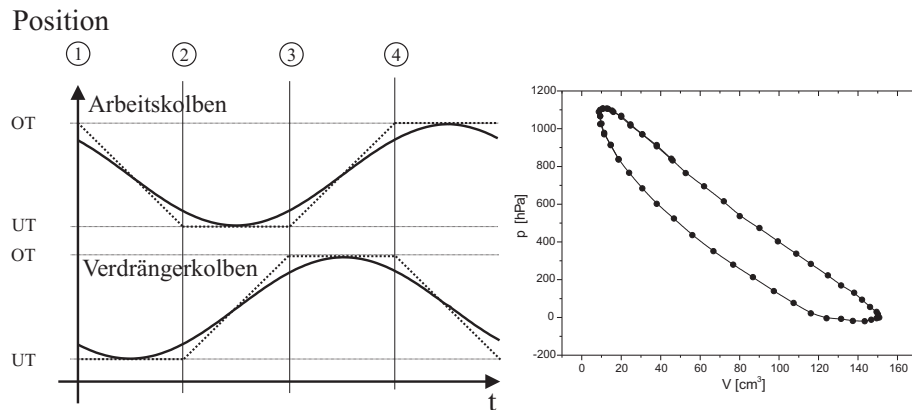


Abbildung 6: Links: Kurbelwellendiagramm eines Heißluftmotors. Die gepunktete Kurve verdeutlicht die diskontinuierliche Kolbenbewegung des idealen Stirling-Prozesses, die durchgezogene Linie die kontinuierlich laufende Bewegung bei einem Kurbeltrieb. Die Bezeichnungen OT/UT an der Ordinate kennzeichnen den oberen bzw. unteren Totpunkt, d.h. die Umkehrpunkte der jeweiligen Kolbenbewegungen. Rechts: Gemessenes  $pV$ -Diagramm des im Praktikum eingesetzten Heißluftmotors. Die von der Kurve eingeschlossene Fläche entspricht der pro Zyklus in mechanische Arbeit überführten Wärmeenergie.

gefüllt ist. Bewegt sich der Verdränger nach oben, so strömt die heiße Luft durch den Regenerator und gibt dabei einen Großteil der Wärme an die Kupferwolle ab. Diese Wärme wird im Regenerator gespeichert, so dass das Arbeitsgas auf dem Rückweg  $4 \rightarrow 1$  vom kalten in den heißen Bereich, sich einen Großteil der zuvor abgegebenen Wärme aus der Kupferwolle zurückholen kann. Diese Wärmemenge wird demnach nicht an das Kühlsystem abgeführt, sondern bleibt innerhalb des Kreisprozesses erhalten. Mit einem idealen Regenerator erreicht der Wirkungsgrad des Stirling-Motors den maximal möglichen Wirkungsgrad einer periodisch arbeitenden Wärmekraftmaschine! Wir werden bei der Berechnung des Wirkungsgrades noch darauf zurückkommen.

### Thermodynamische Beschreibung des Stirling-Prozesses

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik führt die einem System

zugeführte Wärmemenge  $dQ$  zu einer Änderung der inneren Energie  $dU$  sowie zur Verrichtung einer Volumenarbeit  $pdV$ :

$$dQ = dU + pdV \quad (1)$$

Bei einem idealen Gas beschreibt die innere Energie allein die Bewegungsenergie der Gasmoleküle. Eine Erhöhung der inneren Energie führt somit zu einem Temperaturanstieg. Mit Hilfe der molaren Wärmekapazität  $C_V$  ergibt sich

$$dQ = C_V \nu dT + pdV, \quad (2)$$

wobei  $\nu$  die Gasmenge in mol bezeichnet.

Beim Stirling'schen Kreisprozess werden, wie in Abbildung 5 dargestellt, vier Zustandsänderungen durchlaufen. Wir wollen im Folgenden für jeden Takt die Energiebilanz (2) aufstellen und daraus den Wirkungsgrad des idealen Stirling-Prozesses berechnen:

1. Bei der isothermen Expansion wird dem Heizsystem die Wärmemenge  $Q_1$  entzogen. Da die Temperatur konstant bleibt, wird diese Wärmemenge vollständig in mechanische Volumenarbeit umgewandelt.

$$dQ_1 = pdV. \quad (3)$$

Mit Hilfe der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$pV = \nu RT, \quad (4)$$

wobei  $R$  die ideale Gaskonstante darstellt, ergibt sich für (3)

$$dQ_1 = pdV = \nu RT_1 \frac{dV}{V}. \quad (5)$$

Durch Integration von  $V_1$  bis  $V_2$  (siehe Abbildung 5) ergibt sich schließlich für die Wärmemenge  $Q_1$

$$Q_1 = \nu RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (6)$$

Da bei der isothermen Zustandsänderung die zugeführte Wärmemenge vollständig in Volumenarbeit  $W$  umgewandelt wird, gilt für die bei diesem Motortakt geleistete Arbeit

$$W_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (7)$$

2. Bei der isochoren Abkühlung wird wegen  $dV = 0$  keine Volumenarbeit geleistet. Temperaturänderungen wirken sich daher nur auf die innere Energie aus:

$$dQ_2 = -C_V \nu dT. \tag{8}$$

Durch Integration ergibt sich

$$Q_2 = -C_V \nu \int_{T_1}^{T_2} dT = -C_V \nu (T_1 - T_2), \tag{9}$$

wobei dieser Ausdruck negativ ist, da Wärme nach außen abgeführt wird.<sup>2</sup> Die mechanische Arbeit  $W_2$  ist bei diesem Motortakt Null:

$$W_2 = 0. \tag{10}$$

3. Bei der isothermen Kompression gelten die gleichen Überlegungen wie bei der isothermen Expansion. Zu berücksichtigen ist lediglich, dass die Kompression bei diesem Motortakt bei der Temperatur  $T_2$  erfolgt und die Richtung der Integration über das Volumen entgegengesetzt von  $V_2$  nach  $V_1$  verläuft. Für die nach außen abgeführte Wärmemenge ergibt sich:

$$Q_3 = -\nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{11}$$

und für die Volumenarbeit

$$W_3 = -\nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}, \tag{12}$$

4. Auch hier gelten die gleichen Überlegungen wie unter 2. Die vom Gas aufgenommene Wärmemenge  $Q_4$  beträgt

$$Q_4 = C_V \nu (T_1 - T_2) \tag{13}$$

und es wird keine mechanische Arbeit verrichtet.

$$W_4 = 0 \tag{14}$$

<sup>2</sup>Vorzeichenkonvention: Negative Vorzeichen treten bei Termen auf bei denen Wärme nach außen abgeführt wird oder wenn dem Gas von außen Arbeit zugeführt wird (Kompression). Leistet das Gas nach außen Arbeit oder wird Wärme zugeführt, sind die entsprechenden Terme positiv.

Die vom Heißluftmotor geleistete Nutzarbeit  $W_N$  ergibt sich aus dem Kurvenintegral über den gesamten Kreisprozess.

$$W_N = \oint pdV \tag{15}$$

Da nur beim Durchlaufen der Isothermen Arbeit geleistet wird, ist die Nutzarbeit gerade die Summe der Teilarbeiten in den Takten  $1 \rightarrow 2$  und  $3 \rightarrow 4$ :

$$\begin{aligned} W_N &= W_1 + W_3 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ W_N &= \nu R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned} \tag{16}$$

Die Nutzarbeit ist demnach umso größer, je größer die Temperaturdifferenz und je größer das Kompressionsverhältnis  $V_2/V_1$  ist.

Der ideale thermische Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine ist definiert durch das Verhältnis der Nettoarbeit  $W_N$  zur aufgenommenen Wärmemenge  $Q^+$

$$\eta_{th} = \frac{W_N}{Q^+}. \tag{17}$$

Betrachten wir zunächst einen Heißluftmotor **ohne Regenerator** und berechnen zur Bestimmung des thermischen Wirkungsgrads die aufgenommene Wärmemenge  $Q^+$ . Im Takt  $2 \rightarrow 3$  wird das Arbeitsgas isochor abgekühlt und die Wärme dem Kühlsystem zugeführt. Diese Abwärme geht ohne Regenerator dem System verloren, so dass bei der isochoren Erwärmung im Zyklus  $4 \rightarrow 1$  die benötigte Wärme erneut aus dem Heizsystem entnommen werden muss. Die während des Kreisprozesses insgesamt aufgenommene Wärmemenge  $Q^+$  setzt sich somit aus zwei Beiträgen zusammen, nämlich aus den zugeführten Wärmemengen bei der isothermen Expansion und der isochoren Erwärmung:

$$Q^+ = Q_1 + Q_4 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \nu (T_1 - T_2). \tag{18}$$

Zusammen mit Gleichung (16) erhalten wir nach einigen Umformungen für den thermischen Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{W_N}{Q^+} = \frac{\ln \frac{V_2}{V_1} (1 - \frac{T_2}{T_1})}{\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{C_V}{R} (1 - \frac{T_2}{T_1})}. \tag{19}$$

Wie man dieser Gleichung entnehmen kann, hängt der Wirkungsgrad von der Temperaturdifferenz, vom Kompressionsverhältnis aber auch von der **Art des verwendeten Gases** ab. Im Nenner steht das Verhältnis der molaren Wärmekapazität und der Gaskonstante. Nach dem Äquipartitionsprinzip entspricht dieses Verhältnis gerade der halben Anzahl der Freiheitsgrade der Gasmoleküle. Um einen hohen Wirkungsgrad zu erzielen, werden daher bei industriell gefertigten Motoren, häufig Edelgase als Arbeitsmedium eingesetzt. Diese haben als einatomige Gase nur drei Freiheitsgrade und besitzen daher die kleinsten molaren Wärmekapazitäten.

Durch die Verwendung eines Regenerators kann der Wirkungsgrad des Heißluftmotors deutlich gesteigert werden. Mit diesem wird die Abwärme der isochoren Abkühlung im Takt 2 → 3 nicht an das Kühlwasser abgeführt, sondern im Regenerator (Kupferwolle) gespeichert. Ein idealer Regenerator kann die gesamte Wärme zwischenspeichern und bei der isochoren Erwärmung im Zyklus 4 → 1 dem Arbeitsgas wieder zuführen. Somit bleibt dieser Wärmebeitrag im System erhalten. Die einzige äußere Wärmezufuhr erfolgt dann nur bei der isothermen Expansion, so dass für die insgesamt aufgenommene Wärmemenge  $Q^+$  gilt:

$$Q^+ = Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{20}$$

Mit Gleichung (16) erhält man für den thermischen Wirkungsgrad  $\eta_{th}^R$  des Stirling- Prozesses mit einem idealen Regenerator

$$\eta_{th}^R = \frac{W_N}{Q^+} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{21}$$

Somit erreicht der Stirling- Prozess den gleichen Wirkungsgrad wie der Carnot-Prozess und damit den maximal möglichen Wirkungsgrad, den eine periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine überhaupt erreichen kann.

### Betrieb des Heißluftmotors als Wärmepumpe und Kältemaschine

Der Stirling'sche Kreisprozess ist einer der wenigen Kreisprozesse, der umkehrbar ist. Wird das Schwungrad des Motors von außen angetrieben, so kann dieser auch als Kältemaschine oder Wärmepumpe betrieben werden. Bei einem äußeren Antrieb wird der **Kreisprozeß** im pV- Diagramm in umgekehrter Richtung, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen<sup>3</sup>. In diesem

<sup>3</sup>Der Drehsinn bezieht sich hier auf das Durchlaufen des Prozesses im pV-Diagramm und hat nichts mit der Drehrichtung der Kurbelwelle zu tun!

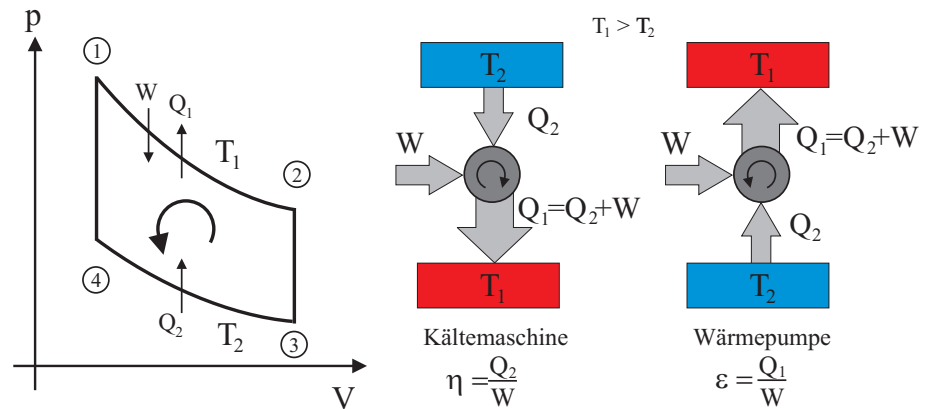


Abbildung 7: Links: Beim Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine oder Wärmepumpe wird das pV- Diagramm links herum durchlaufen. Rechts: Energiebilanz von Kältemaschine und Wärmepumpe.

Fall kehren sich die Richtungen aller Energieströme um. Beim Betrieb als Kältemaschine wird dem zu kühlenden Bereich die Wärmemenge  $Q_2$  entzogen und dem Wärmereservoir die Wärmemenge  $Q_1 = W + Q_2$  zugeführt (Abbildung 7).  $W$  bezeichnet dabei die von außen zugeführte mechanische Arbeit. Der im Praktikum verwendete Motor arbeitet als Kältemaschine, wenn er im Uhrzeigersinn von außen angetrieben wird. Dabei sinkt die Temperatur im oberen Raum und die Kühlwassertemperatur steigt. Wird der Motor entgegen dem Uhrzeigersinn betrieben, so arbeitet er als Wärmepumpe. Dabei sinkt die Temperatur des Kühlwassers und der obere Bereich des Motors wird aufgeheizt. Der Wirkungsgrad einer Kältemaschine lässt sich durch das Verhältnis der der kalten Seite entzogenen Wärmemenge  $Q_2$  zur zugeführten mechanischen Arbeit  $W$  definieren:

$$\eta = \frac{Q_2}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \tag{22}$$

Die Effizienz einer Wärmepumpe wird durch die sogenannte Leistungsziffer  $\epsilon$  charakterisiert:

$$\epsilon = \frac{Q_1}{W}. \tag{23}$$

Die Berechnung diese Ausdrucks lässt sich analog wie bei der Wärmekraftmaschine durchführen, sie hängt nur von den Temperaturen

der beiden Wärmereservoirs ab:

$$\epsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1 \quad ! \quad (24)$$

## VII Durchführung des Versuchs

### Sicherheitshinweise:

- Lassen Sie den Heißluftmotor niemals unbeaufsichtigt laufen.
- Der beheizte Bereich des Motors wird sehr heiß. Achten Sie beim Umgang mit dem Motor, dass Sie diese Bereiche nicht berühren.
- Verwenden Sie bei allen Strom- und Spannungsmessungen ausschließlich die vollisolierten Sicherheits- Messleitungen.
- Der Motor darf nur bei eingeschalteter Wasserkühlung betrieben werden.
- Die Heizwendel des Keramik-Zylinderkopfs darf nur bei laufendem Motor bis zur Gelbglut erhitzt werden. Im Fall eines Stillstandes, werfen Sie den Motor rasch wieder an oder schalten Sie das Netzteil aus.
- Der Heizstrom des Teflon-Zylinderkopf darf 6 A nicht übersteigen (Anzeige am Amperemeter maximal 1,2 A).
- Der Betrieb des Motors als Wärmepumpe oder Kältemaschine darf nur bei montierter Riemenabdeckung erfolgen.
- Die Drehzahl soll nicht kleiner als  $2,5 \text{ s}^{-1}$  und nicht größer als  $7,0 \text{ s}^{-1}$  sein.

### Aufbau des Heißluftmotors

Der im Praktikum eingesetzte Heißluftmotor besteht aus einem Glaszylinder, in dem sowohl Arbeits- als auch Verdrängerkolben vertikal angeordnet sind. Beide Kolben werden durch eine gemeinsame Kurbelwelle gesteuert, wobei der Verdrängerkolben dem Arbeitskolben um  $90^\circ$  vorausseilt. Der untere Teil des Zylinders ist doppelwandig und wird mit Kühlwasser versorgt. Die Temperatur des zuffießenden als auch des abfließenden Wassers können mit Hilfe von

Thermoelementen gemessen werden. Zusätzlich wird die Durchflussmenge mit einem elektronischen Durchflussmengenmessgerät angezeigt.

Der Heißluftmotor ist mit einem abnehmbaren Zylinderkopf ausgestattet. Beim Betrieb als Wärmekraftmaschine wird auf den Zylinder ein elektrisch beheizbarer Kopf montiert, der den oberen Bereich des Motors heizt. Die Heizleistung kann mit Hilfe eines externen Netzteils stufenlos eingestellt werden (max. 300 W) und mit Hilfe von zwei Multimetern gemessen werden. Das Amperemeter ist nur für einen Dauerstrom von 10 A ausgelegt. Da im Betrieb höhere Ströme auftreten, ist vor dem Amperemeter ein Stromwandler geschaltet, der den Strom um das Fünffache reduziert. Der tatsächliche fließende Strom ist daher um einen Faktor fünf höher als das Amperemeter anzeigt. Beim Betrieb als Wärmepumpe bzw. Kältemaschine kann der geheizte Kopf durch einen anderen Zylinderkopf ausgetauscht werden. In diesem Kopf ist ein Reagenzglas montiert, das in den Motor hineinreicht. Das Reagenzglas wird mit Wasser gefüllt und die Temperatur des Wassers mit einem weiteren Thermometer gemessen. Der Antrieb für die Wärmepumpe/Kältemaschine erfolgt über einen Riemenantrieb des Schwungrades mittels eines Elektromotors. Achten Sie unbedingt darauf, dass alle rotierenden Teile und der Antriebsriemen durch die Riemenabdeckung geschützt sind. Die Leistung des Elektromotors kann durch ein separates Netzteil variiert werden und durch eine Strom- und Spannungsmessung bestimmt werden.

Der Verdrängerkolben ist wie der Zylinder aus Glas gefertigt und auf einer wassergekühlten Aluminiumplatte montiert. Der Zu- und Abfluss des Kühlwassers erfolgt durch ein koaxiales Rohr in der Pleuelstange. Diese zusätzliche Kühlung erhöht die Effizienz des Wärmeaustauschs mit dem kalten Wärmereservoir. In axialer Richtung besitzt der Verdränger eine Öffnung, die mit Kupferwolle gefüllt ist und als Regenerator wirkt.

Zur Darstellung von pV- Diagrammen werden Druck und Volumen gemessen. Die Volumenmessung beruht auf der Messung der Auslenkung des Arbeitskolbens: An der Unterseite des Arbeitskolbens ist eine Schnur befestigt, die über eine Umlenkrolle und eine Reibscheibe ein Potentiometer antreibt. Somit wird die Bewegung des Kolbens in eine korrespondierende Drehung des Potentiometers übertragen. Die Druckmessung im Kompressionsraum erfolgt mit Hilfe eines elektronischen Drucksensors. Das Potentiometer und der Drucksensor werden mit einem Interface ausgelesen und mit Hilfe einer speziellen Software (Cassy) auf einem Computer dargestellt.

### Inbetriebnahme der Wasserkühlung

Schalten Sie zunächst die Wasserkühlung ein: Damit beide Motoren gekühlt werden, müssen die Kugelhähne des jeweiligen Motors an der Wandinstallation geöffnet sein. Der Hahn **D** steuert den Kühlkreislauf des  $\gamma$ - Heißluftmotors und muss während der Versuchsdurchführung geschlossen bleiben. Kontrollieren Sie den Wasserfluss mit Hilfe des Durchflussmessers. Durch zweimaliges Drücken der Taste **Funktion** und anschließendem Drücken der Taste  $\leftarrow$  wird der Durchfluss in ml/min angezeigt. Die Durchflussmenge soll im Bereich von 200 ml/min bis 300 ml/min liegen.

Kontrollieren Sie, ob der Motor ausreichend geschmiert ist. Auf der Innenseite des Glaszylinders muss ein deutlicher Ölfilm sichtbar sein. Ist dies nicht der Fall, wenden Sie sich an den Assistenten.

Machen Sie sich **bevor** Sie mit der ersten Messung beginnen, mit der Bedienung der Software „CASSY Lab“ und „Thermolink“ vertraut.

### 1. Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine und quantitative Bestimmung der Kälteleistung

Wird der Heißluftmotor als Kältemaschine betrieben, so wird dem oberen Teil des Zylinders pro Umlauf die Wärme  $Q_2$  entzogen und dem Kühlkreislauf die Wärme  $Q_1$  zugeführt. Da der Wärmefluss vom kälteren zum wärmeren Reservoir nicht selbstständig abläuft, muss dafür pro Umlauf die mechanische Arbeit  $W_M$  aufgewendet werden. Für die an das Kühlsystem abgegebene Wärme gilt im idealen Fall:  $Q_1 = Q_2 + W_M$ .

In diesem Versuchsteil sollen Sie  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $W_M$  experimentell bestimmen und den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{Q_2}{W_M} \quad (25)$$

berechnen.

Die dem oberen Teil des Zylinders entzogene Wärme  $Q_2$  wird durch eine Kompensationsmessung bestimmt. Mit Hilfe einer Heizwendel wird die Temperatur des Zylinderkopfes konstant gehalten. Dadurch wird die von der Kältemaschine abgeführte Wärme kompensiert: Die von der Heizung pro Umlauf zugeführte elektrische Arbeit  $W_H$  entspricht dann gerade der dem Zylinderkopf von der Kältemaschine entzogenen Wärme  $Q_2$ :

$$Q_2 = W_H = \frac{U_H I_H}{f}, \quad (26)$$

wobei  $U_H$  und  $I_H$  die Heizspannung und den Heizstrom bezeichnen und  $f$  für die Motordrehzahl steht.

Die an das Kühlwasser abgegebene Wärme  $Q_1$  wird mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung

$$Q_1 = \frac{c_W \rho_W \Delta T \dot{V}}{f} \quad (27)$$

berechnet. Hierbei bezeichnet  $c_W$  und  $\rho$  die Wärmekapazität und Dichte von Wasser ( $c_W=4180 \text{ J}/(\text{kg K})$ ),  $\Delta T = T_{zu} - T_{ab}$  und  $\dot{V}$  die Temperaturdifferenz von Zu- und Ablauf und den Volumenstrom des Kühlwassers.

Die pro Umdrehung zugeführte mechanische Arbeit lässt sich durch eine Strom- und Spannungsmessung des elektrischen Antriebsmotors bestimmen:

$$W_M = \frac{U_M I_M}{f}. \quad (28)$$

Dabei ist zu beachten, dass auch der Elektromotor einen Wirkungsgrad kleiner als Eins besitzt. Sie sollten dies bei der Diskussion Ihrer Ergebnisse berücksichtigen.

#### Durchführung:

Montieren Sie den **Teflon-Zylinderkopf** mit der Heizwendel auf den Motor. Überprüfen Sie anschließend ob die Heizwendel nicht den Verdränger berührt und ziehen Sie gleichmäßig und nicht zu fest die Muttern an. Im Zylinderkopf ist ein Thermoelement eingebaut, mit dem die Temperatur im Zylinder gemessen werden kann. Verbinden Sie das Anschlusskabel des Thermoelements mit dem Digitalthermometer an der Medientafel (Anschluss T3). Schließen Sie den Heizkopf an das Netzteil an. Das Netzteil ist in der Regel bereits mit der Medientafel verbunden. **Stellen Sie den Bereichsschalter des Amperemeters auf 20 A AC und den Spannungsbereich des Voltmeters auf 20 V AC.** Zwischen dem Amperemeter und dem Netzteil ist ein Stromwandler geschaltet. Dadurch zeigt das Amperemeter nur 1/5 des tatsächlich fließenden Stroms an.

Spannen Sie den Antriebsriemen über das Schwungrad des Motors und an der Seite des Elektromotors über die Riemenscheibe. **Anschließend ist die Riemenabdeckung zu montieren.**

Die Stromausgangsbuchsen des Motornetzteils müssen Sie an das analoge Dreheiseninstrument anschließen und die Spannungsbuchsen an das daneben liegende Multimeter. Schalten Sie den Computer ein und starten Sie das Programm „Thermolink“ zum Auslesen des Digitalthermometers. Zeichnen Sie die Temperaturen des Kühlwassers und die Temperatur im oberen Teil des Motors auf. Starten Sie nach kurzem Abwarten den Elektromotor: Schalten Sie den Netzschalter auf der Rückseite ein und wählen Sie die gewünschte Drehrichtung (kalt, warm) auf der Frontseite aus. Drehen Sie dann den Einstellregler nach rechts auf maximale Drehzahl. Durch Betätigung des Hauptschalter auf der Frontseite startet der Motor.

Die Temperatur im oberen Teil des Motors beginnt zu sinken. Versuchen Sie nun durch die elektrische Heizung die Temperatur wieder auf den ursprünglichen Wert einzustellen: Drehen Sie den Einstellregler am Heizungs- Netzteil auf Nullstellung und schalten Sie dann das Netzteil ein. Erhöhen Sie nun **langsam** die Heizleistung bis die Temperatur wieder auf den Anfangswert angestiegen ist.

**Achtung:**

**Der maximale Heizstrom darf 6 A nicht übersteigen!  
Anzeige Amperemeter maximal 1,2 A!**

Der Temperaturanstieg erfolgt nicht spontan sondern mit einer Zeitverzögerung. Sie müssen daher nach jeder Leistungseinstellung abwarten bis sich die Temperatur stabilisiert hat und dann nachregeln. Auf keinen Fall darf die Heizleistung zu groß eingestellt werden !

Wenn Sie den ursprünglichen Temperaturwert wieder über einen längeren Zeitraum erreicht haben, protokollieren Sie die Heizleistung  $W_H$  und die Durchflussmenge  $\dot{V}$  des Kühlwassers (Mittelwerte bilden!). Die Temperaturdifferenz des Kühlwassers ist sofort aus der grafischen Aufzeichnung zu bestimmen.

Die von außen zugeführte mechanische Leistung  $W_M$  wird in der nächsten Aufgabe bestimmt.

## 2. Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe

Bei dieser Teilaufgabe soll der Betrieb des Heißluftmotors als Kältemaschine und Wärmepumpe qualitativ untersucht werden. Durch Bestimmung der „Gefrierwärme“ von Wasser soll zusätzlich der Wirkungsgrad der Kältemaschine abgeschätzt werden.

Stecken Sie den **Zylinderkopf mit dem Reagenzglas** auf den Motor. Achten Sie darauf, dass der Kopf plan sitzt und das Reagenzglas nur so weit in den Verdrängerkolben eintaucht, dass es nicht vom Verdränger berührt wird. Um dies zu überprüfen, drehen Sie den Verdränger mit Hilfe des Schwungrades vorsichtig in den oberen Totpunkt. Wenn die Position in Ordnung ist, ziehen Sie die Zylinderkopfmuttern gleichmäßig an. Messen Sie mit der Pipette ungefähr 1 ml Wasser ab und füllen dieses in das Reagenzglas und stecken Sie zusätzlich den Temperaturfühler mit hinein. Achten Sie darauf, dass das Thermometer möglichst zentrisch sitzt und nicht an den Rand des Reagenzglases stößt.

Starten Sie das Programm „Kältemaschine.lab“ sowie das Programm „Thermolink“ zum Auslesen des Digitalthermometers. Möglicherweise ist das Programm noch geöffnet. Vor erneutem öffnen das Programm erst schließen. Beginnen Sie mit der Aufzeichnung der Temperatur des Wassers im Reagenzglas und des Kühlwassers zunächst ohne dass der Motor läuft. Nach einigen Minuten können Sie dann den Motor starten.

Protokollieren Sie die Motorleistung durch eine Spannung- und Strommessung. Lassen Sie den Motor als Kältemaschine mindestens 10 bis 15 Minuten laufen, bis die Temperatur deutlich unter  $0^\circ\text{C}$  gefallen ist und sich nicht mehr ändert. Stoppen Sie dann das Messprogramm (Motor nicht abschalten !) und drucken Sie den Temperaturverlauf aus. Gegebenenfalls sollten Sie interessante Kurvenverläufe vergrößert darstellen und separat ausdrucken. Drucken Sie ebenfalls den Temperaturverlauf des Kühlwassers aus. Bestimmen Sie anschließend die Drehzahl mit dem optischen Drehzahlmessgerät.

Betreiben Sie unmittelbar danach den Motor als Wärmepumpe. Starten Sie zunächst wieder die beiden Programme und anschließend den Motor. Schalten Sie den Drehrichtungsschalter auf „warm“. Messen Sie erneut den Temperaturgang des Wassers im Reagenzglas und den Temperaturverlauf des Kühlwassers.

## 3. Betrieb als Wärmekraftmaschine

In diesem Versuchsteil wird der Heißluftmotor als Wärmekraftmaschine betrieben. Der Motor wird mit Hilfe einer Heizwendel und unter Zuführung der elektrischen Energie  $Q_{el}$  von außen beheizt. Bei der Beheizung des Motors treten bereits Verluste auf, die dazu führen, dass ein Teil der zugeführten Wärme gar nicht in den Kreisprozess mit einfließen. Vor allem bei dem im Praktikum verwendeten Motor sind diese erheblich. Um Ihnen einen Einblick in das Funktionsprinzip des Motors zu geben, sind die wesentlichen Teile



dieses Demonstrationsmotors aus Glas gefertigt. Dadurch treten sehr große Verluste bedingt durch Wärmeabstrahlung und Wärmeleitung auf. Bezeichnen wir diese Verluste durch  $Q_v$ , so wird effektiv nur die Wärme  $Q_{el} - Q_v$  in den Kreisprozess von außen eingekoppelt. Ein Teil dieser Wärme wird von dem Motor in mechanische Energie  $W_{mech}$  umgewandelt. Diese kann zum einen durch Aufnahme des pV- Diagramms und Vermessung der eingeschlossenen Fläche bestimmt werden und zum anderen durch eine Drehmomentmessung an der Motorachse. Neben der Umwandlung in mechanischer Energie, fließt ein großer Teil der zugeführten Wärme „ungenutzt“ in den Kühlkreislauf. Diese Abwärme wird im folgenden durch  $Q_{ab}$  bezeichnet. Desweiteren kommen Reibungsverluste  $Q_R$  durch Kolben und Lager hinzu. Die Energiebilanz des Heißluftmotors lässt sich somit wie folgt angeben:

$$Q_{el} = Q_v + W_{mech} + Q_{ab} + Q_R. \quad (29)$$

Experimentell können die Größen  $Q_{el}$ ,  $W_{mech}$  und  $Q_{ab}$  unmittelbar bestimmt werden. Die Verluste  $Q_v$  und  $Q_R$  lassen sich allerdings nicht ohne größeren Aufwand messen. Diese sind durch eine Differenzmessung abzuschätzen. Bezeichnen wir die allgemeinen Verluste durch  $Q_V = Q_v + Q_R$  so gilt nach (29):

$$Q_V = Q_v + Q_R = Q_{el} - Q_{ab} - W_{mech}. \quad (30)$$

Die pro Motorzyklus von außen zugeführte Wärme, wird aus der elektrischen Heizleistung und der Motordrehzahl  $f$  bestimmt:

$$Q_{el} = \frac{P_{el}}{f} = \frac{IU}{f}. \quad (31)$$

Die an das Kühlwasser abgegebene Wärme  $Q_{ab}$  wird wie bei Aufgabe 1 mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung

$$Q_{ab} = \frac{c_W \rho_W \Delta T \dot{V}}{f} \quad (32)$$

berechnet.

Die mechanische Arbeit  $W_{mech}$  wird durch zwei Methoden bestimmt. Die Aufnahme des pV- Diagramms und Berechnung der Fläche erfolgt mit einem Computer. Hieraus lässt sich die Arbeit  $W_{pV}$  bestimmen.

Bei der zweiten Methode wird die abgegebene Arbeit  $W_D$  durch eine Drehmomentmessung an der Motorachse mit Hilfe eines Pronyschen Bremszaums bestimmt. Dieser besteht aus zwei hölzernen Bremsbacken, die an der Motorwelle

montiert werden. Mit Hilfe zweier Schrauben kann eine variable Bremskraft auf die Welle ausgeübt werden. Zur Messung des Drehmomentes wird der Bremszau in einen Kraftmesser eingehängt und so ausgerichtet, dass der Bremszau waagrecht ausgerichtet ist und der Kraftmesser senkrecht dazu hängt. In diesem Fall gilt für das Drehmoment  $D$ :

$$D = lF, \quad (33)$$

wobei  $l$  die Länge des Bremszau von der Motorachse bis zur Aufhängung des Kraftmessers ist und  $F$  die Kraft. Für die pro Motorzyklus abgegebene Arbeit  $W_D$  gilt somit:

$$W_D = 2\pi D, \quad (34)$$

bzw. für die Leistung

$$P_D = W_D f, \quad (35)$$

wobei  $f$  die Drehzahl des Motors ist.

Statt des Kraftmessers können Sie auch eine Waage benutzen. Dies hat den Vorteil, dass der Bremszau nicht ausgerichtet werden muss. Allerdings „flackert“ die Anzeige etwas. Probieren Sie aus, welche Methode Ihnen lieber ist.

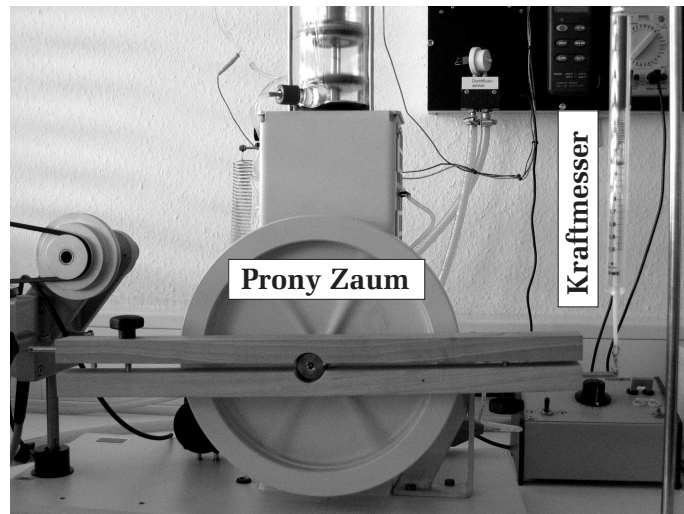


Abbildung 8: Bestimmung der mechanischen Arbeit durch eine Drehmomentmessung an der Motorwelle.

#### Durchführung:

Montieren Sie den **Keramik-Zylinderkopf** mit der Heizwendel auf den Motor. Schließen Sie den Heizkopf an das Netzteil an.

Entfernen Sie die Riemenabdeckung und den Antriebsriemen. Positionieren Sie den Verdrängerkolben in den unteren Totpunkt und schalten Sie das Netzteil bei maximaler Leistungsabgabe ein. Lassen Sie die Heizwendel ungefähr fünf Sekunden vorglühen und werfen Sie dann das Schwungrad des Stirlingmotors im Uhrzeigersinn von Hand an. Vorsicht: Klemmen Sie nicht Ihre Finger ein! Wiederholen Sie die Anwerfversuche so lange, bis der Motor von selbst läuft. Sobald der Motor rund läuft, verringern Sie die Leistung, indem Sie den Heizstrom reduzieren. Der Maximalstrom ist am Aufbau angegeben. In der Zeit, in der sich der Motor nun einläuft, kümmern Sie sich um die Bedienung der Software: Starten Sie das Programm „Heißluftmotor.lab“ auf dem Desktop und schauen Sie sich zum Kennenlernen der Software das Volumen bzw. den Druck als Funktion der Zeit an. Nehmen Sie ein pV-Diagramm auf und bestimmen Sie zur Übung die eingeschlossene Fläche. Zur Dokumentation des Funktionsprin-

zips des Heißluftmotors drucken Sie in einem gemeinsamen Diagramm ein p(t)- und V(t)- Diagramm aus.

Wenn der Motor eingelaufen ist, messen Sie den Heizstrom und die Heizspannung, den Kühlwasserdurchsatz und die Motordrehzahl. Die Temperaturen  $T_{zu}$  und  $T_{ab}$  können mit dem Programm Thermolink ausgelesen und grafisch ausgewertet werden. Die Motordrehzahl sowie die Fläche des pV-Diagramms ist mindestens dreimal zu messen.

Messen Sie anschließend die real abgegebene Arbeit  $W_D$  durch eine Drehmomentmessung. Lösen Sie die Schrauben des Prony- Zaums, so dass sich dieser leichtgängig auf die Achse des laufenden Motors schieben lässt. Hängen Sie den Federkraftmesser in den Bremszaum ein und ziehen Sie die Schrauben so an, dass eine Kraft von ungefähr 0,8 N wirkt. Durch Variierung der Höhe des Federkraftmessers wird der Prony- Zaum in der Horizontalen gehalten. Da es passieren kann, dass der Bremszaum von der Welle fällt, müssen Sie diesen mit einer Stange sichern. Lassen Sie den Motor nun einige Zeit einlaufen und korrigieren Sie die waagrechte Lage des Prony- Zaums nach. Protokollieren Sie die Drehzahl, die elektrische Leistung und die Fläche des pV- Diagramms und messen Sie zusätzlich die Bremskraft. Die Motordrehzahl sowie die Fläche des pV-Diagramms sollte wieder mindestens dreimal gemessen werden. Wiederholen Sie diese Messungen für insgesamt vier verschiedene Bremskräfte (0,8 N bis 0,2 N in Schritten von 0,2 N).

Statt des Kraftmessers können Sie für die Drehmomentmessung auch die Waage verwenden. In diesem Fall müssen Sie auf die Metallstange am Ende des Bremszaums den Gummistopfen aufstecken und diesen zentrisch auf den Teller der Waage platzieren. Zusätzlich müssen Sie das Gewicht des Stopfens messen und dieses von Ihren Messwerten abziehen.

Achten Sie darauf, dass Sie den Motor nicht abwürgen. Im Fall eines Stillstandes werfen Sie den Motor rasch wieder an oder schalten das Netzteil aus!

## VIII Auswertung

### 1. Betrieb als Kältemaschine

Berechnen Sie aus der Kompensationsmessung die Kälteleistung des Motors. Stellen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 2 gemessenen Leistung des Elektromotors die Energiebilanz auf und diskutieren Sie gegebenenfalls die Diskrepanz.

## 2. Betrieb als Kältemaschine und Wärmepumpe

Interpretieren Sie den Temperaturverlauf des Wassers im Reagenzglas beim Betrieb des Motors als Kältemaschine und Wärmepumpe. Gehen Sie dabei auch auf den Temperaturverlauf des Kühlwassers ein. Schätzen Sie aus der Gefrierzeit des Wassers die Kälteleistung der Kältemaschine ab und vergleichen Sie diesen mit dem Wert, den Sie in Aufgabe 1 bestimmt haben (spezifische Schmelzwärme  $\lambda_{H_2O}=335$  J/g). Warum verläuft der Aufheizvorgang des Wassers viel schneller als der Abkühlvorgang?

## 3. Betrieb als Wärmekraftmaschine

Berechnen Sie aus den Messdaten der Leerlaufmessungen folgende Größen

f	$P_{el}$	$Q_{el}$	$P_{ab}$	$Q_{ab}$	$P_{pV}$	$Q_{pV}$	$\eta_{th}$
---	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-------------

Der reale thermische Wirkungsgrad  $\eta_{th}$  berechnet sich aus dem Verhältnis der mechanischen Arbeit  $W_{pV}$  und der zugeführten Wärme  $Q_{el}$ .

Stellen Sie die Energiebilanz auf und berechnen Sie hieraus die Motorverluste  $Q_V$ . Diskutieren Sie die einzelnen Beiträge und überlegen Sie sich, wo die Ursachen für die hohen Verluste liegen könnten.

Bestimmen Sie aus den Drehmomentmessungen die mechanische Arbeit  $W_D$  und  $W_{pV}$  und berechnen sie den thermische Wirkungsgrad  $\eta_{th}$  sowie den effektiven Wirkungsgrad  $\eta_{eff} = W_D/Q_{el}$  (Die Länge des Bremszaums beträgt 25 cm). Tragen Sie  $\eta_{th}$  und  $\eta_{eff}$  als Funktion der Frequenz auf. Versuchen Sie den Kurvenverlauf zu interpretieren. Warum sind die beiden Wirkungsgrade nicht gleich groß?

# IX Anhang

## Bedienung der Software

Starten Sie das Programm „CASSY Lab“ bzw. die Makros „Heißluftmotor.lab“ oder „Kältemaschine.lab“ vom Desktop aus. Die Makros sind bereits vorkonfiguriert, so dass Sie nur noch die Messparameter einstellen müssen. Um in das Einstellungsmenu zu gelangen, drücken Sie die Taste „F5“ oder klicken Sie auf das Werkzeug- Symbol in der Menuleiste (Abbildung 9). Im

Register Darstellung können Sie die Achsenbelegungen festlegen. Um ein pV-Diagramm aufzunehmen, wählen Sie für die x-Achse das Volumen und für die y-Achse den Druck. Sie können natürlich auch andere Darstellungen wie  $V(t)$  oder  $p(t)$  einstellen. Anschließend müssen Sie das Messintervall und die Anzahl der Messpunkte einstellen. Klicken Sie dazu auf die Schaltfläche „Messparameter anzeigen“. Es öffnet sich ein weiteres Fenster, in dem Sie die entsprechenden Parameter einstellen können. Bei der Aufnahme eines pV-Diagramms sollte der Messabstand 2 ms und die x-Anzahl 125 betragen. Lläuft der Motor sehr langsam, so reicht diese Anzahl von Messpunkten nicht aus, ein geschlossenes pV-Diagramm darzustellen. Sie müssen in diesem Fall die Anzahl der Messpunkte erhöhen.

Um die Messung zu starten, drücken Sie entweder die Taste „F9“ oder klicken Sie auf das Uhr- Symbol. Der entsprechende Graph wird auf dem Bildschirm dargestellt. Durch einen Rechtsklick auf den Graph können Sie weitere Einstellungen vornehmen. Es erscheint ein Popup- Menu, das weitgehend selbst erklärend sein sollte. Ebenfalls können Sie durch einen rechten Klick auf die Koordinatenachsen den Wertebereich verändern.

Zur Bestimmung der Fläche des pV-Diagramms, klicken sie rechts auf das Diagramm und wählen Sie aus dem Menüpunkt „Integral berechnen“, die Option „Peakfläche“ aus. Suchen Sie im pV-Diagramm den Bereich bei dem ein Überlapp der Messpunkte zu Beginn und am Ende der Messung vorliegt. Fahren Sie mit dem Mauszeiger bei gedrückter linker Maustaste von außen nach innen über diesen Bereich. Der komplette Umfang der Kurve muss sich dabei verfärben. Nach dem Loslassen der Taste wird der Flächeninhalt in der linken unteren Ecke des Bildschirms angezeigt. Durch Drücken der Tastenkombination „ALT T“ können Sie den Flächeninhalt zusätzlich auf dem Diagramm platzieren.

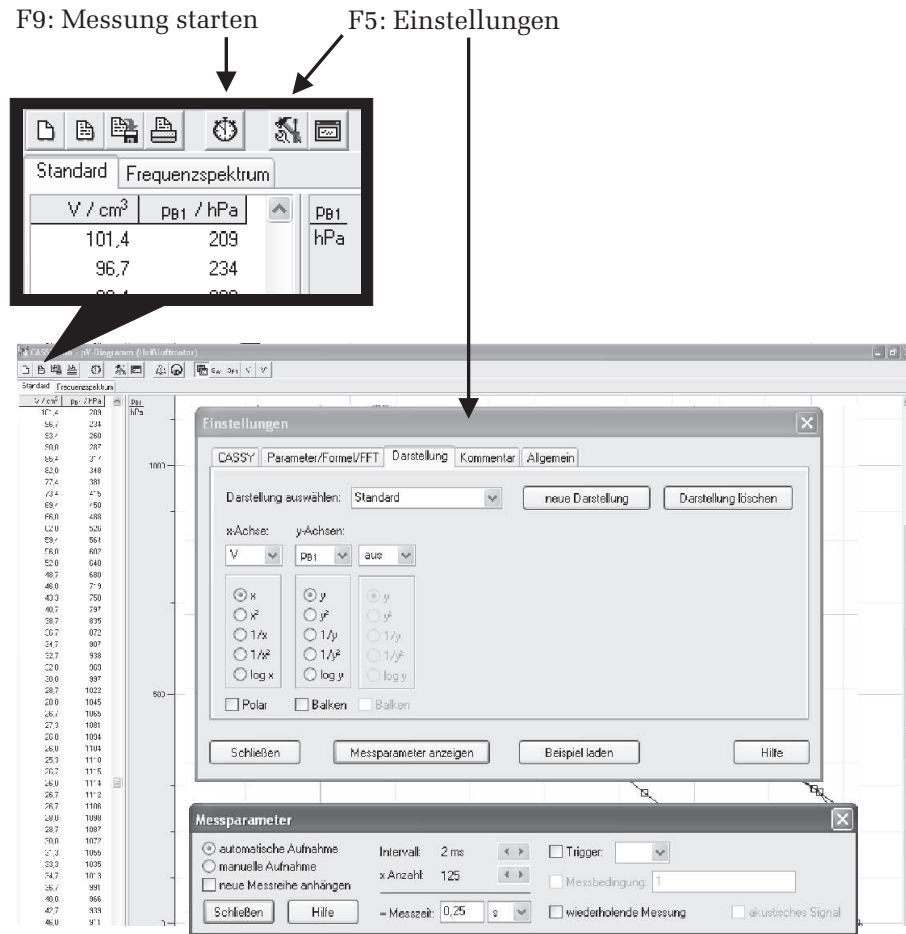


Abbildung 9: *Einstellungs Fenster der Software CASSY LAB.*

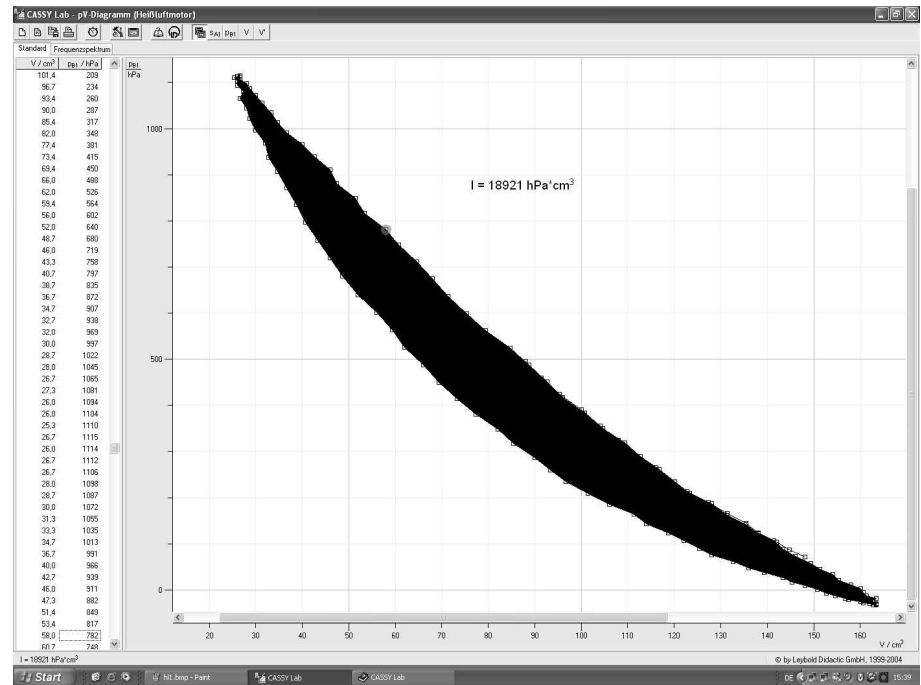


Abbildung 10: *Bestimmung der mechanischen Arbeit durch die Fläche des pV-Diagramms.*

## Versuch 223

### Messung der Boltzmannkonstante Teil I

### Brownsche Bewegung



Abbildung 1: Versuchsaufbau.

#### I Messaufbau

- Durchlichtmikroskop Motoc B1 mit CCD-Kamera
- Kugelförmige Partikel suspendiert in Wasser

- PC mit Drucker
- Thermometer
- Objektmikrometer

#### II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Demtröder, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Die Grundlagen zu den wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen können Sie in der Versuchsbeschreibung des Versuchs 251: *Statistik des radioaktiven Zerfalls* nachlesen.
- Homepage des Praktikums  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/>

#### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Binomial- und Gauß-Verteilung. Verständnisfragen:

1. Was ist Wärme aus Sicht der kinetischen Theorie der Wärme? Was besagt der Gleichverteilungssatz? Wie hoch ist die thermische Geschwindigkeit eines Partikels der Masse  $10^{-15}$  kg bei Zimmertemperatur?
2. Berechnen Sie das Produkt  $kT$  für Zimmertemperatur und geben Sie diesen in der Einheit eV an. Diesen Wert sollten Sie sich für die Zukunft unbedingt merken.
3. Was bezeichnet man als Brownsche Bewegung? Worin liegt die Ursache dieser Bewegung? Welche Größen haben Einfluss auf die Brownsche Bewegung?
4. Wie groß ist der zu erwartende Wert der mittleren Verschiebung bzw. der mittleren quadratischen Verschiebung eines Partikels.

- Berechnen Sie die mittlere quadratische Verschiebung eines Partikels (Partikelradius  $a=500$  nm) suspendiert in Wasser ( $T=20^\circ\text{C}$ ) innerhalb eines Zeitraums von  $t=1$  s. Die Viskosität von Wasser können Sie Abbildung 12 entnehmen.

## IV Aufgaben

- Präparieren Sie eine Mikroskopprobe einer Partikelsuspension.
- Nehmen Sie jede Sekunde und mindestens 150 Mal das Mikroskopbild eines einzelnen Partikels auf.
- Bestimmen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops mit einem Objektmikrometer.
- Vermessen Sie die Position des Partikels anhand der aufgenommenen Bilder.
- Berechnen Sie aus der mittleren quadratischen Verschiebung die Diffusionskonstante und die Boltzmannkonstante.

## V Motivation

### Mit Blütenpollen läßt sich die Existenz von Atomen und Molekülen beweisen

„Heute vor 100 Jahren, am 11. Mai 1905, reichte Albert Einstein bei den *Annalen der Physik* eine wichtige Arbeit ein, in der er die sogenannte Brownsche Bewegung erklärte. Dem schottischen Botaniker Robert Brown war bereits im Jahr 1827 aufgefallen, daß Blütenpollen in einem Glas Wasser eine eigenartige Zickzackbewegung ausführen. Was war die Ursache dafür? Alle Versuche, diese Brownsche Bewegung zu erklären, scheiterten zunächst. Sie blieb jahrzehntelang geheimnisvoll. Erst Albert Einstein erkannte, daß die Bewegung der kleinen Teilchen in der Flüssigkeit durch ein fortwährendes Stoßen der Wassermoleküle verursacht wird. Dies war in jener Zeit tatsächlich noch ein gewichtiges Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen, die im 19. Jahrhundert noch heftig umstritten gewesen ist. Und gleichzeitig paßte Einsteins Beschreibung zur molekularen Theorie der Wärme. Je wärmer beispielsweise Wasser ist, um so größer ist die mittlere Geschwindigkeit, mit

der die Wassermoleküle ungeordnet umherflitzen und damit Stöße verursachen können. So erklärt sich auch der Begriff *Thermodynamik*: Wärme ist eben etwas *Dynamisches*. Einstein schrieb damals an einen Freund, daß *„unter der Voraussetzung der molekularen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von der Größenordnung 1/1000 Millimeter bereits eine wahrnehmbare ungeordnete Bewegung ausführen müssen, welche durch die Wärmebewegung erzeugt ist.“*

Nahezu zeitgleich mit Albert Einstein lieferte auch der polnische Physiker Marian Smoluchowski eine korrekte Erklärung der Brownschen Bewegung. Es war dann allerdings der französische Physiker Jean-Baptiste Perrin der einige Jahre später die Brownsche Molekularbewegung experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigte. Dafür wurde Perrin im Jahr 1926 mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet. <sup>1</sup>

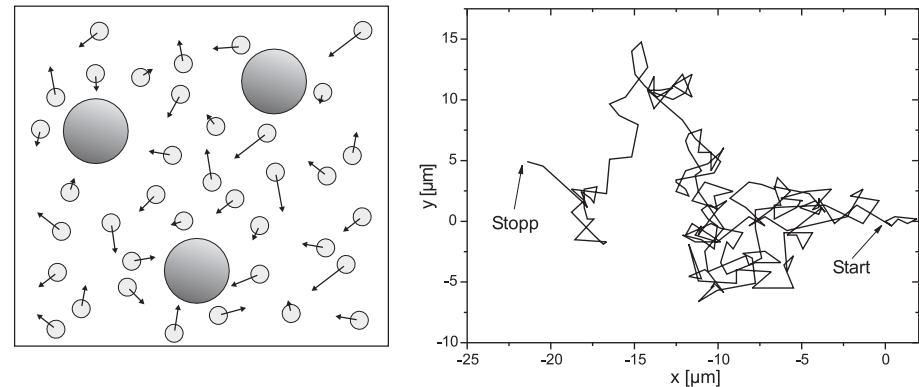


Abbildung 2: Links: Modell der Brownschen Bewegung. Die Moleküle des umgebenden Mediums stoßen aufgrund ihrer thermischen Energie mit den suspendierten Partikeln, wodurch sich diese auf völlig unregelmäßigen Bahnen bewegen. Rechts: Gemessene Bahn eines einzelnen Partikels.

In diesem Versuch werden Sie die Brownsche Bewegung von Partikeln suspendiert in Wasser mit einem Mikroskop beobachten und deren statistische Bewegung untersuchen (Abbildung 2). Durch Vermessen der Teilchenbahn und der

<sup>1</sup>Norbert Lossau, Artikel vom 11. Mai 2005 in der Zeitung „Die Welt“

Berechnung der pro Zeiteinheit auftretenden mittleren Verschiebung, können Sie die Boltzmannkonstante bestimmen.

Eine genaue Bestimmung der Boltzmannkonstante mit Hilfe der Brownschen Bewegung ist nur bei der Beobachtung sehr vieler Einzelschritte möglich und daher im Praktikum aus Zeitgründen nicht möglich. Bei einer sorgfältigen Durchführung ist aber eine Genauigkeit von besser als 10 % möglich. Aus diesem Grund werden Sie in Teil II dieses Versuchs ein weiteres Experiment durchführen, mit dem Sie die Boltzmannkonstante weitaus genauer bestimmen können. Bei diesem Versuch messen Sie das thermische Rauschen eines ohmschen Widerstands. Dabei ist eine Genauigkeit von besser als 1 % möglich.

## VI Grundlagen

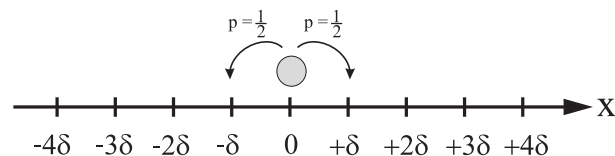


Abbildung 3: *Eindimensionaler Random-Walk. Bei jedem Stoß bewegt sich das Partikel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder nach links oder nach rechts. Die Sprungweite  $\delta$  soll bei allen Stößen gleich groß sein*

Die Brownsche Bewegung lässt sich mit Hilfe eines sogenannten Random-Walk Modell quantitativ beschreiben (Abbildung 3). Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, dass sich ein Partikel nur in einer Dimension, der x-Richtung, bewegen kann. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das Partikel an der Position  $x = 0$ . Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, das Partikel nach der Zeit  $t$  im Intervall  $[x, x + \Delta x]$  zu finden. Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Das Partikel erfährt alle  $\tau$ -Sekunden einen Stoß. Innerhalb der Zeit  $t$  treten somit  $n = t/\tau$  Stoßprozesse auf.
- Bei jedem Stoß wird das Partikel um die gleiche Distanz  $\delta$  verschoben. Die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Partikel dabei um  $+\delta$  nach rechts, bzw. um  $-\delta$  nach links bewegt, sind gleich groß.

- Bei mehreren Partikeln hängt die Brownsche Bewegung eines einzelnen Partikels nicht von der Bewegung der anderen Partikel ab. Jedes Partikel bewegt sich völlig unabhängig von den anderen, auch dann, wenn sich zwei oder mehrere Partikel sehr nahe kommen.

Damit sich das Partikel nach  $n$ -Stößen an der Position  $x = m\delta$  befindet, muss es insgesamt  $(n+m)/2$ -mal in die positive x-Richtung gelaufen sein und  $(n-m)/2$ -mal in die negative Richtung. Dabei ist zu beachten, dass  $m$  bei geradem  $n$  ebenfalls gerade sein muss und entsprechend bei ungeradem  $n$ , ungerade sein muss.

Beispiel: Befindet sich das Partikel nach  $n = 10$  Stößen an der Position  $6\delta$  (d.h.  $m = 6$ ), so ist es insgesamt  $(n+m)/2 = 8$ -mal nach rechts gesprungen und  $(n-m)/2 = 2$ -mal nach links. Nun gibt es aber verschiedene Möglichkeiten, wie das Partikel an die Position  $x = m\delta$  gekommen ist. Es kann z.B. am Anfang zweimal nach links gesprungen sein und anschließend hintereinander 8 Mal nach rechts gelaufen sein. Insgesamt gibt es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \tag{1}$$

Möglichkeiten, welchen Weg das Partikel gelaufen sein könnte. Für unser Beispiel mit  $n = 10$  und  $m = 6$  ergeben sich 45 verschiedene Schrittfolgen.

Damit können wir nun die Wahrscheinlichkeit  $P(m; n)$  angeben, mit welcher sich das Partikel nach  $n$ -Stößen an der Position  $x = m\delta$  befindet. Diese ist gerade durch die Binomialverteilung<sup>2</sup> gegeben:

$$P(m; n) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m)} p^{(n+m)/2} (1-p)^{(n-m)/2}, \tag{2}$$

wobei  $p$  die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Sprungs nach links bzw. nach rechts angibt. Da die Sprungwahrscheinlichkeiten in beiden Richtungen gleich groß sind, gilt  $p = 1/2$  und somit

$$P(m; n) = \frac{n!}{[\frac{1}{2}(n+m)]! [\frac{1}{2}(n-m)]!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \tag{3}$$

In der Regel ist die Zeit  $\tau$  zwischen zwei Stößen sehr klein, so dass  $n = t/\tau$  bei einer Beobachtungszeit von typischerweise  $t = 1$  s, eine sehr große Zahl darstellt. Für diesen Fall können wir  $n!$  und  $m!$  mit Hilfe der Stirlingschen Formel

<sup>2</sup>Siehe auch Versuch 251 „Statistik des radioaktiven Zerfalls“

$$n! = (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} \tag{4}$$

nähern. Damit erhalten wir nach einigen Umformungen für die Wahrscheinlichkeit  $P(m; n)$

$$P(m; n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{m^2}{2n}}. \tag{5}$$

Wir wollen nun statt  $m$  und  $n$ , die leicht messbaren Größen  $x$  und  $t$  verwenden. Da  $m$  entweder gerade oder ungerade ist, gilt für  $\Delta m$ :

$$\Delta m = \pm 2 \tag{6}$$

und somit

$$P(m; n) \frac{\Delta x}{2\delta} = P(x; n) \Delta x \tag{7}$$

Substituieren wir  $n = t/\tau$  sowie  $m = x/\delta$  und definieren zusätzlich die Größe  $D$ :

$$D = \frac{\delta^2}{2\tau}, \tag{8}$$

so erhalten wir schließlich für die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit  $t$  innerhalb des Bereichs  $[x, x + \Delta x]$  zu finden:

$$P(x; t) \Delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \tag{9}$$

$P(x;t)$  in Gleichung (9) ist eine Gaußverteilung (Abbildung 4). Die allgemeine Form solch einer Verteilung lautet

$$G(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{((x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{10}$$

wobei  $\langle x \rangle$  den Mittelwert und  $\sigma^2$  die Varianz, bzw.  $\sigma$  die Standardabweichung beschreiben.

Da die Verteilung (9) symmetrisch zu  $x = 0$  ist, verschwindet die mittlere Verrückung  $\langle x \rangle$ :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x; t) dx = 0. \tag{11}$$

Dies ist auch sofort einzusehen, da die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel bei einem Stoß entweder nach links oder nach rechts springt, gleich groß ist. Der

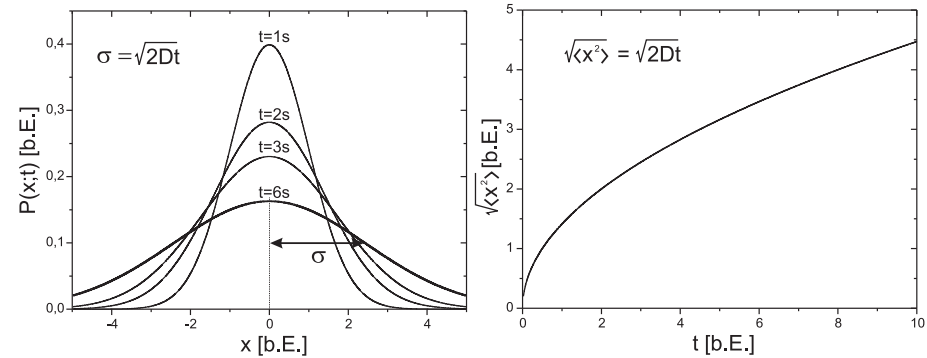


Abbildung 4: Links: Gaußverteilung mit dem Mittelwert  $\langle x \rangle = 0$  und der Varianz  $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = 2Dt$ . Da die Varianz zeitabhängig ist, wird die Verteilung mit zunehmender Zeit immer breiter. Rechts: Mittleres Verschiebungsquadrat  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  als Funktion der Zeit.

verschwindende Mittelwert  $\langle x \rangle$  ist daher nicht geeignet, die Brownsche Bewegung des Partikels zu beschreiben. Anders sieht es aus, wenn wir das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle x^2 \rangle$  berechnen:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x; t) dx = 2Dt = \sigma^2. \tag{12}$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat entspricht der Varianz  $\sigma^2 = 2Dt$  und damit der Breite der Verteilung.

Damit können wir das wichtige Ergebnis unserer Untersuchung wie folgt formulieren:

Der mittlere Abstand ( $\equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ ) eines Partikels vom Ursprungsort, nimmt mit der Quadratwurzel der Zeit  $t$  zu:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad \text{Einstein-Smoluchowski-Gleichung.} \tag{13}$$

Bisher haben wir die Brownsche Bewegung nur in einer Dimension untersucht. Unser Ergebnis lässt sich aber sehr einfach auf mehrere Dimensionen übertragen.



Findet die Brownsche Bewegung in zwei Dimensionen statt, so gilt für das mittlere Verschiebungsquadrat<sup>3</sup>  $\langle r^2 \rangle$ :

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle. \tag{14}$$

Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, liefert jeder Summand den Beitrag  $2Dt$  und somit

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4Dt}, \tag{15}$$

bzw. im Dreidimensionalen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt}. \tag{16}$$

Der Parameter  $D$  wird als Diffusionskoeffizient bezeichnet und ist ein Maß für die Beweglichkeit des Partikels im umgebenden Medium. Nach Einstein ist der Diffusionskoeffizient gegeben durch

$$D = \frac{kT}{f}, \tag{17}$$

wobei  $f$  den Reibungskoeffizienten,  $k$  die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur der Flüssigkeit darstellen. Für kugelförmige Partikel mit dem Radius  $a$ , die in einer Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$  suspendiert sind, berechnet sich  $f$  nach dem Stokesschen Gesetz (siehe Versuch 212 - Zähigkeit von Flüssigkeiten):

$$f = 6\pi\eta a. \tag{18}$$

Damit folgt für den Diffusionskoeffizient nach Stokes-Einstein:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \tag{19}$$

Diese Beziehung verknüpft die makroskopischen Größen  $\eta$ ,  $a$  und  $T$  mit den mikroskopischen Größen  $\delta$  und  $\tau$  in Gleichung (8). Einsetzen von (19) in Gleichung (15), liefert für das mittlere Verschiebungsquadrat kugelförmiger Partikel im Zweidimensionalen:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4kT}{6\pi\eta a} t. \tag{20}$$

<sup>3</sup>Im mehrdimensionalen Fall schreiben wir für das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle r^2 \rangle$  anstatt  $\langle x^2 \rangle$ .

Damit haben wir die Möglichkeit die Boltzmannkonstante experimentell zu bestimmen. Sind die Größen  $T, \eta$  und der Kugelradius  $a$  der Partikel bekannt, so kann durch Messung des mittleren Verschiebungsquadrats die Boltzmannkonstante berechnet werden:

$$k = \frac{6\pi\eta a}{4Tt} \langle r^2 \rangle. \tag{21}$$

## VII Durchführung

Lesen Sie **bevor** Sie mit den Messungen beginnen, diesen Abschnitt vollständig durch! Eine Einführung in die Bedienung des Mikroskops und der Messprogramme, erhalten Sie durch den Versuchsbetreuer.

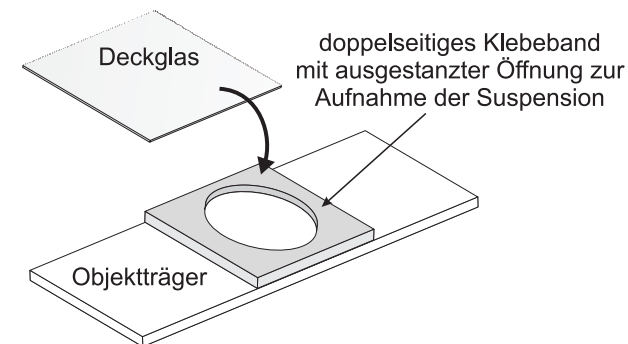


Abbildung 5: Skizze der Probenfassung. Die ausgestanzte Öffnung des doppelseitigen Klebebands wird mit der zu untersuchenden Suspension befüllt und anschließend mit dem Deckglas verschlossen.

- 1. Probenpräparation:** Sie sollen die Brownsche Bewegung suspendierter Latex-Partikel in Wasser untersuchen. Um diese mit dem Mikroskop beobachten zu können, benötigen wir eine Probenfassung, die einerseits dick genug ist, so dass sich die suspendierten Partikel darin frei bewegen können, andererseits muss diese auch dünn genug sein, damit eine Fokussierung mit dem Mikroskop möglich ist. Um dies zu gewährleisten, werden Sie

zunächst eine Probenfassung gemäß Abbildung 5 anfertigen: Auf einen Objektträger wird ein doppelseitiges Klebeband aufgebracht, in dessen Mitte zuvor ein Loch ausgestanzt wurde. In diese Öffnung wird die Probenflüssigkeit eingefüllt und mit einem Deckglas verschlossen. Das doppelseitige Klebeband erfüllt dabei zwei Aufgaben: Zum einen vergrößert dieses das Probenvolumen, so dass sich die suspendierten Partikel frei bewegen können, zum anderen dient es zur Abdichtung der Flüssigkeit, wodurch ungewollte Strömungen durch Verdunstungsprozesse unterdrückt werden.

Fertigen Sie vor Versuchsbeginn stets eine neue Probe an! Schneiden Sie dazu ein Stück doppelseitiges Klebeband passend auf die Größe des Deckglases ( $24 \text{ mm} \times 32 \text{ mm}$ ) zurecht und stanzen Sie mit dem Locheisen zentrisch ein Loch in das Klebeband (Holzunterlage verwenden!). Anschließend kleben Sie das Klebeband mittig auf den Objektträger und entfernen die Abdeckfolie. Schütteln Sie die Flasche mit der Probenflüssigkeit gut durch und pipettieren Sie  $250 \mu\text{l}$  der Probenflüssigkeit in die ausgestanzte Öffnung des Klebebands. Werfen Sie die Pipettenspitze nach Gebrauch sofort in den Abfall. Der Durchmesser der Partikel ist auf der Flasche angegeben. Notieren Sie diesen Wert in Ihr Protokollheft. Legen Sie nun das Deckglas auf das doppelseitige Klebeband und drücken Sie es mit einem Papiertuch vorsichtig an. Dabei darf ruhig etwas von der Flüssigkeit herausfließen. Allerdings dürfen sich keine (größeren) Luftblasen in der Flüssigkeit bilden! Trocknen Sie die Probe mit einem Papiertuch ab und geben Sie auf die Mitte des Deckglases **einen Tropfen** Immersionsöl. Spannen Sie nun die Probe auf den Mikroskoptisch (Abbildung 6) ein. Am Objektivkranz des Mikroskops wählen Sie das Objektiv 100/1.25 oil (100-fache Vergrößerung, Numerische Apertur  $NA=1,25$ ) aus.

*Frage: Wozu wird das Immersionsöl benötigt?*

Schalten Sie die Mikroskopbeleuchtung ein. Bewegen Sie nun den Mikroskoptisch **VORSICHTIG** mit Hilfe der Fokuseinstellung (*Grob-fokussierung* in Abbildung 6) soweit in Richtung des Objektivs, bis dieses **gerade** den Öltröpfchen berührt. Versuchen Sie nun durch **vorsichtiges** Scharfstellen mit Hilfe des Feinreglers, einzelne Partikel der Suspension zu beobachten. Die  $xy$ -Position der Probe können sie mit Hilfe der beiden  $xy$ -Einstellräder verstellen. Die Fokussierung ist bei der gewählten 1000-fachen Vergrößerung nicht ganz einfach. Sollten Sie hierbei

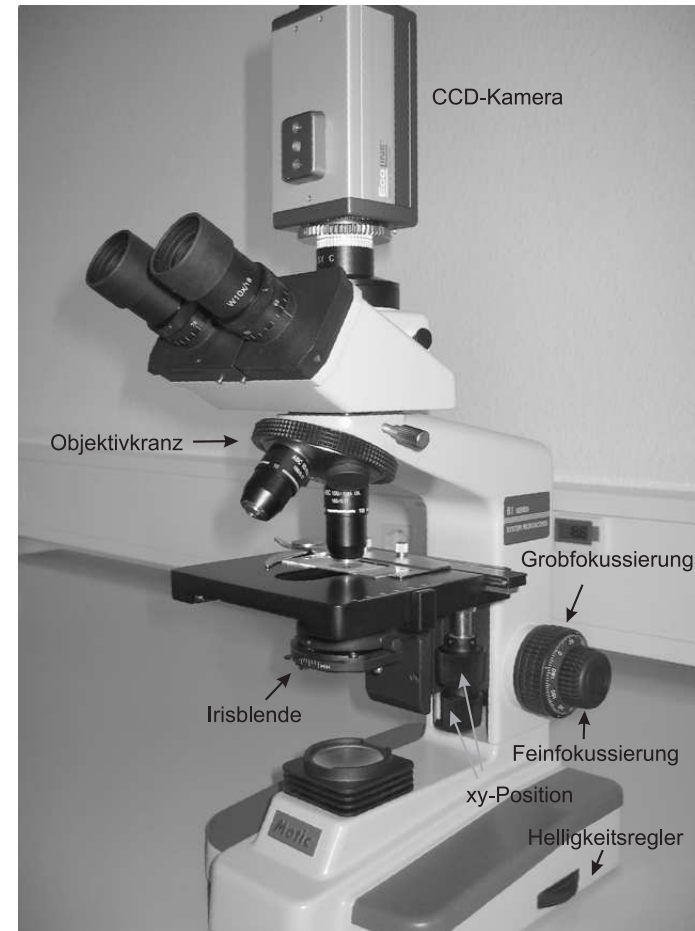


Abbildung 6: Bedienungselemente des Mikroskops.

Probleme haben, wenden Sie sich an den Versuchsbetreuer.

**Achtung:** Bei der Versuchsdurchführung können systematische Fehler auftreten, die unbedingt zu vermeiden sind:

- Überzeugen Sie sich, dass Sie wirklich nur ein einziges Partikel beobachten. Manchmal kann es vorkommen, dass zwei oder mehrere Partikel „zusammenkleben“. Dies lässt sich gut erkennen, indem man etwas den Fokus variiert.
- Auf keinen Fall dürfen Sie während der Messung die  $xy$ -Position des Objektisches verstellen. Auch Erschütterungen des Mikroskops müssen unbedingt vermieden werden.
- Beim Nachfokussieren dürfen Sie mit dem Objektiv auf keinen Fall das Deckglas ihrer Probe berühren. Der dadurch erzeugte Druck würde die Partikel verdrängen und somit die eigentliche Brownsche Bewegung verfälschen. Sollten Sie beim Nachfokussieren eine abrupte Partikelbewegung beobachten, so müssen Sie sich ein anderes, „höher gelegenes“ Partikel suchen, dessen Position Sie ohne Berührung des Deckglases scharf stellen können.
- Die Probe muss sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Ist dies nicht der Fall, so treten Konvektionsströme auf, die wiederum die Brownsche Bewegung verfälschen. Zudem ist es möglich, dass die Probe schlecht präpariert wurde: Ist die Suspension nicht vollständig mit dem Klebeband abgedichtet, so können durch Verdunstungsprozesse ebenfalls ungewünschte Strömungen in der Probe auftreten. Warten Sie daher zur Temperierung der Probe einige Minuten ab, bevor Sie mit der Messung beginnen. Sollte dann immer noch eine Strömungsbewegung erkennbar sein, so müssen Sie gegebenenfalls eine neue Probe vorbereiten. Wenden Sie sich in diesem Fall an Ihren Betreuer.

2. **Aufnahme einer Bildfolge:** Starten Sie vom Desktop aus das Programm *Kamera.exe*. Dieses Programm nimmt in einem festen Zeitabstand ein Bild auf und speichert dieses auf dem Computer. Tragen Sie im Messprogramm für den Zeitabstand 1 s ein. Schalten Sie die Option *Bilder speichern* zunächst ab.

Suchen Sie sich nun ein Partikel aus, in dessen unmittelbarer Umgebung sich keine anderen Partikel befinden und stellen Sie die  $xy$ -Position des

Mikroskopisches so ein, dass sich das ausgewählte Partikel im Zentrum des Mikroskopbildes befindet. Zur Verbesserung des Kontrastes sollten Sie die Irisblende am Kondensator auf die Position *MIN* stellen.

Da die Brownsche Bewegung nicht nur in der  $xy$ -Bildebene, sondern auch in  $z$ -Richtung erfolgt, kann es passieren, dass das zu beobachtende Partikel aus dem Fokus läuft und somit nicht mehr sichtbar wird. Um dem entgegenzuwirken, müssen Sie die Fokussierung des Mikroskops mit dem Feinregler nachjustieren. Dies erfordert einiges an Feingefühl und besonders Konzentration.

Führen Sie zunächst eine Probemessung durch: Damit sich die Probe durch die Mikroskopbeleuchtung nicht zusätzlich aufheizt, drehen Sie die Helligkeit auf das Minimum zurück. Die Kamera ist auch bei dieser Minimalbeleuchtung empfindlich genug, kontrastreiche Bilder zu liefern. Starten Sie das Programm durch Anklicken des Pfeils in der linken oberen Ecke und versuchen Sie der Bewegung eines Partikels über mehrere Minuten auf dem Monitor zu folgen. Nur wenn das Partikel kaum noch erkennbar sein, müssen Sie mit dem Feintrieb des Mikroskops den Fokus vorsichtig nachstellen. **Das Partikel muss während der ganzen Zeit eindeutig erkennbar sein!**

Stoppen Sie das Messprogramm. Schalten Sie die Option *Bilder speichern* ein und starten Sie erneut das Programm. **Insgesamt ist jede Sekunde und mindestens 150 mal, ein Bild aufzunehmen.** Entfernen Sie nach der Messung die Probe und werfen Sie diese in den Abfall. **Achtung: Auf keinen Fall dürfen Sie nach Beendigung der Messung das Programm nochmals starten. Ihre zuvor aufgenommenen Bilder würden sonst überschrieben werden.**

3. Notieren Sie die Zimmertemperatur.

4. **Eichung des Abbildungsmaßstabs:** Um später die Position des Partikels ausmessen zu können, müssen Sie den Abbildungsmaßstab des Mikroskops bestimmen. Benutzen Sie dazu das ausliegende Objektmikrometer. Geben Sie einen Tropfen Immersionsöl auf das Objektmikrometer und legen Sie dieses auf den Mikroskopoptisch. Stellen Sie vorsichtig den Fokus ein und positionieren Sie den Mikroskopoptisch so, dass Sie den Maßstab gemäß Abbildung 7 erkennen können. Beenden Sie das Messprogramm und starten

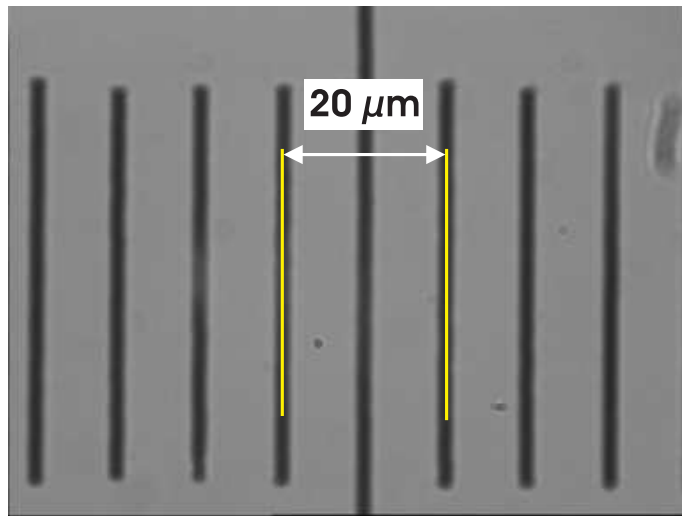


Abbildung 7: Eichung des Abbildungsmaßstabs mit einem Objektmikrometer. Die Distanz zwischen zwei Teilstrichen beträgt  $10 \mu\text{m}$ .

Sie das Programm *Eichung.exe*. Optimieren Sie nochmals die Bildschärfe und speichern Sie dann das Eichbild. Reinigen Sie das Objektmikrometer mit einem Papiertuch und legen Sie es zurück in die Aufbewahrungsbox.

5. **Vermessung der Partikelpositionen:** Starten Sie das Programm *Auswertung.exe* vom Desktop aus. Um die Partikelpositionen zu bestimmen, müssen Sie wissen, wie viele Bildpixel einem Mikrometer entsprechen. Laden Sie dazu das zuvor gespeicherte Eichbild (Schalter *Eichbild laden* im Feld *Eichung*) und messen Sie mit Hilfe des Cursors den Pixelabstand über eine Distanz von  $20 \mu\text{m}$  (Abbildung 7). Die Pixelwerte werden im Feld *Marker* angezeigt. Den Cursor können Sie zum einen mit der Maus bewegen, als auch mit den Steuerpfeilen unter dem Bildfeld (Abbildung 8). Tragen Sie den gemessenen Pixelabstand in das Feld *Eichung* ein.

Nach dieser Eichung können Sie mit der Vermessung der Partikelpositionen Ihrer aufgenommenen Bilder beginnen. Laden Sie das erste Bild, indem Sie auf den Schalter *Bild laden* klicken (der daneben liegende Schalter soll auf der Position *Auto* stehen). Verfahren Sie den Marker nun so, dass dieser

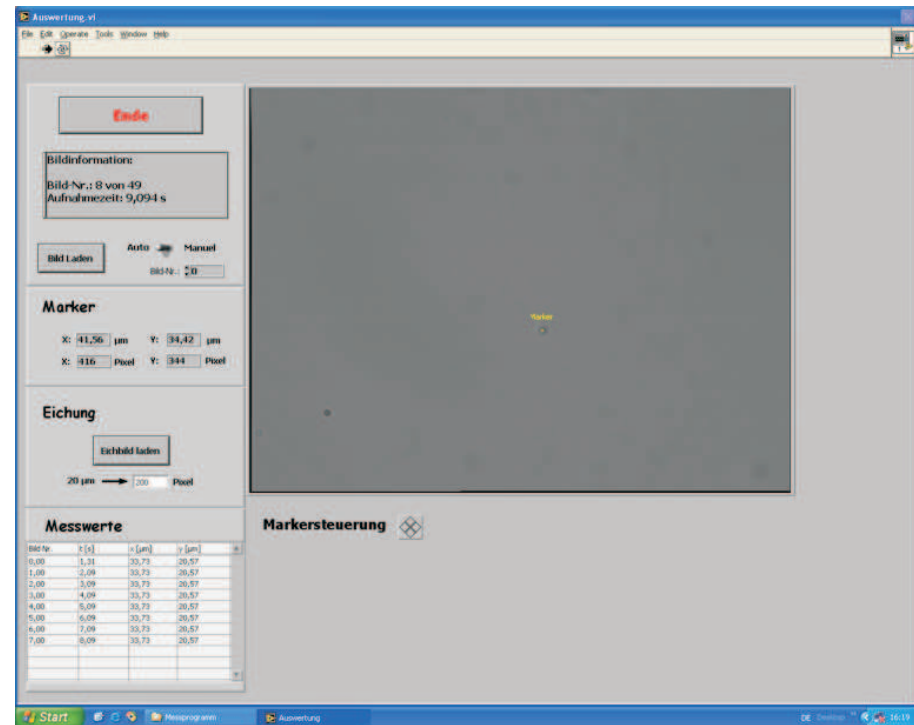


Abbildung 8: Bedienoberfläche des Programms zur Ausmessung der Partikelpositionen der aufgenommenen Bilder.

sich **exakt** in der Mitte des Partikels befindet. Die entsprechenden Koordinaten werden im Feld „Marker“ angezeigt. Wenn Sie nun erneut auf den Schalter *Bild laden* klicken, wird die zuvor ausgemessene Partikelposition gespeichert, im Feld *Messwerte* angezeigt, und das nächst folgende Bild geladen. Vermessen Sie so die Partikelposition aller aufgenommenen Bilder. Das Programm wird automatisch gestoppt, wenn Sie die Partikelposition des letzten aufgenommenen Bildes bestimmt haben. Die Messwerte werden unter `C:\Messungen\Messung.dat` als Textdatei gespeichert.

6. Fangen Sie sofort mit der Auswertung der Messdaten an.

## VIII Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

### VIII.1 Importieren und grafische Darstellung der Messdaten

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm `Jupyter` vom Desktop aus. Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.mlab as mlab
import numpy as np
```

Die Messdaten sind in der Datei `Messung.dat` im Ordner `Messungen` auf dem Desktop gespeichert. Kopieren Sie diese in den Ordner `data` auf dem Desktop. Schauen Sie sich die Messdaten an. Die Datei besitzt eine Headerzeile und besteht aus 4 Spalten. Als Dezimaltrennzeichen werden Kommas verwendet. Zum Importieren der Daten müssen die Kommas durch Punkte ersetzt werden. Das geht mit folgender Funktion:

```
def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8").replace(',', '.'))
```

Zum Importieren verwenden wir die Numpy Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname angeben. Desweiteren wird die erste Zeile übersprungen und nur die letzten drei Spalten ausgelesen. Der `converter` ersetzt alle Kommas durch Dezimalpunkte. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `t,x,y` geschrieben:

```
t,x,y=np.loadtxt('data/Messung.dat', skiprows=1, usecols=(1,2,3),
                converters= {1:comma_to_float, 2:comma_to_float,
                             3:comma_to_float}, unpack=True)
```

Das Array `t` enthält die Zeitdaten und `x, y` die gemessenen Positionen. Verschaffen Sie sich einen grafischen Eindruck von der Wanderung des Partikels. Zeichnen Sie die `x,y`- Daten als Punkt-Liniendiagramm.

```
plt.plot(x, y, marker='s', color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('x / '+' $\mu$'+ 'm')
plt.ylabel('y / '+' $\mu$'+ 'm')
plt.title('Brownian Motion')
plt.savefig('figures/brown1.pdf', format='PDF')
```

Drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Protokollheft ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 9.

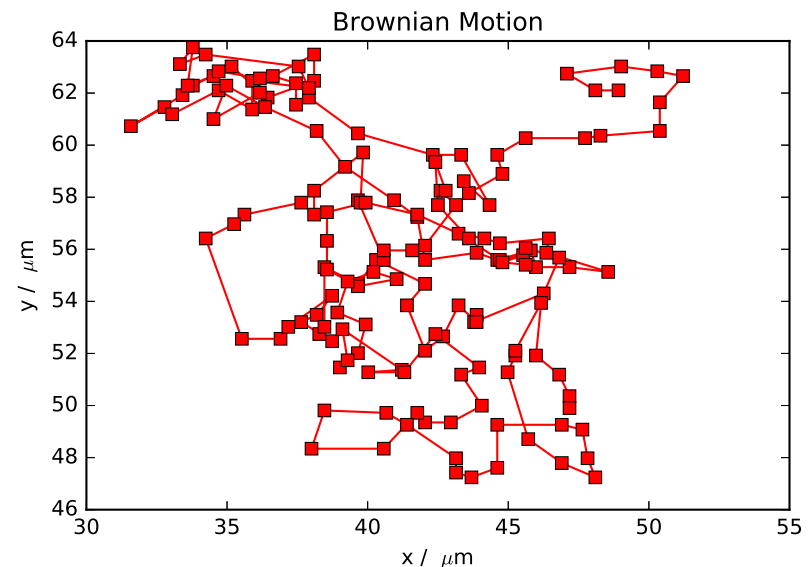


Abbildung 9: Bewegung eines Partikels.

### VIII.2 Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates und dessen Fehler

Die Messdaten geben die absoluten Koordinaten an, wir brauchen aber die Koordinatenänderungen  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  und  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$  sowie deren Quadrate:

```

dt=np.array([])
dx=np.array([])
dy=np.array([])
i=0
while i < len(t)-1:
    dt=np.append(dt,t[i+1]-t[i])
    dx=np.append(dx,x[i+1]-x[i])
    dy=np.append(dy,y[i+1]-y[i])
    i = i + 1
r_squared=dx**2+dy**2

```

Wir benötigen die mittlere quadratische Abweichung (`r_squared_mean`) und dessen Fehler (`r_squared_mean_std`), sowie den Mittelwert des Zeitintervalls von `dt` (`dt_mean`):

```

r_squared_mean=np.mean(r_squared)
print("r_squared_mean= ", r_squared_mean)
r_squared_mean_std=np.std(r_squared)/np.sqrt(len(r_squared))
print("r_squared_mean_std= ", r_squared_mean_std)
dt_mean=np.mean(dt)
print("dt_mean= ", dt_mean)

```

Berechnen Sie hieraus mit Hilfe von Gleichung (21) die Boltzmannkonstante und die Diffusionskonstante  $D$  mit den jeweiligen Fehlern. Die Viskosität von Wasser finden Sie in Abbildung 12.

### VIII.3 Kontrollverteilung

Nach Gleichung 9 ist die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel nach der Zeit  $t$  innerhalb des Bereichs  $[x, x + \Delta x]$  zu finden durch eine Gaußverteilung gegeben. Überprüfen Sie dies, indem Sie die gemessenen Partikelverschiebungen in ein Histogramm eintragen. Da die Brownsche Bewegung isotrop ist, können Sie sowohl die Verschiebungen  $dx$  als auch die Verschiebungen  $dy$  gemeinsam in das gleiche Histogramm eintragen. Mit der Funktion `np.append(dx,dy)` werden die Datensätze in das Array `all_data` geschrieben:

```

all_data=np.append(dx,dy)
plt.hist(all_data, normed=1)

```

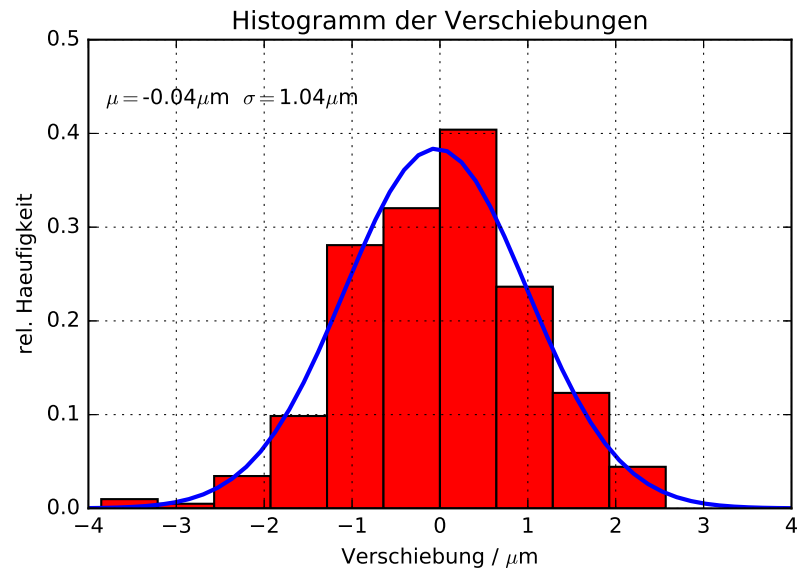


Abbildung 10: Histogramm der Verschiebungen.

Die Option `normed=1` normiert die Fläche des Histogramms auf den Wert Eins. Schauen Sie sich die Parameter von `plt.hist()` an und ändern Sie gegebenenfalls die Binbreite. Optimieren Sie die Formatierung des Diagramms. Fügen Sie Achsenbeschriftungen, Einheiten, Diagrammüberschrift etc. ein. In das Histogramm soll noch die zugrundeliegende Gaußverteilung (`mlab.normpdf()`) mit eingezeichnet werden. Die Gaußverteilung ist eindeutig durch den Mittelwert (`mu=np.mean(all_data)`) der Verschiebungen sowie deren Standardabweichung (`sigma=np.std(all_data)`) festgelegt. Die Abszissenwerte generieren wir uns mit der Funktion `np.linspace()`:

```

mu=np.mean(all_data)
sigma=np.std(all_data)
gauss = mlab.normpdf(np.linspace(-4,4), mu , sigma)

plt.plot(np.linspace(-4,4), gauss, 'b-', linewidth=2)

```

```
plt.savefig('figures/brown2.pdf', format='PDF')
```

Fügen Sie mit dem Befehl `plt.text()` den Mittelwert ( $\mu$ ) und die Standardabweichung ( $\sigma$ ) mit in das Diagramm ein. Sie können auch  $\text{\LaTeX}$ -Code eingeben. Z.B. liefert `\mu` den Ausdruck  $\mu$  und `\sigma` liefert  $\sigma$ . Drucken Sie das Diagramm aus und fügen Sie es in Ihr Protokollheft ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 10.

#### VIII.4 Kumulative Verteilung der Verschiebungsquadrate

Nach Gleichung (13) ist das mittlere Verschiebungsquadrat  $\langle r^2 \rangle$  proportional zur Zeit. Stellt man die kummulative Verschiebung als Funktion der Zeit dar, sollte sich ein linearer Zusammenhang gemäß Abbildung 11 ergeben.

```
r_kumm=np.cumsum(r_squared)
plt.plot(t[:-1], r_kumm, marker='.', color='red', linewidth=0)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Summe $r_i^2 / \mu m^2$')
plt.title('Kummulative Verschiebung')
plt.savefig('figures/brown3.pdf', format='PDF')
```

Fitten Sie eine Gerade an die Daten und tragen Sie die Messwerte und die angepasste Funktion in ein Diagramm ein.

```
from scipy.optimize import curve_fit
```

```
def linear(x,a,b):
    return a*x+b
```

```
popt, pcov = curve_fit(linear, t[:-1], r_kumm)
```

Die gefundenen Fitparameter sind in dem Array `popt` gespeichert. `popt[0]` entspricht der Steigung, `popt[1]` dem Achsenabschnitt. Mit

```
plt.plot(t[:-1], linear(t[:-1],*popt))
```

können Sie die Funktion in Ihr zuvor erstelltes Diagramm einfügen. `*popt` entpackt die Fitparameter direkt in Ihre Funktion. Passen Sie die Formatierung an und tragen Sie Ihre Fitfunktion und Fitparameter mit in das Diagramm ein. Das Diagramm sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 11. Berechnen Sie aus der Steigung wieder die Boltzmann- und Diffusionskonstante. Stimmen die Werte mit den anderen Messungen überein?

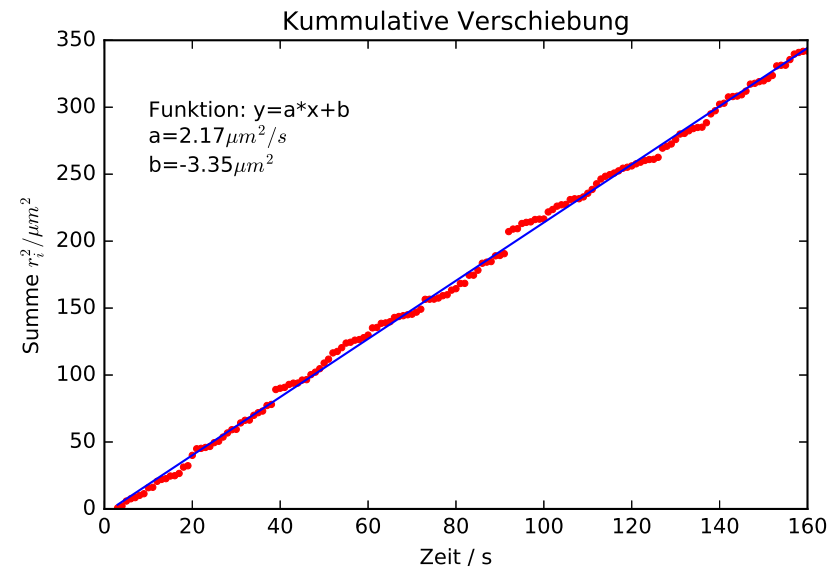


Abbildung 11: Kummulative Verschiebung eines Partikels.

### Viskosität von Wasser

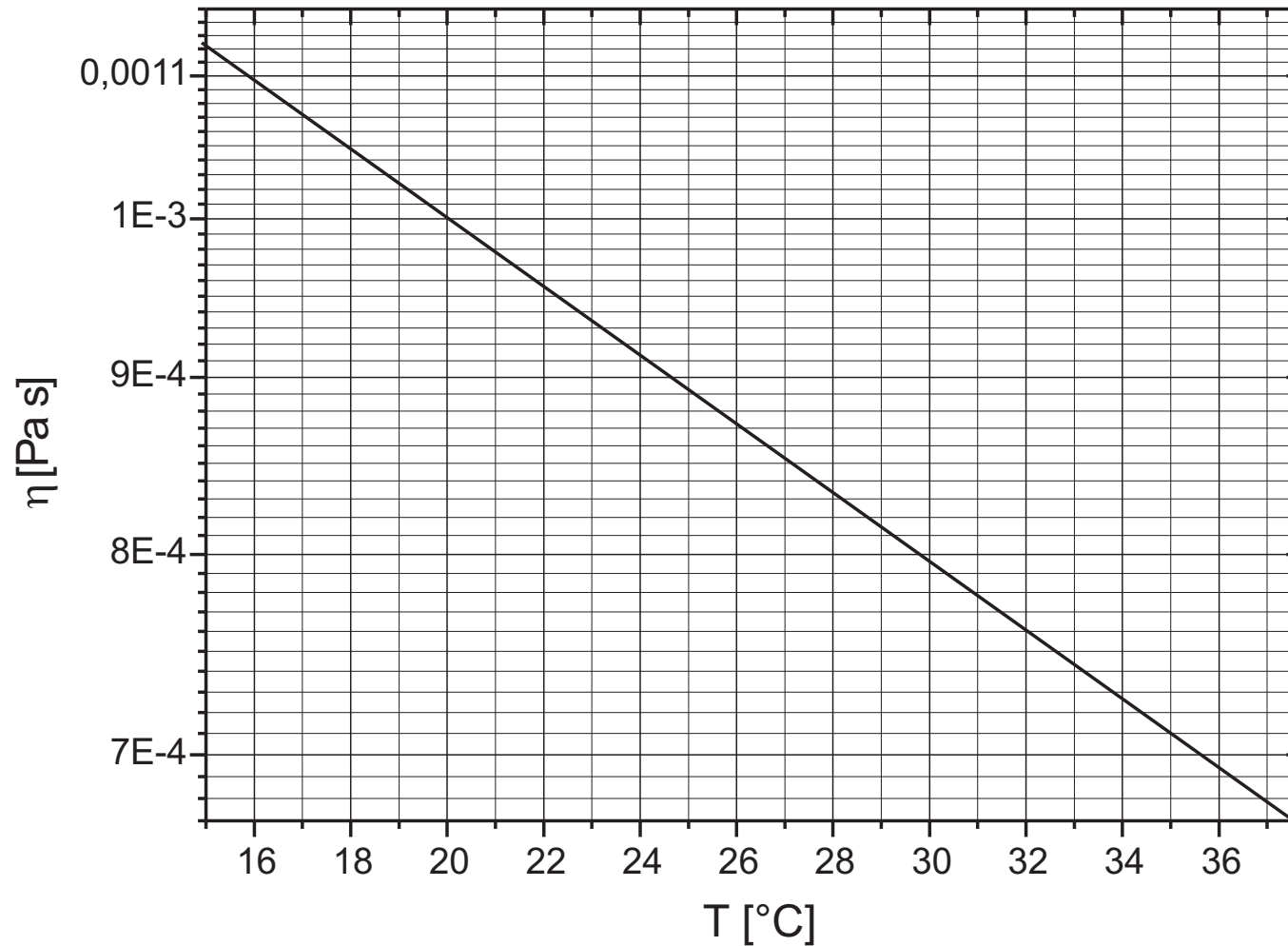


Abbildung 12: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser.



## Versuch 232

# Michelson-Interferometer

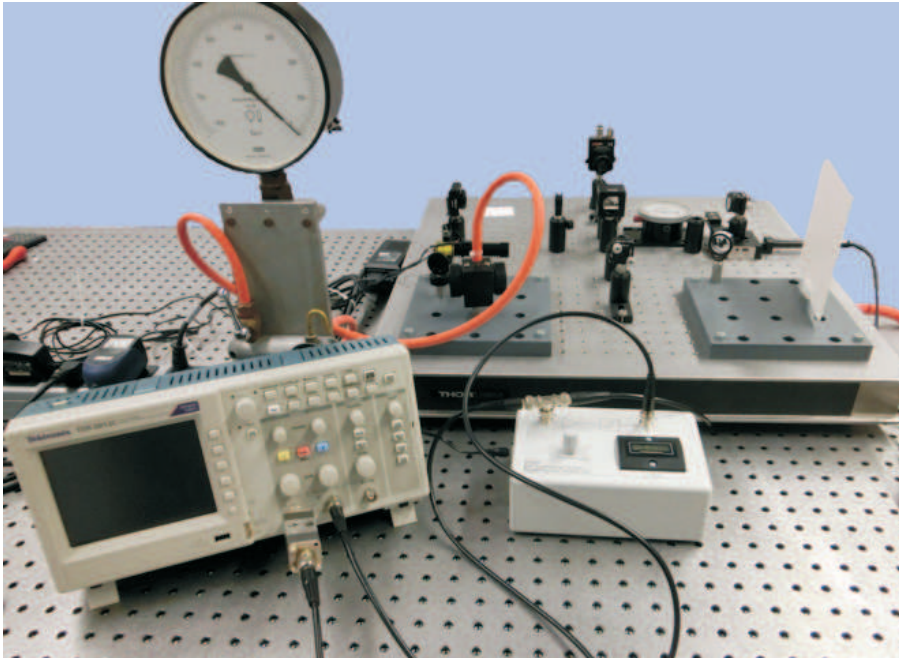


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

## I Messaufbau

- Michelson Interferometer
- Laser, Leuchtdiode
- Thermometer
- Vakuumpumpe

## II Literatur

- Bergmann- Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III*, de Gruyter Berlin.
- R. P. Pohl, *Optik und Atomphysik*, Springer Verlag.
- W. Demtröder, *Experimentalphysik 2*, Springer Verlag.

## III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Grundlagen der Wellenoptik (Hyugens'sches Prinzip, Interferenz, Superpositionsprinzip, Kohärenz). Interferenz gleicher Neigung, Interferenz gleicher Dicke. Aufbau eines Michelson-Interferometers.

*Verständnisfragen:*

1. Was ist Interferenz? Was besagt das Superpositionsprinzip?
2. Was sind Interferenzmuster und wie kommen sie zustande? Nennen Sie die Bedingungen für die Phasenverschiebung bzw. für den Gangunterschied zweier Wellen, damit die überlagerte Welle eine maximale bzw. eine verschwindende Intensität besitzt. Was ist zu beachten, wenn eine Teilwelle ein Medium mit einem anderem Brechungsindex durchläuft als die andere Teilwelle?
3. Warum kann man bei natürlichem Licht in der Regel keine Interferenzerscheinungen beobachten? Erläutern Sie die Begriffe Kohärenz, Kohärenzzeit und Kohärenzlänge. Wie groß sind die Größenordnungen der Kohärenzlängen einer Glühlampe bzw. eines Lasers?
4. Wie groß ist gemäß Gleichung (8) die Intensität der überlagerten Welle, wenn die interferierenden Wellen inkohärent sind?
5. Was versteht man unter *Interferenz gleicher Neigung* und *Interferenz gleicher Dicke*?

6. Beschreiben Sie den Aufbau eines Michelson-Interferometers. Erklären Sie das Zustandekommen der verschiedenen Interferenzmuster (Kreissystem, Streifensystem).
7. Wie lässt sich mit einem Michelson-Interferometer die Wellenlänge der Lichtquelle bzw. der Brechungsindex eines Mediums bestimmen?
8. Wie muss der bewegliche Spiegel des Interferometers justiert sein, um Interferenzen mit Licht einer sehr kleinen Kohärenzlänge beobachten zu können (Weißlichtinterferenz)?
9. Warum erscheint das an einer rauen Oberfläche reflektierte Licht eines Lasers granuliert (Stichwort: Speckle-Muster)?

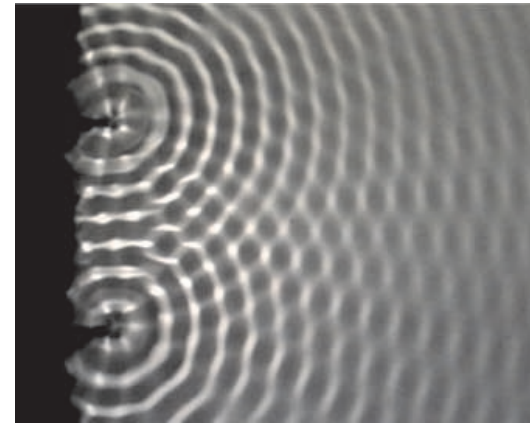


Abbildung 2: Interferenz zweier Wasserwellen.

## IV Aufgaben

1. Messen Sie die Wellenlänge des grünen Lasers.
2. Bestimmen Sie den Brechungsindex von Luft.
3. Messen Sie die Kohärenzlänge einer Leuchtdiode.

## V Grundlagen

Interferenz bezeichnet allgemein die Überlagerung von Wellen. Sie haben dieses Phänomen sicherlich schon anhand von Wasserwellen an einem See oder bei Experimenten mit der Wellenwanne in der Vorlesung kennengelernt. Treffen z.B. zwei Wasserwellen aufeinander, so überlagern sich diese zu einer neuen Welle. Die Amplitude der resultierenden Welle hängt von der Phasenverschiebung der beiden Teilwellen ab. Trifft in einem bestimmten Punkt (Abbildung 2) ein „Wellenberg“ der einen Welle auf einen „Wellenberg“ der anderen Welle, so vergrößert sich die Amplitude der resultierenden Welle (konstruktive Interferenz). Trifft dagegen ein „Wellenberg“ auf ein „Wellental“, so verringert sich die Amplitude. Sind die Amplituden gar gleich groß, so löscht sich im letzten Fall die Amplitude der resultierenden Welle aus.

Auch Licht lässt sich durch eine Welle beschreiben. Betrachten wir zwei ebene monochromatische Lichtwellen  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{01} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r} + \phi_1)} \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{02} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \phi_2)}\end{aligned}\quad (1)$$

Dabei bezeichnen  $\vec{E}_{0i}$  die Amplituden,  $\vec{k}_i$  die Wellenvektoren,  $\omega$  die Frequenz und  $\phi_i$  die Phasen der jeweiligen Wellen. Treffen diese aufeinander, so überlagern sie sich gemäß des Superpositionsprinzips, d.h. die Wellen addieren sich vektoriell zu einer resultierenden Welle  $\vec{E}_S(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{E}_S(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t).\quad (2)$$

Bei Licht ist aufgrund der hohen Frequenz nicht die Amplitude der Welle beobachtbar, sondern nur die Intensität  $I$ , d.h. der zeitliche Energiemittelwert, der auf eine bestimmte Fläche trifft. Dieser ist proportional zum Betragsquadrat der Amplitude:

$$I_S(\vec{r}, t) \propto |\vec{E}_S(\vec{r}, t)|^2.\quad (3)$$

In der hier verwendeten komplexen Notation lässt sich das Betragsquadrat sehr einfach berechnen. Wir müssen lediglich  $\vec{E}_S$  mit dem komplex konjugierten  $\vec{E}_S^*$

multiplizieren:

$$\begin{aligned}
 I_S \propto |\vec{E}_S|^2 &= \vec{E}_S \vec{E}_S^* = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \\
 &= \vec{E}_1 \vec{E}_1^* + \vec{E}_2 \vec{E}_2^* + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^* \\
 &= |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^*.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Die ersten beiden Summanden sind die Betragsquadrate der Einzelwellen. Für die beiden anderen Summanden berechnen wir durch Einsetzen von Gleichung (1)

$$\vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \vec{E}_2 \vec{E}_1^* = \vec{E}_{01} \vec{E}_{02} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}),
 \tag{5}$$

wobei wir hier die Phasenverschiebung

$$\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r} + \phi_1 - \phi_2
 \tag{6}$$

definiert haben. Mit Hilfe der Euler'schen Gleichung

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi
 \tag{7}$$

erhalten wir schließlich für die Intensität der überlagerten Welle:

$$I_S \propto |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + \underbrace{2\vec{E}_{01} \vec{E}_{02} \cos \varphi}_{\text{Interferenzterm}}.
 \tag{8}$$

Die Intensität der überlagerten Welle entspricht demnach nicht der Summe der Intensitäten der Einzelwellen. Es tritt zusätzlich ein Interferenzterm auf, der dazu führt, dass die Intensität der überlagerten Wellen größer (konstruktive Interferenz) oder kleiner (destruktive Interferenz) ist als die Summe der Einzelintensitäten.

*Beispiel:* Interferenz zweier linear polarisierten, ebener Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die sich in  $z$ -Richtung ausbreiten und gleiche Polarisationsrichtungen (z.B. in  $x$ -Richtung) besitzen. Für die  $x$ -Komponente der elektrischen Feldstärke gilt:

$$\begin{aligned}
 E_1(z, t) &= E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_1)} \\
 E_2(z, t) &= E_0 e^{i(\omega t - kz + \phi_2)},
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

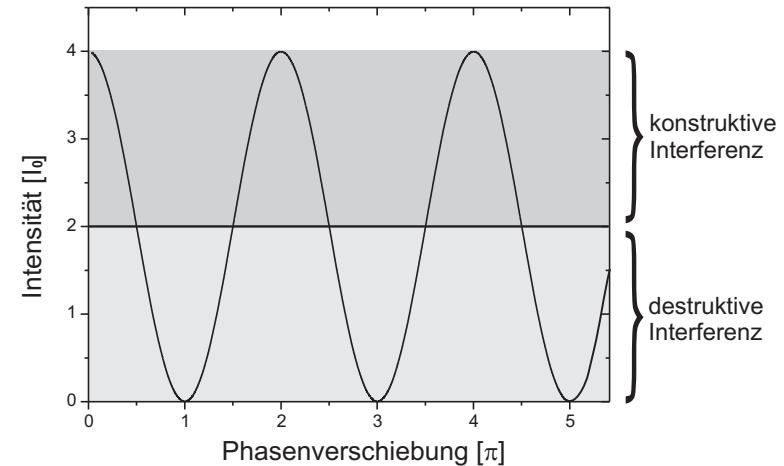


Abbildung 3: Intensität der überlagerten Welle nach Gleichung (10) in Einheiten von  $I_0$  als Funktion der Phasenverschiebung in Einheiten von  $\pi$ .

und für die Intensität  $I_S$  der überlagerten Welle  $E_S = E_1 + E_2$ :

$$I_S \propto E_S^2 \propto 2I_0 (1 + \cos \varphi),
 \tag{10}$$

wobei  $I_0$  proportional zur Intensität der Einzelwelle ist und  $\varphi = \phi_1 - \phi_2$  die Phasenverschiebung der beiden Wellen darstellt. In Abbildung 3 ist die Intensität als Funktion der Phasenverschiebung  $\varphi$  aufgetragen. Maximale Intensität ergibt sich, wenn die Phasenverschiebung ein Vielfaches von  $2\pi$  beträgt. Für ein ungerades Vielfaches von  $\pi$  verschwindet dagegen die Intensität der überlagerten Welle:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximale Intensität für } \varphi &= 2m\pi, (m \in \mathbb{Z}) & \tag{11} \\
 \text{Minimale Intensität für } \varphi &= (2m + 1)\pi, (m \in \mathbb{Z}) & \tag{12}
 \end{aligned}$$

Bei vielen Interferenzversuchen kommt die Phasenverschiebung dadurch zustande, dass die sich überlagernden Wellen zuvor unterschiedliche Weglängen durch-

laufen haben. Ein Beispiel ist in Abbildung 4a) dargestellt. Nehmen wir an, dass die beiden Lichtquellen punktförmig sind und Licht mit gleicher Frequenz, Amplitude, Polarisationsrichtung und konstanter Phase aussenden. Die Intensität der überlagerten Welle im Punkt P hängt dann von der Phasenverschiebung ab, die durch den Gangunterschied  $\Delta = s_1 - s_2$  der beiden Wellen hervorgerufen wird. Dabei bezeichnen  $s_1$  und  $s_2$  die Weglängen der jeweiligen Teilwellen. Da eine Phasenverschiebung von  $2\pi$  einem Wegunterschied von  $\lambda$  entspricht, besteht zwischen der Phasenverschiebung  $\varphi$  und dem Gangunterschied  $\Delta$  die Beziehung:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta, \tag{13}$$

wobei  $\lambda$  die Wellenlänge der Teilwellen beschreibt.

Breitet sich ein Wellenzug nicht im Vakuum aus, sondern durchläuft ein Medium mit dem Brechungsindex  $n$  (Abbildung 4b), so tritt eine zusätzliche Phasenverschiebung auf. Da die Wellenlänge im Medium um das  $n$ -fache der Vakuumlichtgeschwindigkeit kleiner ist, darf man bei der Berechnung des Gangunterschieds nicht die geometrischen Weglängen  $s$  verwenden, sondern muss die optischen Weglängen  $\Lambda$  berücksichtigen. Diese entspricht dem Produkt des Brechungsindex des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet und der geometrischen Weglänge  $s$ , die die Welle in dem Medium zurücklegt:

$$\Lambda = n s. \tag{14}$$

Mit Hilfe des Gangunterschieds lassen sich die Gleichungen (11) und (12) auch wie folgt formulieren:

$$\text{Maximale Intensität für } \Delta = m\lambda, (m \in \mathbb{Z}) \tag{15}$$

$$\text{Minimale Intensität für } \Delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, (m \in \mathbb{Z}) \tag{16}$$

**Kohärenz**

Voraussetzung für die Beobachtung von Interferenzerscheinungen ist die Kohärenz der Lichtquellen. Damit ist gemeint, dass die interferierenden Wellen eine konstante Phasenbeziehung aufweisen müssen. Bei inkohärentem Licht

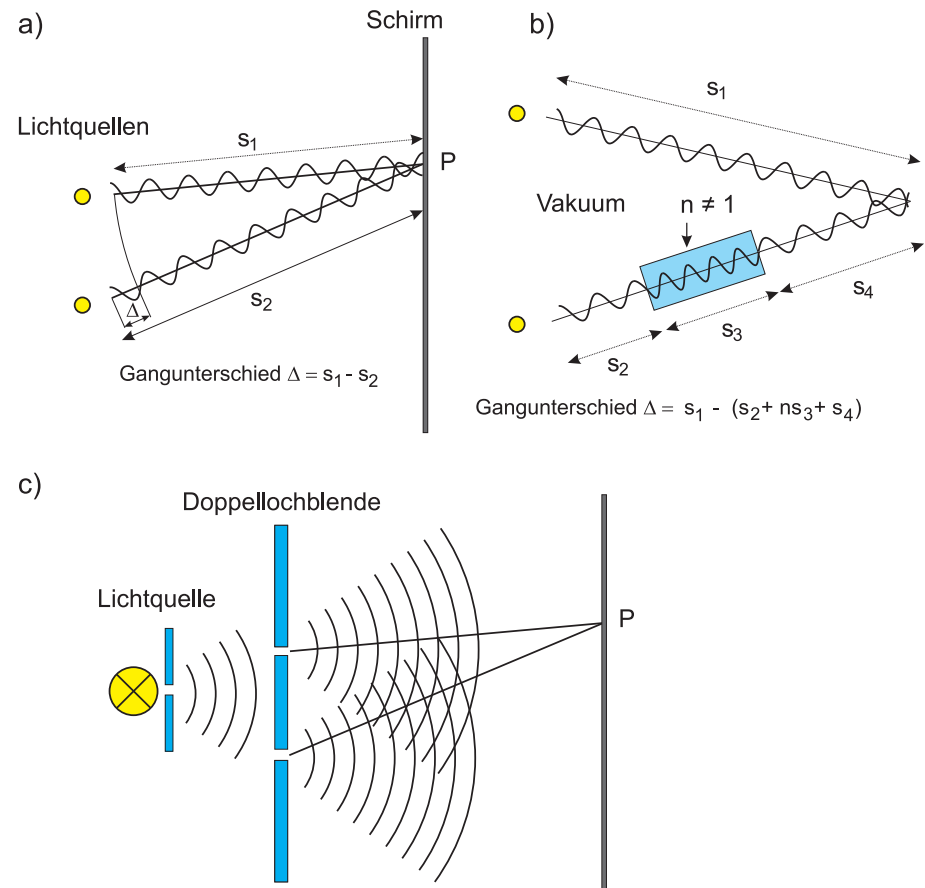


Abbildung 4: a) Gangunterschied  $\Delta$  zweier Teilwellen nach dem Durchlaufen unterschiedlicher Weglängen. b) Breitet sich eine Teilwelle in einem Medium mit dem Brechungsindex  $n$  aus, tritt eine zusätzliche Phasenverschiebung auf. c) Erzeugung von kohärentem Licht durch Teilung der Wellenfront mit einer Doppellochblende.

ist die Phasenverschiebung  $\varphi$  in Gleichung (8) statistisch verteilt, so dass der Interferenzterm verschwindet und man daher keine Interferenzen beobachten kann.

Die meisten Lichtquellen, wie z.B. das Licht der Sonne oder einer Glühlampe, erzeugen inkohärentes Licht. Die Atome dieser Lichtquellen senden innerhalb eines sehr kurzen Zeitraums  $\tau$  unabhängig voneinander Wellenzüge aus, deren einzelnen Phasen statistisch verteilt sind. Das in Abbildung 4a) dargestellte Experiment würde daher bei Verwendung von natürlichem Licht nicht funktionieren. Um dennoch mit natürlichen Lichtquellen Interferenzen beobachten zu können, muss man das Licht einer einzigen Lichtquelle verwenden und dieses in Teilwellen aufspalten. Abbildung 4c) zeigt ein Beispiel, welches auch bei der Verwendung von natürlichem Licht, die Beobachtung von Interferenzerscheinungen ermöglicht. Anstatt zwei Lichtquellen, die statistisch unabhängig voneinander emittieren, verwenden wir hier eine Lichtquelle, deren Wellenfront mit Hilfe einer Doppellochblende in zwei Teilwellen aufgespalten wird. Da beide Öffnungen von der gleichen Primärwelle angeregt werden, emittieren diese nach dem Huygens'schen Prinzip Sekundärwellen, die die gleiche Phase aufweisen und daher „interferenzfähig“ sind.

Es gibt noch weitere Eigenschaften, die bei der Beobachtung von Interferenzerscheinungen erfüllt sein müssen. So darf der Gangunterschied der Wellen nicht beliebig groß sein. Wie bereits erwähnt wurde, erfolgt die atomare Emission eines Wellenzugs bei natürlichem Licht in einem sehr kurzen Zeitraum  $\tau$  (Kohärenzzeit). Diese kurze Emissionszeit bedingt schließlich, dass die ausgesendeten Wellenzüge auch nur eine kleine Länge<sup>1</sup> besitzen. Ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich für die Länge  $L$  des emittierten Wellenzugs

$$L = c\tau. \quad (17)$$

Die Länge  $L$  wird als Kohärenzlänge bezeichnet. Bei Interferenzversuchen ist darauf zu achten, dass der Gangunterschied nicht größer als die Kohärenzlänge wird. Andernfalls stammen die interferierenden Teilwellen nicht aus dem selben „Emissionsakt“ und besitzen daher keine konstante Phasenbeziehung.

Die Kohärenzlängen von Temperaturstrahlern wie z.B. einer Glühlampe oder der Sonne sind sehr klein (einige Wellenlängen  $\approx 10 \mu\text{m}$ ). Bei Gasentladungslampen liegt die Kohärenzlänge bei einigen Millimetern bis Metern und kann sich bei Lasern gar im Bereich von vielen Kilometern bewegen.

<sup>1</sup>Achtung: Hier ist die geometrische Länge des Wellenzugs gemeint und nicht die Wellenlänge!

### Kohärenzlänge und spektrale Bandbreite

Bei unseren bisherigen Betrachtungen sind wir immer davon ausgegangen, dass die Lichtquelle monochromatisch ist. Die Kohärenzbedingung besagt, dass nur dann Interferenzen beobachtbar sind, wenn die sich überlagernden Wellen eine konstante Phasenbeziehung aufweisen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Lichtquelle monochromatisches Licht aussendet. Solch eine Lichtquelle gibt es aber nicht! Auch eine reale, extrem schmalbandige Lichtquelle wie z.B. ein Laser, emittiert nur Licht einer bestimmten Frequenz  $\omega_0$  mit einer endlichen spektralen Bandbreite<sup>2</sup>  $\Delta\omega$ . Damit ist gemeint, dass das Licht Frequenzanteile im Bereich von  $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$  enthält.

Betrachten wir eine Lichtquelle mit einem rechteckigen Frequenzspektrum, wie es links in Abbildung 5 dargestellt ist. Solch ein Spektrum kann z.B. durch Ausblenden eines bestimmten Spektralbereichs eines kontinuierlichen Spektrums erzeugt werden. Die Amplitude  $g(\omega)$  bei der Frequenz  $\omega$  sei gegeben durch:

$$g(\omega) = \begin{cases} g_0, & |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega - \omega_0| > \Delta\omega/2. \end{cases} \quad (18)$$

Das von solch einer Lichtquelle ausgesandte Licht entspricht einer Überlagerung von Wellen mit Frequenzen im Bereich von  $\omega_0 - \Delta\omega/2$  bis  $\omega_0 + \Delta\omega/2$ :

$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} g_0 e^{i\omega(t-z/c)} d\omega, \quad (19)$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Für die Phase nehmen wir an, dass diese am Ort  $z = ct$  für alle Frequenzen Null ist. Verwenden wir der Übersichtlichkeit wegen die Abkürzungen  $\sigma = \omega - \omega_0$ ,  $d\sigma = d\omega$  und  $\rho = t - z/c$ , so folgt:

<sup>2</sup>Dies folgt z.B. aus der Heisenberg'schen Energie-Zeit Unschärfe.

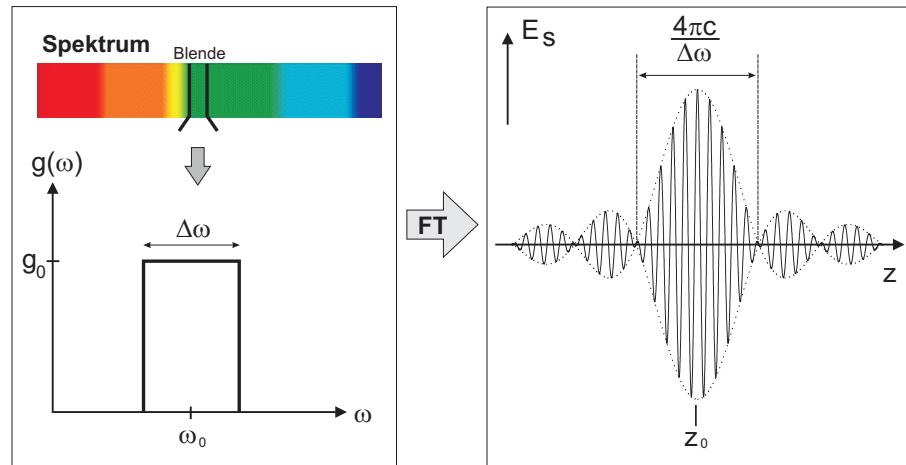


Abbildung 5: Links: Polychromatisches Licht mit rechteckförmigen Spektrum der spektralen Breite  $\Delta\omega$ . Rechts: Resultierende Wellenform. Der Pfeil mit der Abkürzung FT steht für Fouriertransformation.

$$E_S = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} g_0 e^{i\rho(\omega_0+\sigma)} d\sigma \quad (20)$$

$$= g_0 e^{i\rho\omega_0} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} e^{i\rho\sigma} d\sigma. \quad (21)$$

$$= \frac{g_0}{i\rho} e^{i\rho\omega_0} \left( e^{i\rho\Delta\omega/2} - e^{-i\rho\Delta\omega/2} \right) \quad (22)$$

$$= \frac{2g_0}{\rho} e^{i\rho\omega_0} \sin \rho\Delta\omega/2. \quad (23)$$

Ersetzen wir nun wieder  $\sigma$  und  $\rho$  durch die ursprünglichen Größen, so erhalten wir schließlich:

$$E_S = E_0 \frac{\sin(\Delta\omega/2(t-z/c))}{\Delta\omega/2(t-z/c)} e^{i\omega_0(t-z/c)}, \quad (24)$$

wobei hier  $E_0 = g_0 \Delta\omega$  definiert wurde. Die Form dieser Welle ist in Abbildung 5

rechts dargestellt. Die Abbildungen 6a) und 6b) zeigen eine Messung die mit dem Michelson- Interferometer durchgeführt wurden. Die von einer Lichtquelle mit einem rechteckigen Frequenzspektrum ausgehende Welle ist amplitudenmoduliert. Die Amplitude ist an der Stelle  $z_0$  maximal. Zudem besitzt der Wellenzug noch weitere Nebenmaxima, deren Amplituden aber schnell abfallen. Man bezeichnet solch einen Wellenzug auch als Wellenpaket.

Die Intensität des Wellenpakets berechnet sich aus dem Quadrat der Amplitude. Eine Rechnung zeigt, dass die Intensität des ersten Nebenmaximums nur 4,7 % der Intensität des Hauptmaximums beträgt. Die Intensitäten der weiteren Nebenmaxima betragen gar nur 1,7 %, 0,8 %, 0,5 % u.s.w. Nahezu die gesamte Intensität des Wellenpakets steckt im Hauptmaximum. Wir können daher annehmen, dass das Wellenpaket eine endliche Breite besitzt, welches der Breite des Hauptmaximums von  $4\pi c/\Delta\omega$  entspricht.

Überlagern sich zwei solcher Wellenpakete mit einer relativen Verschiebung von  $\Delta z = 2\pi c/\Delta\omega$ , so fällt die Maximalamplitude des einen auf die erste Nullstelle des anderen Wellenpakets. Man kann also für Wellenpakete dieser Art die Kohärenzlänge  $L$  definieren durch:

$$\text{Kohärenzlänge: } L = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}. \quad (25)$$

Je schmalbandiger die Lichtquelle, desto größer ist die Kohärenzlänge. Damit wird nun auch verständlich, warum die Kohärenzlängen von Temperaturstrahlern so klein sind. Nur streng monochromatisches Licht (d.h.  $\Delta\omega \rightarrow 0$ ) hat unendlich lange Wellenzüge und damit eine unendliche Kohärenzlänge.

Anstatt die Kohärenzlänge durch die Frequenz auszudrücken, können wir diese auch durch die Angabe der Wellenlänge beschreiben. Mit  $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu = 2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$  schreibt sich die Kohärenzlänge

$$\text{Kohärenzlänge: } L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (26)$$

Es soll noch angemerkt werden, dass zwischen der Amplitude  $E_S$  und dem Frequenzspektrum  $g(\omega)$  in Gleichung (19) ein wichtiger Zusammenhang besteht:  $g(\omega)$  ist die Fouriertransformierte von  $E_S$ . Im nächsten Praktikumsversuch *Fourieroptik* werden Sie sich mit dieser Thematik noch genauer beschäftigen.

In Abbildung 6c) ist das Spektrum einer grünen Leuchtdiode (LED) dargestellt. In Abbildung 6d) das resultierende mit dem Michelson- Interferometer gemessene Wellenpaket (Interferogramm). Das Spektrum lässt sich durch eine

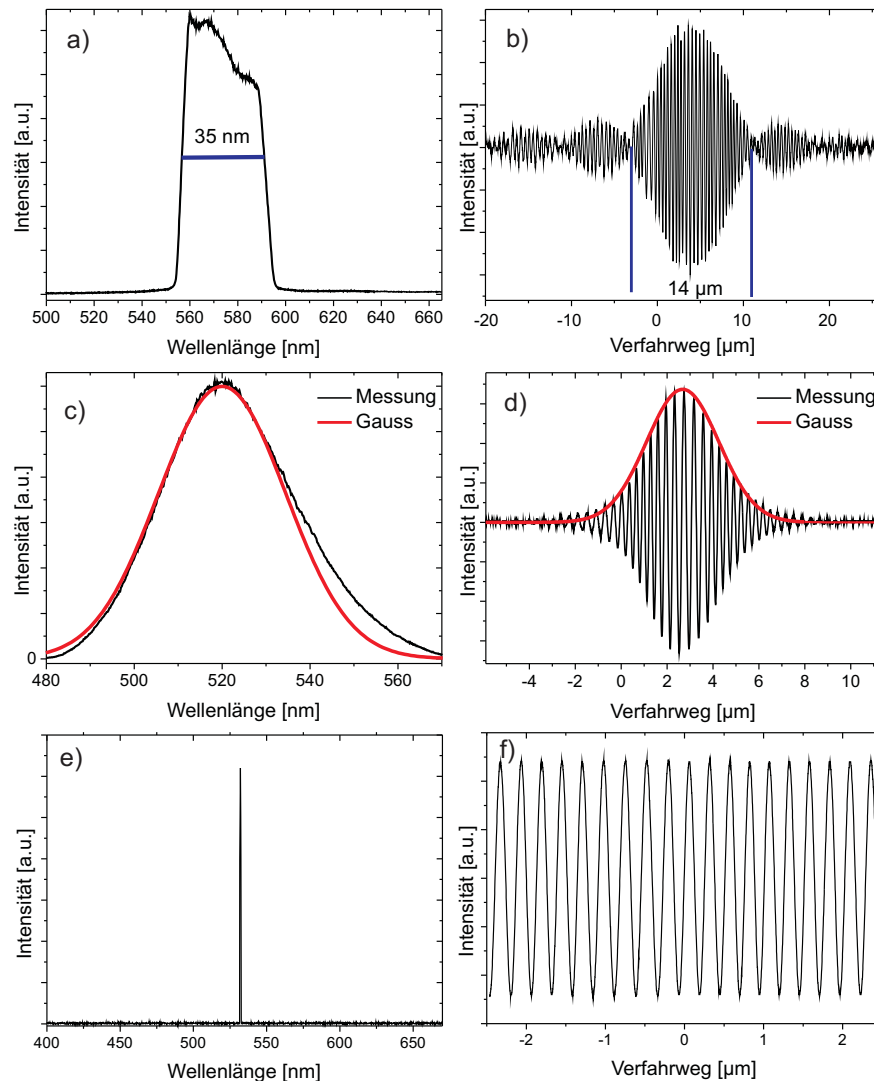


Abbildung 6: a) Modifiziertes, „rechteckförmiges“ Spektrum einer Halogenlampe. b) Gemessenes Interferogramm. c) Spektrum einer LED. d) Interferogramm der LED. e) Spektrum eines Lasers. f) Interferogramm eines Lasers.

Gauß-Verteilung approximieren. Die Fouriertransformation einer Gaußfunktion ist ebenfalls eine Gaußfunktion. Das Interferogramm ist daher gaußförmig moduliert. Diese Methode findet Anwendung in der Fourier-Transform-Infrarotspektroskopie (FTIR-Spektroskopie). Dabei werden mit dem Michelson-Interferometer Interferogramme von Infrarot-Lichtquellen aufgenommen. Die dazugehörigen Spektren können danach einfach durch eine Fouriertransformation berechnet werden. Abbildung 6e) zeigt das Spektrum eines Lasers. Da dieses sehr schmalbandig ist, sieht man im Interferogramm auch über einen sehr großen Verfahrensweg keine Modulation. Das erklärt die große Kohärenzlänge gegenüber anderen Lichtquellen.

### Interferenzen an dünnen Schichten

In den beiden folgenden Abschnitten, werden zwei Spezialfälle, die *Interferenzen gleicher Neigung* und die *Interferenzen gleicher Dicke* behandelt, die für das Verständnis des Michelson-Interferometers sehr wichtig sind.

### Interferenzen gleicher Neigung

Interferenzen gleicher Neigung treten dann auf, wenn ein Lichtbündel auf eine transparente, planparallele Platte trifft. Abbildung 7a) verdeutlicht das Prinzip. Das von einer Lichtquelle ausgehende Lichtbündel fällt unter dem Winkel  $\alpha$  auf eine Platte der Dicke  $d$  und mit dem Brechungsindex  $n$ . Ein Teil der Intensität wird an der Oberfläche reflektiert, der andere Teil wird im Medium nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz gebrochen. Beim Austritt des Lichtbündels aus dem Medium tritt erneut eine Reflexion bzw. Transmission auf.

Durch die Platte wird das einfallende Lichtbündel in mehrere reflektierte und transmittierte Lichtbündel aufgespalten, wobei benachbarte Teilbündel einen Gangunterschied entsprechend des optischen Wegunterschieds besitzen. In Abbildung 7b) ist dies für zwei benachbarte reflektierte Teilbündel dargestellt. Für den Gangunterschied  $\Delta$  berechnen wir:

$$\begin{aligned} \Delta &= n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD} \\ &= \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

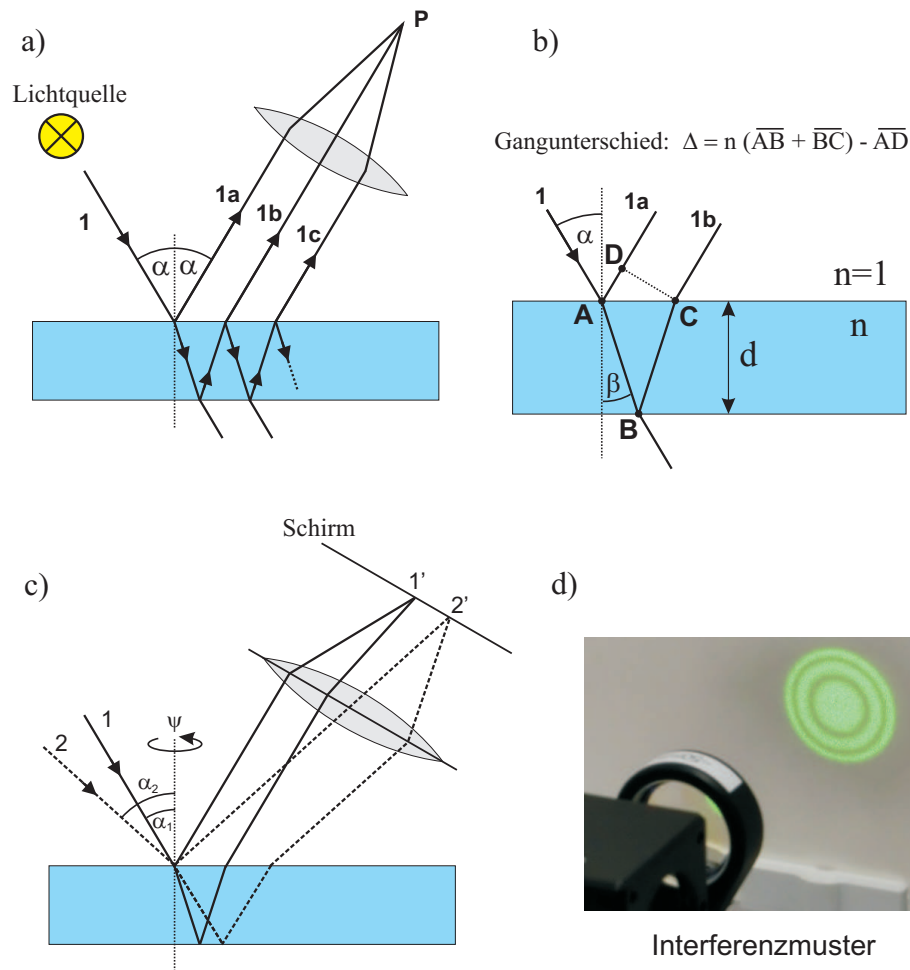


Abbildung 7: a) Interferenz gleicher Neigung. b) Berechnung des Gangunterschieds benachbarter Teilbündel. c) Strahlengang für zwei Lichtbündel mit unterschiedlichem Einfallswinkel. d) Interferenzmuster: Haidinger'sche Ringe.

Mit Hilfe des Snellius'schen Brechungsgesetzes ergibt sich:

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos \beta} - \frac{2nd \sin^2 \beta}{\cos \beta} \tag{28}$$

$$= 2nd \cos \beta \tag{29}$$

$$= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Berücksichtigen wir noch zusätzlich, dass bei Reflexion am optisch dichteren Medium ein Phasensprung von  $\pi$  (bzw. ein Gangunterschied von  $\lambda/2$ ) auftritt, so erhalten wir schließlich für den Gangunterschied:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \tag{30}$$

Bringt man in den Strahlengang eine Sammellinse, so interferieren die Teilbündel im Punkt P in der Brennebene der Linse. Dabei tritt maximale Intensität auf, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Für den Fall, dass der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt, löschen sich die Teilwellen aus.

Der Gangunterschied benachbarter Teilbündel hängt vom Einfallswinkel  $\alpha$  (Neigungswinkel) des einfallenden Lichts ab. Ist das einfallende Licht nicht parallel, so dass mehrere Lichtbündel mit unterschiedlichen Einfallswinkel auf die Platte treffen (Abbildung 7c), so interferieren alle Teilbündel, die unter dem gleichen Neigungswinkel einfallen im selben Punkt. Daher spricht man von Interferenz gleicher Neigung.

Abbildung 7c) zeigt nur einen zweidimensionalen Spezialfall, bei dem die Wellenbündel in der gleichen Einfallsebene auf die Platte treffen. Im Dreidimensionalen, bei dem die Wellenbündel auch unter unterschiedlichen Winkel  $\psi$  zum Einfallslot einfallen, interferieren alle Teilwellen, die den gleichen Neigungswinkel  $\alpha$  besitzen, nicht in einem Punkt, sondern innerhalb eines Kreisrings in der Brennebene der Linse. Als Interferenzmuster beobachtet man daher ein konzentrisches Ringsystem, die als Haidinger'sche Ringe bezeichnet werden (Abbildung 7d).

**Interferenzen gleicher Dicke**

Fällt paralleles Licht auf eine keilförmige Platte, so verlaufen die reflektierten Lichtbündel nicht mehr parallel zueinander (Abbildung 8). Falls der Keilwinkel



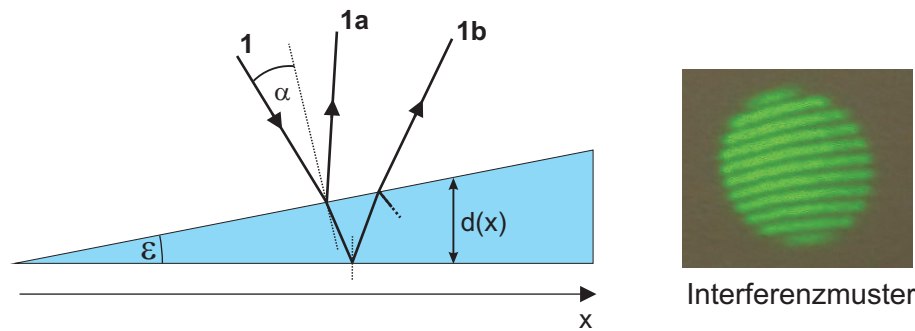


Abbildung 8: Interferenz gleicher Dicke.

$\epsilon$  sehr klein ist, gilt für den Gangunterschied der Teilbündel 1a und 1b

$$\Delta \approx 2d(x)\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \tag{31}$$

Fällt das Licht zudem fast senkrecht auf den Keil, so gilt  $\sin \alpha \approx 0$  und somit

$$\Delta \approx 2d(x)n - \frac{\lambda}{2}. \tag{32}$$

Der Gangunterschied ändert sich mit der Keildicke  $d(x)$ . Nur in einem Streifen parallel zur Keilkante, d.h. für  $d(x) = \text{konstant}$ , ist der Gangunterschied gleich groß. Blickt man von oben auf den Keil, so beobachtet man daher ein Streifenmuster (Fizeau- Streifen).

### Das Michelson-Interferometer

Der Aufbau eines Michelson-Interferometers ist in Abbildung 9a) skizziert. Die von einer Lichtquelle ausgehenden Wellenzüge treffen auf einen Strahlteiler, der das einfallende Licht in zwei Teilwellen gleicher Intensität aufteilt. Der eine Teil wird senkrecht zur Einfallrichtung „nach oben“ abgelenkt, der andere Teil wird nicht abgelenkt und läuft weiter in den „linken“ Schenkel. Nach dem Durchlaufen einer Wegstrecke  $s$  treffen die Teilwellen jeweils auf einen weiteren Endspiegel, der das Licht zurückreflektiert. Der Endspiegel im linken Schenkel des Interferometers (beweglicher Spiegel) ist zudem um eine Distanz  $\Delta x$  verschiebbar. Der kippbare Spiegel im oberen Schenkel lässt sich um einen

kleinen Winkel  $\epsilon$  verkippen. Die reflektierten Wellenbündel treffen wieder auf den Strahlteiler und verlassen diesen in gleicher Richtung. Schließlich treffen beide Wellenbündel auf einem Schirm oder Detektor, an dem sich die entstehenden Interferenzmuster beobachten lassen.

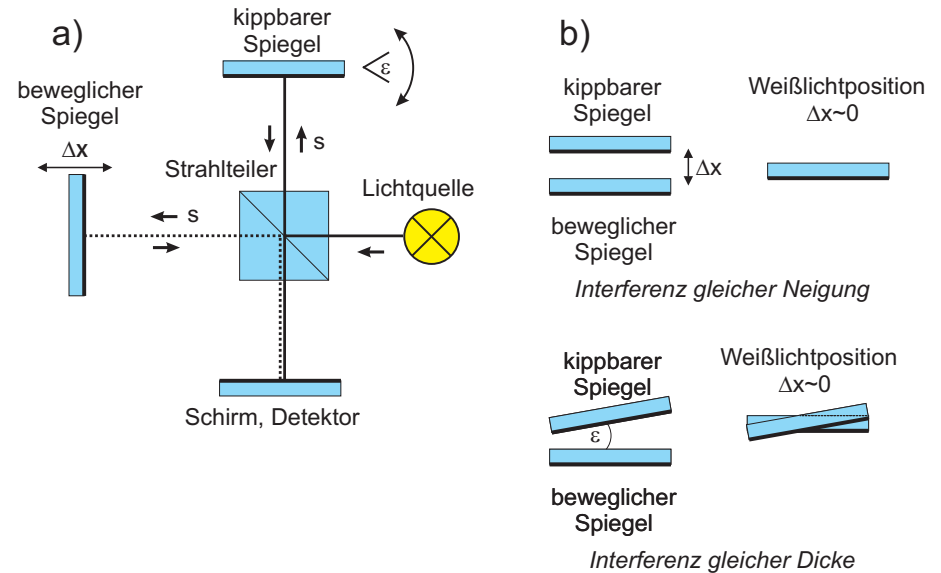


Abbildung 9: a) Aufbau eines Michelson-Interferometers. b) Die beiden Endspiegel bilden eine „Luftplatte“, so dass je nach Spiegelstellung entweder Interferenz gleicher Neigung oder Interferenz gleicher Dicke auftritt.

Die optischen Lichtwege in den jeweiligen Schenkeln sind je nach Position des beweglichen Spiegels unterschiedlich groß. Zum besseren Verständnis können wir uns die jeweiligen Lichtwege in der gleichen Richtung vorstellen, indem wir uns z.B. den linken Schenkel um  $90^\circ$  auf den oberen Schenkel geklappt denken. Dadurch ändern sich nicht die tatsächlich durchlaufenen Lichtwege. Es wird aber ersichtlich, dass die beiden Spiegel eine Luftplatte der Dicke  $\Delta x$  bilden und je nach Orientierung des kippbaren Spiegels, entweder Interferenz gleicher Neigung oder Interferenz gleicher Dicke auftritt (Abbildung 9b). Bei parallelen Spiegeln (Interferenz gleicher Neigung) beträgt der Gangunterschied in Richtung des Winkels  $\alpha$  gemäß Gleichung (30):

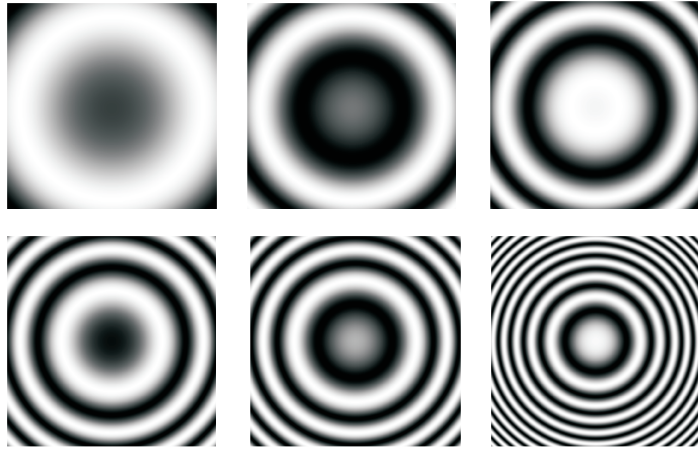


Abbildung 10: Interferenzmuster bei unterschiedlichen Spiegelabständen.

$$\Delta = 2\Delta x \cos \alpha - \frac{\lambda}{2}, \quad (33)$$

wobei wir hier für den Brechungsindex  $n = 1$  angenommen haben. Als Interferenzmuster beobachtet man ein Ringsystem wie es in Abbildung 10 für unterschiedliche Spiegelabstände  $\Delta x$  dargestellt ist. Die Interpretation dieses Musters ist besonders einfach, wenn wir uns nur auf das Zentrum, d.h.  $\alpha = 0$ , beschränken. Hierfür folgt aus (33):

$$\Delta|_{\alpha=0} = 2\Delta x - \frac{\lambda}{2}. \quad (34)$$

Für  $\Delta x = \lambda/2$  beträgt der Gangunterschied  $\lambda/2$ , so dass im Zentrum das Minimum 0-ter Ordnung liegt. Sind die Spiegel um  $\Delta x = 3\lambda/4$  verschoben, beträgt der Gangunterschied  $\lambda$ . Im Zentrum liegt dann das Maximum 1-ter Ordnung. Verändert man den Spiegelabstand kontinuierlich, so quillt bei jeder Wegänderung um  $\lambda/2$  eine neue Interferenzordnung aus dem Zentrum hervor und die niedrigeren Ordnungen bewegen sich radial nach außen.

Wird der kippbare Spiegel um einen kleinen Winkel geneigt, so geht das kreisförmige Interferenzmuster in ein Streifenmuster über (Interferenz gleicher

Dicke). Auch in diesem Fall führt eine Vergrößerung von  $\Delta x$  um  $\lambda/2$  dazu, dass eine neue Interferenzordnung entsteht. Wird der bewegliche Spiegel kontinuierlich verschoben, so wandern die Interferenzstreifen gleichmäßig in eine bestimmte Richtung.

Dieses Prinzip lässt sich zur Bestimmung der Wellenlänge der Lichtquelle verwenden. Der bewegliche Spiegel kann mit Hilfe eines Motors messbar verschoben werden. Wird der Spiegel um die Strecke  $\Delta x$  verschoben, so wandern  $\Delta m$  Interferenzstreifen an einer Markierung vorbei. Durch Messung von  $\Delta x$  und Zählung der dabei vorbeigelaufenen Interferenzstreifen  $\Delta m$  kann die Wellenlänge berechnet werden. Da jeder gezählte Streifen einer Änderung von  $\Delta x$  um  $\lambda/2$  entspricht, folgt für die Wellenlänge:

$$\lambda = 2 \frac{\Delta x}{\Delta m}. \quad (35)$$

Des Weiteren sollen Sie interferometrisch den Brechungsindex von Luft bestimmen. Dazu wird in einem Interferometerschenkel eine Glasküvette eingebaut. Der Luftdruck in der Küvette kann mit Hilfe einer Pumpe und einem Nadelventil variiert werden. Ändert sich der Druck in der Küvette, so ändert sich der Brechungsindex  $\Delta n$  und damit die optische Weglänge. Auf einem Schirm kann man dann wieder  $\Delta m$  Interferenzstreifen an einer Markierung vorbeilaufen sehen. Ist  $a$  die Länge der Küvette, so folgt für die Änderung des Gangunterschieds

$$\Delta = 2a\Delta n. \quad (36)$$

Die Zwei berücksichtigt, dass die Küvette von dem Lichtbündel zweimal durchlaufen wird. Mit  $\Delta = \lambda\Delta m$  folgt:

$$\Delta m = \frac{\Delta}{\lambda} = 2a \frac{\Delta n}{\lambda} \rightarrow \Delta n = \frac{\lambda}{2a} \Delta m. \quad (37)$$

Der Brechungsindex wird über den ganzen verfügbaren Bereich  $\Delta n = n(\text{Luft}) - n(\text{Vakuum}) = n - 1$  variiert, indem der Druck in der Küvette von  $p = 0$  bis  $p = b$  ( $b$ : Luftdruck) verändert wird und man dabei die am Marker vorbeilaufenden Interferenzstreifen  $\Delta m$  zählt. Dann ist

$$n(\lambda, T, b) - 1 = \frac{\lambda}{2a} \Delta m(b). \quad (38)$$

Mit dem Michelson-Interferometer lassen sich auch Interferenzen mit Lichtquellen beobachten, die eine sehr kleine Kohärenzlänge besitzen (z.B. Leuchtdiode,

Glühbirne). Voraussetzung dafür ist, dass der Gangunterschied in den beiden Interferometerarmen nicht größer ist als die Kohärenzlänge. Daher müssen zur Beobachtung dieser sogenannten „Weißlichtinterferenzen“ die Lichtwege in den beiden Schenkeln nahezu gleich groß sein. Diese Einstellung, bei der der bewegliche Spiegel so justiert ist, dass  $\Delta x \approx 0$  gilt, bezeichnet man als Weißlichtposition (Abbildung 9b).

## VI Durchführung des Versuchs

### Achtung:

**Optische Elemente wie Linsen und Spiegel sind äußerst empfindlich. Nicht benötigte Elemente in der Lochplatte aufbewahren. Die Oberflächen niemals mit den Fingern berühren. Nicht direkt in den Laser und die Leuchtdiode blicken. Schalten Sie diese aus falls sie nicht benötigt werden.**

### VI.1 Justierung des Interferometers

Der Aufbau des im Praktikum verwendeten Michelson-Interferometers ist in Abbildung 11 dargestellt. Der Aufbau entspricht im wesentlichen der Skizze in Abbildung 9a). Auf der rechten Seite können zwei verschiedene Lichtquellen (Laser oder Leuchtdiode) montiert werden. Das Licht trifft auf einen fest justierten Strahlteilerwürfel. Ein Teilstrahl wird nach links zum beweglichen Spiegel geleitet, der andere nach oben zu dem festen Spiegel. Die Interferenz der Teilstrahlen lassen sich auf einem Schirm beobachten und können zusätzlich mit einer Fotodiode elektronisch detektiert werden. Im oberen Schenkel auf Position 3 kann zur Messung des Brechungsindex von Luft noch eine evakuierbare Glasküvette eingesetzt werden. Die Position des beweglichen Endspiegels im linken Interferometerschenkel kann mit Hilfe eines Motors eingestellt werden. Die Bedienelemente der Motorsteuerung sind in Abbildung 11 unten dargestellt. Mit dem linken Wipptaster (VELOCITY) kann der Spiegel kontinuierlich verfahren werden. Wird der Taster nach vorne gedrückt, so bewegt sich der Spiegel in Richtung des Strahlteilers. Die beiden Taster (MOVE/JOG) rechts bewegen den Spiegel um eine feste Distanz. Der obere Taster verschiebt den Spiegel um 3 mm in Richtung des Strahlteilers, der untere Taster entsprechend 3 mm vom

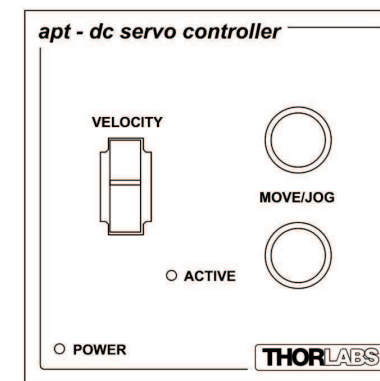
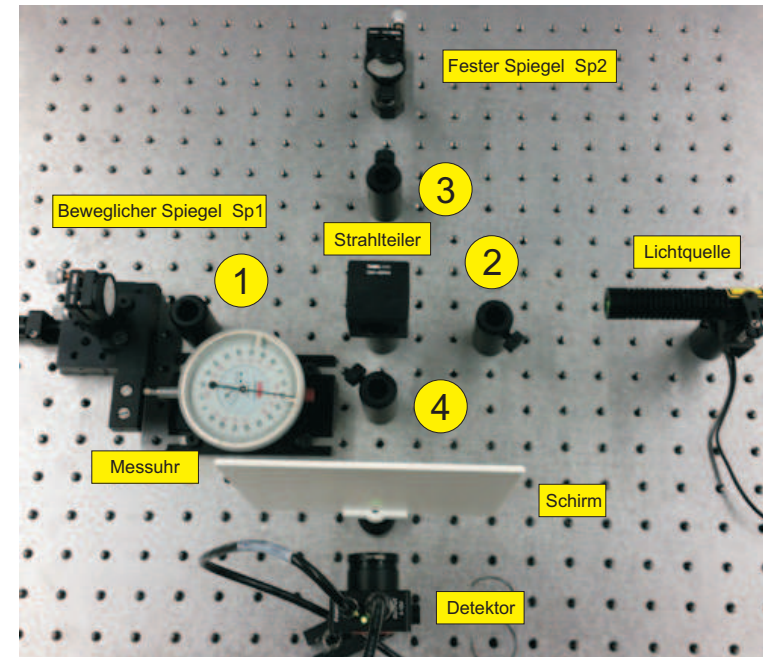


Abbildung 11: Oben: Aufbau des im Praktikum verwendeten Michelson-Interferometers. Unten: Bedienoberfläche der Motorsteuerung.

Strahlteiler weg. Die Position des Spiegels kann mit einer Messuhr gemessen werden.

Entfernen Sie die evakuierbare Küvette falls sich diese im Strahlengang befindet. Der bewegliche Spiegel sollte sich zunächst nicht im Bereich der Weißlichtposition befinden. Um dies sicherzustellen, verfahren Sie den Spiegel am einfachsten auf die Nullposition der Messuhr. Die Arbeitshöhe wird durch eine Irisblende festgelegt. Platzieren Sie diese in der Halterung 1 (Abbildung 11) und stellen Sie den Durchmesser der Öffnung auf etwa 0,5 mm ein. Platzieren Sie den grünen Diodenlaser in der Halterung ganz rechts und justieren Sie diesen so, dass er zentrisch auf die Irisblende trifft. Anschließend die Iris in den Halter bei Position 2 stecken. Blenden Sie den vertikalen Strahl aus, indem Sie den Schirm in den Halter bei Position 3 stecken. Justieren Sie den linken, beweglichen Spiegel so, dass der reflektierte Strahl zentrisch auf die Irisblende des Detektors trifft. Dazu befinden sich auf der Rückseite der Spiegelhalterung zwei Mikrometerschrauben mit denen Sie den reflektierten Strahl in horizontaler und vertikaler Richtung verschieben können. Die Mikrometerschrauben vorsichtig einstellen und auf keinen Fall überdrehen.

Analog verfahren Sie mit dem festen Spiegel. Blenden Sie den horizontalen Strahl aus (Schirm auf Position 1) und justieren Sie den festen Spiegel so, dass der Strahl zentrisch auf die Irisblende des Detektors trifft. Entfernen Sie danach die Irisblende aus dem Aufbau und stellen Sie den Schirm auf den Halter vor dem Detektor. Eventuell sehen Sie jetzt schon ein Interferenzmuster. Weiten Sie den Laser etwas auf. Montieren Sie dazu die -50 mm Linse in den Halter auf Position 4. Nun sollten Sie Interferenzen beobachten können. Falls die Streifen sehr eng beieinander liegen, können Sie diese durch vorsichtiges Nachjustieren einer der Spiegel auseinander schieben. Um ein Ringsystem beobachten zu können brauchen wir divergentes Licht. Platzieren Sie daher auf Position 2 die Linse +200 mm und richten Sie diese symmetrisch aus. Nun sollten Sie ein Ringsystem beobachten. Mit den Mikrometerschrauben an den Spiegeln können Sie das Interferenzmuster symmetrisch auf den Detektor ausrichten.

## VI.2 Messung der Wellenlänge

Verstellen Sie den festen Spiegel so, dass Sie etwa 2 bis 3 Interferenzringe auf dem Detektor beobachten. Die Öffnung der Irisblende am Detektor auf einen Durchmesser von etwa 1 mm einstellen (Abbildung 12 links). Schalten Sie das Oszilloskop ein. An Kanal 1 ist direkt das Detektorsignal angeschlossen. Dieses Signal wird zusätzlich auf den Eingang eines Diskriminators gegeben. Die Elek-

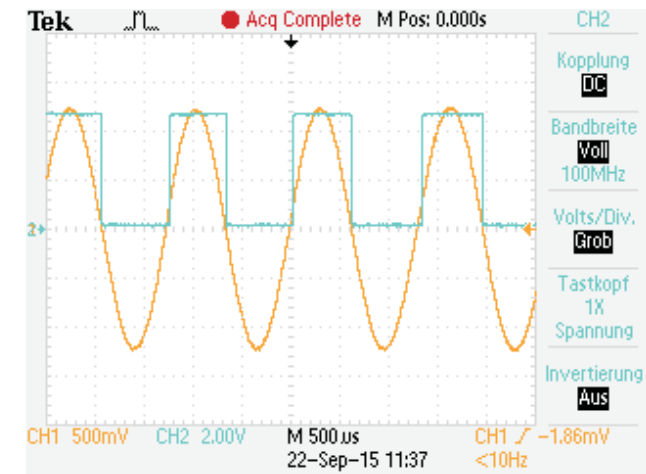


Abbildung 12: Links: Einstellung des Interferometers und des Detektors zur Messung der Wellenlänge. Rechts: Messung der Signale mit einem Oszilloskop.

tronik bewirkt, dass das Signal nochmals verstärkt wird und in ein Rechtecksignal umgewandelt wird (Abbildung 12 rechts). Jeder Impuls entspricht einem Interferenzmaximum. Die Maxima werden mit dem integrierten Zähler gezählt. Bei der Messung der Wellenlänge ist es wichtig, dass tatsächlich jeder Interferenzstreifen detektiert und gezählt wird. Verfahren Sie dazu mit dem Wipptaster der Motorsteuerung den beweglichen Spiegel und beobachten Sie das Oszilloskopbild. Bei jedem Maximum des Sinussignals muss der Diskriminator einen Rechteckpuls ausgeben. Falls dies nicht der Fall ist, können Sie folgendes optimieren:

- Variierung des Durchmessers der Irisblende am Detektor.
- Verstärkung des Detektors (Dreheschalter am Detektorgehäuse auf 60 dB bzw. 70 dB stellen).
- Verstärkung des Diskriminators.

Die Irisblende sollte nicht zu groß eingestellt werden, sonst mitteln Sie über das Interferenzmuster. In der Regel reicht es aus die Verstärkung am Diskriminator zu optimieren. Die Verstärkung sollte aber auch nicht zu groß gewählt

werden, sonst wird der Aufbau zu empfindlich und anfällig gegen kleinste Erschütterungen.

Machen Sie sich mit der Messuhr vertraut. Ein Teilstrich entspricht  $1 \mu\text{m}$ , eine volle Zeigerumdrehung  $0,2 \text{ mm}$ . Fahren Sie den Spiegel in Richtung Messuhr und stellen Sie die Position auf einen Startwert  $s_a$  z.B.  $s_a=0$ . Es ist völlig egal ob der Startwert 0 oder etwa 0,1 ist. Wichtig ist, dass Sie beim Einnehmen der Startposition nicht die Verfahrrichtung des Motors ändern. Falls Sie die Verfahrrichtung ändern zeigt die Messuhr solange nichts an, bis das Spiel der Getriebespindel ausgeglichen ist. Notieren Sie den Startwert  $s_a$ . Ab jetzt sind alle Erschütterungen zu vermeiden. Drücken Sie die Resettaste am Zähler und starten Sie den Motor indem Sie den rechten oberen Knopf am Motorcontroller vorsichtig drücken. Der Spiegel bewegt sich nun ca.  $3 \text{ mm}$  und die dabei durchlaufenden Interferenzmaxima werden vom Zähler registriert. Notieren Sie sobald der Spiegel angehalten hat sofort die gemessenen Impulse. Danach notieren Sie die Endposition  $s_e$  der Messuhr.

Diese Messung ist insgesamt fünfmal mit jeweils anderen Werten für  $s_0$  durchzuführen. Da die Messuhr maximal  $5 \text{ mm}$  aufnehmen kann, muss die Startposition kleiner als  $2 \text{ mm}$  sein. Für die Wellenlänge gilt dann

$$\lambda = 2 \frac{s_e - s_a}{m}, \quad (39)$$

wobei  $m$  die gezählten Impulse sind. Die Genauigkeit der Messuhr können Sie aus dem ausliegenden Datenblatt entnehmen.

### VI.3 Messung des Brechungsindex von Luft

Als Lichtquelle wird weiterhin der grüne Laser benutzt. Platzieren Sie vor dem Detektor den Schirm und vor dem festen Spiegel auf Position 3 die Küvette. Stellen Sie den festen Spiegel so ein, dass Sie auf dem Schirm 2-3 Interferenzringe sehen. Schließen Sie das Nadelventil indem Sie den Einstellknopf ganz nach rechts drehen. Schalten Sie die Vakuumpumpe ein und öffnen Sie den Absperrhebel solange, bis sich der Druck in der Küvette nicht mehr ändert. Danach den Absperrhebel wieder schließen und die Pumpe ausschalten. Mittels des Nadelventils lässt man in die evakuierte Gaszelle langsam Luft einströmen. Dabei quellen aus dem Zentrum neue Interferenzringe hervor. Lesen Sie nach je 5 Interferenzringen das Manometer ab ( $p_0, p_5, p_{10}, \dots$ ). Falls Sie allein arbeiten, müssen Sie bei der Ablesung des Manometerwertes das Nadelventil schließen und an-

schließend wieder öffnen. Führen Sie die Messung dreimal durch und notieren Sie die Zimmertemperatur.

### VI.4 Messung der Kohärenzlänge einer Leuchtdiode

Entfernen Sie die Küvette aus dem Strahlengang. Verfahren Sie den beweglichen Spiegel in den Bereich der Weißlichtposition. Der ungefähre Wert ist auf dem Interferometer angegeben. Stellen Sie den festen Spiegel so ein, dass Sie sehr große Interferenzstrukturen sehen, d.h. möglichst nur einen Ring. Anstatt des Lasers bauen Sie nun die Leuchtdiode ein. Entfernen Sie die  $-50 \text{ mm}$  Linse vor dem Detektor und richten Sie die Leuchtdiode so aus, dass Sie den Schatten des Strahlteilers zentrisch auf dem Detektor sehen. Die Öffnung der Irisblende am Detektor sollte etwa  $1-2 \text{ mm}$  sein. Die Verstärkung des Detektors auf das Maximum einstellen ( $70 \text{ dB}$ ).

Da die Kohärenzlänge der Leuchtdiode sehr klein ist, sind Interferenzen nur über einen sehr kleinen Verfahrweg beobachtbar. Um diese mit dem Oszilloskop darzustellen, muss das Oszilloskop im Single- Modus betrieben werden. In diesem Modus „wartet“ das Oszilloskop auf ein Signal einer gewissen Größe, welches Sie mit dem Triggerlevel einstellen können. Sobald ein Signal anliegt welches den Level übersteigt, beginnt das Oszilloskop mit der Aufzeichnung und speichert den Signalverlauf. Eine Anleitung zur Einstellung des Single- Modus liegt aus.

Stellen Sie die y-Ablenkung auf  $50 \text{ mV}$  und legen Sie den Triggerlevel gerade etwas über den Rauschpegel, so dass das Oszilloskop im Single- Modus nicht auslöst. Stellen Sie das Oszilloskop scharf und verfahren Sie den beweglichen Spiegel in Richtung Strahlteiler. Dazu den Wippschalter des Motorcontrollers ganz nach oben drücken und halten. Sobald Sie auf die Weißlichtposition kommen löst das Oszilloskop aus und speichert das Signal. Lassen Sie dann sofort den Wippschalter los und stellen Sie den Schirm vor den Detektor. Fahren Sie den Spiegel **sehr langsam** in die entgegengesetzte Richtung bis Interferenzen sichtbar werden.

Entfernen Sie den Schirm und wiederholen Sie die Messung mit optimierten Oszilloskopeinstellungen. Entfernen Sie sich etwa eine Umdrehung der Messuhr von der Weißlichtposition und fahren Sie dann mit maximaler Geschwindigkeit zurück durch die Weißlichtposition (Wippschalter ganz durchdrücken). Sie sollten ein Signalverlauf bekommen, wie in Abbildungen 6d) dargestellt. Speichern Sie den Signalverlauf auf einen USB- Stick. Anleitung dazu liegt aus.

## VII Auswertung

### zu 2.

Berechnen Sie die Wellenlänge des grünen Lasers unter Berücksichtigung des statistischen Fehlers (Messreihe) und des systematischen Fehlers (Messuhr). Vergleichen Sie diesen Wert mit den Herstellerangaben:  $\lambda = (532 \pm 1)$  nm.

### zu 3.

Berechnen Sie den Brechungsindex von Luft für Normalbedingungen. Ist  $n_0$  der Brechungsindex bei Normalbedingungen, dann gilt:

$$\frac{n_0 - 1}{n(p) - 1} = \frac{p_0 T}{p T_0}. \quad (40)$$

Mit Hilfe von Gleichung (38) folgt dann:

$$(n_0 - 1) = (n - 1) \frac{p_0 T}{p T_0} = \frac{\lambda}{2a} \frac{\Delta m}{p} \frac{p_0 T}{T_0}, \quad (41)$$

wobei  $T$  die Temperatur während der Messung ist und die mit 0 indizierte Größen sich auf Normalbedingungen beziehen ( $T_0=273,15$  K,  $p_0=101325$  Pa).

Tragen Sie in einem Diagramm  $\Delta m$  über den Druck  $p$  auf und bestimmen Sie Steigung  $\Delta m/p$ . Damit können Sie aus Gleichung (41)  $n_0$  bestimmen. Für die Wellenlänge setzen Sie entweder den Literaturwert ein oder den von Ihnen zuvor bestimmten Wert. Das Innenmaß der Küvette beträgt  $a = (50 \pm 0,05)$  mm.

Das Manometer besitzt eine Güteklasse von 0,6. Eine beliebige Ablesung kann um maximal 0,6% vom Skalenendwert (800 Torr) falsch sein, also um knapp 5 Torr. Dieser systematische Fehler der Absolutanzeige sollte sich bei Differenzmessungen zwar weitgehend herausheben, es muss jedoch damit gerechnet werden, dass auch die relative Teilungsgenauigkeit der Skala nicht viel besser als 0,6% ist (d.h. 1 Teilstrich 5 Torr  $\pm 0,6\%$ ). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert  $n_0=1,00028$  (trockene Luft bei Normatmosphäre nach *David R. Lide (Hrsg.): CRC Handbook of Chemistry and Physics. 90. Auflage*).

### zu 4.

Stellen Sie den gemessenen Signalverlauf grafisch da. Die vom Oszilloskop erzeugte Datei besitzt 18 Headerzeilen und besteht aus 6 Spalten, von denen sich aber nur in 2 Spalten Daten befinden (Zeit und Spannung).

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Zum Importieren verwenden wir die Numpy-Funktion `genfromtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname der Messung angeben. Benutzen Sie anstatt 'TEK0000.CSV' den Namen Ihrer Datei. Desweiteren werden die erste 18 Headerzeilen übersprungen.

```
data=np.genfromtxt('TEK0000.CSV',delimiter=",",skip_header=18)
print(data)
```

Das importierte Array sieht dann wie folgt aus:

```
[[ nan nan nan -0.1242 0.    nan]
 [ nan nan nan -0.1241 0.    nan]
 [ nan nan nan -0.1240 0.02  nan]
 ...,
 [ nan nan nan 0.1237 0.    nan]
 [ nan nan nan 0.1238 0.02  nan]
 [ nan nan nan 0.1239 0.    nan]]
```

Die Spalten mit den Einträgen *nan* (not a number) werden nicht benötigt. Wir benötigen nur die vierte (Zeit) und fünfte (gemessene Spannung) Spalten:

```
t=data[:,3:4] # 4. Spalte ausschneiden
t=t[:, 0]     # in 1D array wandeln
U=data[:,4:5] # 5. Spalte ausschneiden
U=U[:, 0]    # in 1D array wandeln
```

Diese Werte können wir nun grafisch darstellen:

```
plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t,U, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Interferogramm einer LED')
plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8]) # hier die Achsenbereiche
                                  # anpassen
plt.savefig('interferogramm_1.pdf',format='pdf')
```

In der Zeile `plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8])` müssen Sie die Achsenbereiche auf Ihre Werte anpassen. Das Diagramm sollte so ähnlich wie in Abbildung 13 aussehen.

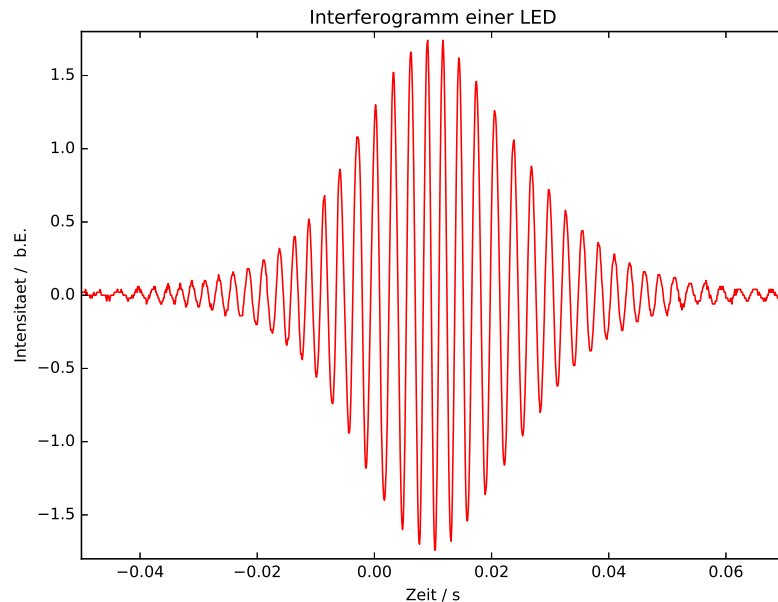


Abbildung 13: *Interferogramm einer grünen LED.*

Legen Sie eine Gaußkurve als Einhüllende an die Daten. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Methode 1: Sie zeichnen die Gaußkurve indem Sie die Parameter von Hand variieren.
- Methode 2: Sie bestimmen die Einhüllende und fitten eine Gaußkurve an.

Entscheiden Sie sich für eine dieser Methoden.

#### Methode 1:

```
a=0.062      # Flaeche Gauss
mu=0.011     # Lage des Maximums
sig=0.0148   # Sigabreite

def gauss(t):
    return a/np.sqrt(2*np.pi)/sig*np.exp(-(t-mu)**2/(2*sig**2))

plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(t,U, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Interferogramm einer LED')
plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8])
plt.plot(t,gauss(t), color='blue', linewidth=1)
plt.savefig('interferogramm_2.pdf',format='pdf')
```

Variieren Sie die Parameter  $a$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  bis die Gaußkurve als Einhüllende an den Daten liegt (Abbildung 14). Aus der Breite der Gaußverteilung ( $\sigma$  oder Halbwertsbreite) können Sie die Kohärenzlänge der Leuchtdiode abschätzen. Die Verfahrensgeschwindigkeit beträgt 0,1 mm/s.

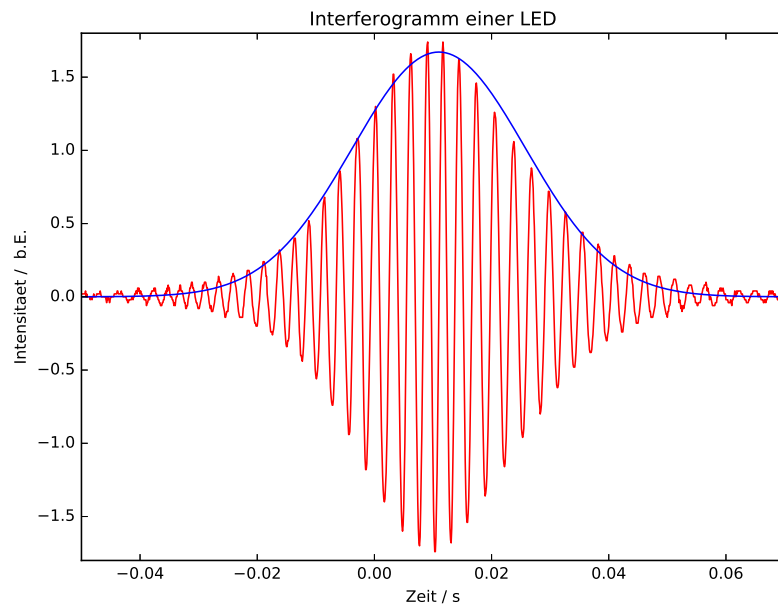
#### Methode 2:

Um die Einhüllende zu erhalten bestimmen wir die Maxima des Interferogramms. Dies geht z.B. mit der Funktion `find_peaks_cwt()`.

```
from scipy import signal
peakind = signal.find_peaks_cwt(U, np.arange(1,30),noise_perc=20)
```

Die gefunden Maxima befinden sich im Array `peakind`. Stellen Sie diese grafisch zusammen mit dem Interferogramm dar (Abbildung 15). Falls nicht alle Maxima gefunden wurden, variieren Sie den Wert von `noise_perc=20`.

```
plt.plot(t[peakind], U[peakind],marker='o',linewidth=0)
plt.plot(t,U, color='red', linewidth=1)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('Interferogramm einer LED')
plt.axis([-0.05, 0.07, -1.8, 1.8])
```

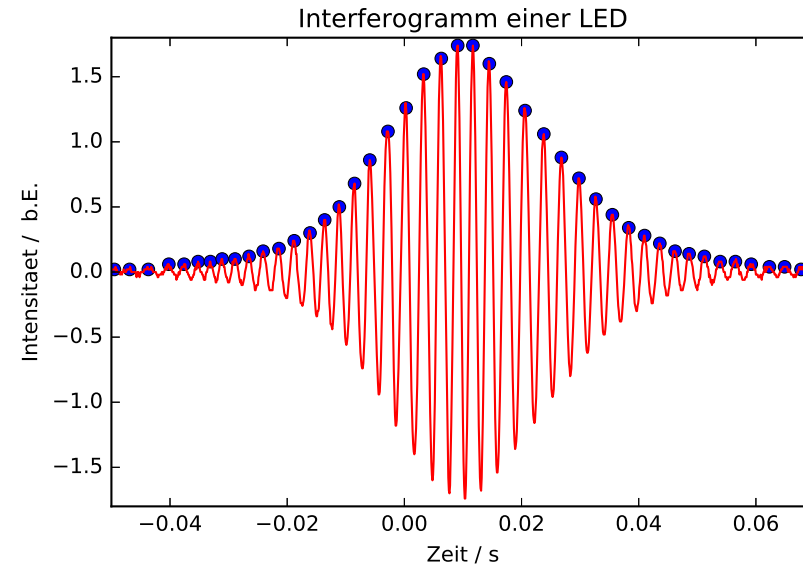
Abbildung 14: *Interferogramm mit Gaußkurve.*

An die gefundenen Maxima können wir nun eine Gaußkurve fitten.

```
#Fitfunktion Gauss
def fitFunc(t, a, mu, sig):
    return a/np.sqrt(2*np.pi)/sig*np.exp(-(t-mu)**2/(2*sig**2))

from scipy.optimize import curve_fit
popt, pcov= curve_fit(fitFunc, t[peakind], U[peakind])

x=np.linspace(-0.05,0.1,100) #x-Werte fuer die Fitfunktion
plt.plot(x, fitFunc(x, *popt))
plt.plot(t[peakind], U[peakind],marker='*', linewidth=0)
plt.xlabel('Zeit / s')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
```

Abbildung 15: *Interferogramm mit Maxima.*

```
plt.title('Interferogramm einer LED (Gau{\ss}fit)')
plt.axis([-0.05, 0.07, -0.1, 1.8])
print(*popt)
plt.savefig('interferogramm_3.pdf',format='pdf')
```

Die x-Werte die hier in der ersten Zeile generiert werden müssen Sie auf Ihren Bereich anpassen (linspace(start,ende,100 Werte)). Mit \*popt werden die Fitparameter automatisch in Ihre zuvor definierte Funktion entpackt. Das Ergebnis ist in Abbildung 16 dargestellt. Aus der Breite der Gaußverteilung ( $\sigma$  oder Halbwertsbreite) können Sie die wieder die Kohärenzlänge der Leuchtdiode abschätzen. Die Verfahrensgeschwindigkeit beträgt 0,1 mm/s.



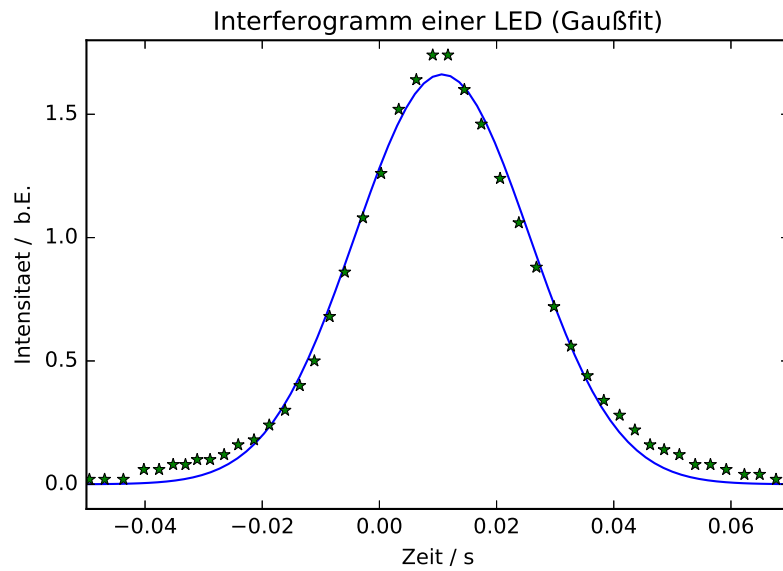


Abbildung 16: *Einhüllende des Interferogramm mit Gaußfit.*



## Versuch 233 Fourieroptik

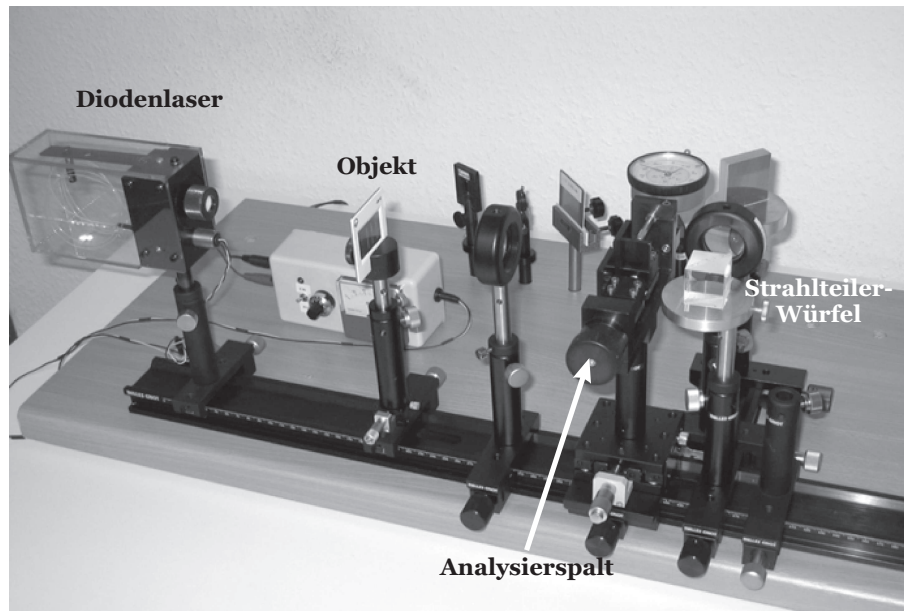


Abbildung 1: Versuchsaufbau: optische Bank.

### I Messaufbau

- Singlemode Glasfaser-gekoppelter Diodenlaser mit regelbarer Stromversorgung und Justieroptik für einen Parallelstrahl
- Ein Satz Beugungsobjekte: Spalte, Doppelspalt, Gitter, Kreuzgitter, Spalt mit gaussförmigem Transmissionsprofil
- Verschiedene sphärische und Zylinder-Linsen
- Strahlteiler

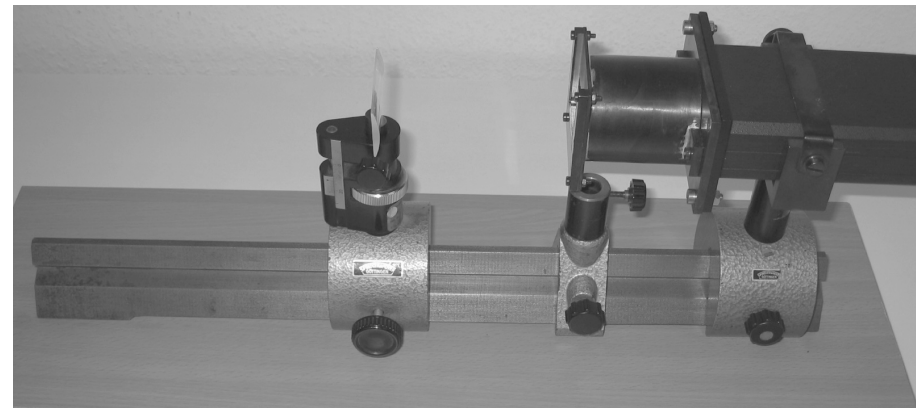


Abbildung 2: Versuchsaufbau: Zeilenkamera mit Zylinderlinse.

- Graufilter
- Spiegel
- Verschiedene Fest-Reiter
- Feinjustierbare Verschiebereiter
- Symmetrisch öffnender Analysierspalt
- Verschiedene schmale Metallstreifen als Modenblende
- SCCD-Zeilenkamera mit PC und Monitor zur Aufnahme von Beugungsbildern und „Objektbildern“, sowie Drucker

### II Literatur

- Hecht, „Optics“, Addison-Wesley Publishing Company
- Klein-Furtak, „Optik“, Springer Verlag
- Demtröder, „Experimentalphysik 2“, Springer Verlag
- Homepage des Praktikums  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Software.php>

### III Motivation

Der vorliegende Versuch soll zu einem vertieften Verständnis der Theorie der optischen Abbildung beitragen. Es wird dabei die Rolle der Beugung am Objekt, also des abzubildenden Gegenstandes, beim Zustandekommen des Objektbildes untersucht. Das Beugungsbild des Objektes entsteht zum ersten Mal in der Brennebene einer Linse, die hinter dem Objekt aufgestellt ist. Es heißt– aus Gründen, die im Lauf der Lektüre verständlich werden sollen– auch „Fourierbild“, die Brennebene, in der es entsteht, nennt man „Fourierebene“. Ernst Abbe, der Jenaer Physiker, der sich 1873 mit den Fragen der prinzipiellen Auflösung eines Mikroskopes befasste, nannte das Beugungsbild das „primäre Bild“ und das übliche Bild des Objektes das „sekundäre Bild“. In der Betrachtungsweise der Fourieroptik ist ein Bild, das von einer Linse entworfen wird, die Summe– das Integral– aller am Objekt gebeugten Teillichtbündel. Die Linse erfüllt dabei nur die Funktion, diese Teilbündel im Endlichen– der Bildebene– zusammenzuführen. Um zu untersuchen, welchen Beitrag die verschiedenen Beugungsordnungen zum entstehenden Bild liefern– also dessen Helligkeitsverteilung, Bildschärfe– erlaubt es der Aufbau, u.a. gezielt in der Fourierebene einzelne Beugungsordnungen auszublenden bzw. zuzulassen und am Bild zu verfolgen, wie sich dabei dessen Struktur ändert.

An dem formal besonders einfach zu behandelnden aber auch als Modell besonders wichtigen Objekt „Spalt“ wird zunächst die Intensitätsverteilung über die Spaltbreite bei Zulassung einer zunehmenden Zahl von Beugungsordnungen zum Spaltbild mit einer empfindlichen CCD-Zeilenkamera gemessen. Die jeweils beobachtbaren charakteristischen Bildstrukturen können mit den Ergebnissen einer theoretischen Analyse verglichen werden, in welcher das Bild aus den jeweils zur Abbildung zugelassenen Beugungsordnungen wieder mehr oder minder vollständig zusammengesetzt wird. Diese theoretische Analyse wird mit Hilfe von Python auf einem PC durchgeführt, wobei mit wenigen Programmzeilen Fourierintegrale bestimmt und damit errechnete Spaltbilder geplottet werden können. An dem etwas komplexeren aber immer noch mathematisch genau und einfach zu behandelnden Doppelspalt werden analoge Untersuchungen durchgeführt. Darüberhinaus wird an diesem Modellobjekt das Problem der Auflösung der Doppelstruktur experimentell sowie durch Simulationsrechnungen mit Python untersucht.

### IV Vorbereitung

Machen Sie sich vertraut mit den Themen der geometrischen Optik, der optischen Abbildung (Linsenformel, Abbildungsmaßstab), der Fraunhoferbeugung und den mathematischen Regeln der Fouriertransformation. Schauen Sie sich auch nochmals den Versuch „Optische Abbildung“ an, den Sie im Praktikum I durchgeführt haben.

### V Aufgaben

Ein einfacher optischer Aufbau mit wenigen Linsen, einem Strahlteiler sowie einem kleinen Diodenlaser als spektral schmale, intensive Parallellichtquelle ermöglicht es, simultan sowohl das Beugungsbild des Objektes (hier Spalte, Gitter, Kreuzgitter etc.) als auch das übliche Bild des Objektes selbst darzustellen. Durch Eingriffe in der „Fourierebene“– das ist die Ebene, in der die Beugungsstruktur erstmals auftritt– werden gezielt die Beiträge der einzelnen Beugungsordnungen zum Objektbild sichtbar gemacht und können quantitativ verfolgt werden.

Folgende Aufgaben sollen bearbeitet werden:

1. Aufbau der benötigten optischen Anordnung.
2. Registrierung und Ausmessung der Beugungsfigur eines Einfachspaltes mit einer CCD-Kamera.
3. Registrierung und Ausmessung des Spaltbildes mit der CCD-Kamera bei gezielten Manipulationen (Ausblenden/Zulassen verschiedener Beugungsmaxima) in der „Fourier-Ebene“ (Fouriersynthese).
4. Zu Aufgabe 2 und 3 analoge Untersuchungen an einem Doppelspalt. Aufsuchen von Beugungsfigur und Objektbild, zunächst mit dem Auge, dann mit der Kamera. Messungen zur Grenze der Auflösung der Doppelstruktur.
5. Quantitativer Vergleich der bei 2.) bis 4.) gemessenen Strukturen mit den theoretisch zu erwartenden Intensitätsprofilen. Simulation des Grenzfalles „Verschwinden der Doppelstruktur“ beim Doppelspalt mit Hilfe von Python und Vergleich mit dem Experiment.
6. Qualitative Beobachtung verschiedener Beugungsobjekte bei Manipulationen in der Fourierebene (Liniengitter, Kreuzgitter, beugungsfreier Spalt,...).

## VI Grundlagen

### Die „klassische“ Theorie der Beugung

Prinzipiell gibt es zwei Versuchsanordnungen, mit denen sich Beugungserscheinungen untersuchen lassen. Bei der Fresnelschen Beugung (Abbildung 3a), die den allgemeinen Fall der Beugung beschreibt, befinden sich die Lichtquelle und die Beobachtungsebene in einem endlichen Abstand zum beugenden Objekt. Diese Anordnung führt dazu, dass die im Punkt A interferierenden Lichtbündel unter verschiedenen Winkeln gebeugt werden. Die mathematische Behandlung dieser Beugungserscheinung ist daher äußerst kompliziert. Einfacher gestaltet sich der Fall, wenn nur parallele Lichtbündel vorhanden sind. Bei dieser sogenannten Fraunhoferschen Beugung (Abbildung 3b) befindet sich die Lichtquelle im Unendlichen, so dass das beugende Objekt von parallelem Licht beleuchtet wird. Da alle Lichtbündel parallel sind, interferieren diese im Unendlichen. Will man die Intensitätsverteilung in einem endlichen Abstand beobachten, so ist dies mit einer Sammellinse hinter dem beugenden Objekt möglich. Die Beugungsstrukturen lassen sich dann in der Brennebene der Linse beobachten (Denken Sie an die elementaren Linsengesetze: Parallelstrahlen werden zu Brennpunktstrahlen). Überlegen Sie sich, dass die Größe der Beugungsstruktur von der Brennweite der verwendeten Linse abhängt.

Wir wollen hier nur auf die Fraunhofersche Beugung eingehen und als Beispiel die Beugung an einem Spalt untersuchen.

Ein Spalt (Abbildung 4) wird von einem parallelen und monochromatischen Lichtstrahl der Wellenlänge  $\lambda$  beleuchtet. Wir können infolgedessen sagen, dass alle Punkte des Spaltes mit gleicher Amplitude  $E_0$  und Phase  $\varphi = \omega t$  erregt werden:

$$E(\text{Spalt}) = E(y) = E_0 e^{i\omega t} \tag{1}$$

Die Breite des Spaltes  $d$  werde in  $y$ -Richtung gemessen, der Nullpunkt liege in der Mitte des Spaltes. Zudem soll die Länge sehr groß gegenüber der Breite sein, so dass das einfallende Lichtbündel nur in einer Dimension begrenzt wird.

Gemäß dem Huygens-Fermat'schen Prinzip geht von jedem Punkt des Spaltes eine Elementarwelle aus, deren Überlagerung zu einer bestimmten Intensitätsverteilung im Unendlichen, bzw. in der Brennebene einer Linse, führt. Wir müssen dazu alle Teilbündel untersuchen, die parallel zueinander in einer bestimmten Richtung  $\alpha$  laufen. Mathematisch bedeutet dies die Aufintegration ebener Wellen aus den Quellpunkten des Spaltes:

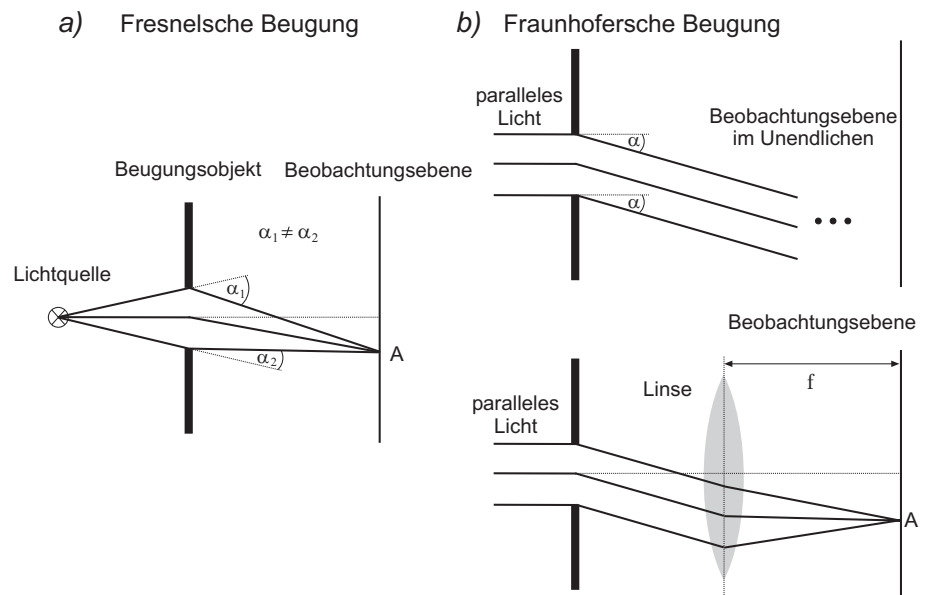


Abbildung 3: a) Fresnelsche Beugung. b) Fraunhofersche Beugung. Die Beobachtungsebene lässt sich mit Hilfe einer Linse aus dem Unendlichen auf einen endlichen Abstand verlegen.

$$E_\infty(\alpha) = \int_{-d/2}^{+d/2} E_0 e^{i(\omega t - kl)} dy. \tag{2}$$

Hierbei ist  $k = 2\pi/\lambda$  der Betrag des Wellenvektors. Aus Abbildung 4b ist zu erkennen, dass ein bei  $y$  ausgehendes Lichtbündel gegenüber einem vom Mittelpunkt des Spaltes ausgehenden Lichtbündel einen Gangunterschied von  $y \sin \alpha$  aufweist. Für die Weglänge  $l$  gilt dann:

$$l = R + y \sin \alpha. \tag{3}$$

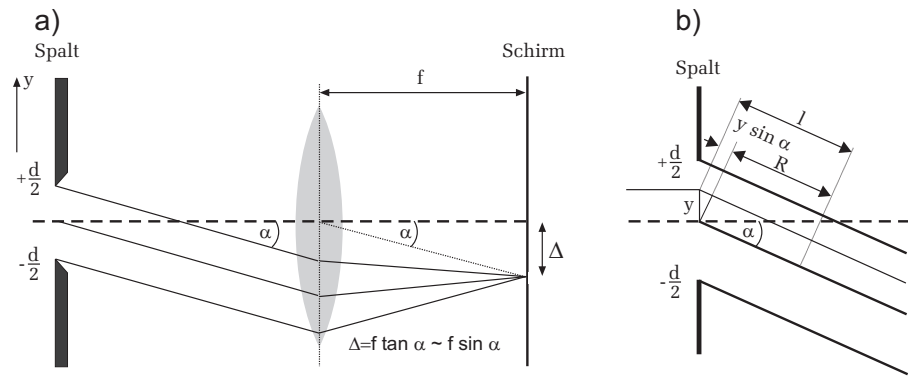


Abbildung 4: a) Fraunhofersche Beugung am Spalt. Das in Richtung  $\alpha$  gebeugte Parallellichtbündel wird auf einen Punkt in der Brennebene der Linse, im Abstand  $\Delta$  von der optischen Achse abgebildet. b) Detailansicht zur Ermittlung des Gangunterschiedes eines von  $y$  ausgehenden Lichtbündels.

Einsetzen dieses Ausdrucks in Gleichung (2) und Ausführen des Integrals ergibt:

$$E_{\infty}(\alpha) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{e^{-ik \sin \alpha d/2} - e^{ik \sin \alpha d/2}}{-ik \sin \alpha} \quad (4)$$

$$= E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin(\pi d \sin \alpha / \lambda)}{\pi \sin \alpha / \lambda}, \quad (5)$$

wobei wir die Beziehung

$$e^{\pm i\delta} = \cos \delta \pm i \sin \delta$$

benutzt haben. Setzen wir zur Abkürzung

$$x = \frac{d}{\lambda} \pi \sin \alpha \quad (7)$$

so erhalten wir

$$E_{\infty}(x) = E_0 e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin x}{x} \quad (8)$$

Zur Bestimmung der Intensität muss Gleichung (8) noch quadriert werden:

$$I_{\infty}(x) \propto \frac{\sin^2 x}{x^2} d^2 \propto I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad (9)$$

wobei  $I_0 \propto d^2$  ist.

Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 5 dargestellt.

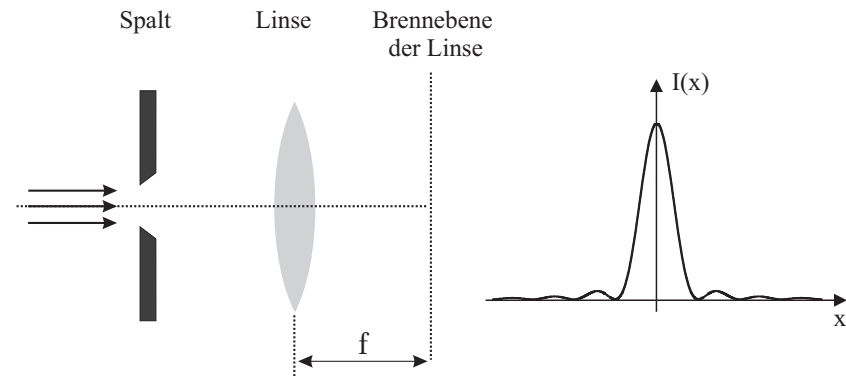


Abbildung 5: Intensitätsverteilung  $I(x) = I_0 \sin^2(x)/x^2$  der Beugungsstruktur eines Spalts in der Brennebene der Linse (Fourier- Ebene).

### Exkurs: Fourierreihen und Fourierintegrale

Aus der linearen Algebra ist Ihnen bekannt, dass ein Vektor durch eine Linearkombination von Basisvektoren dargestellt werden kann. Ähnliches ist Ihnen sicherlich auch schon in der Analysis begegnet. Auch hier gibt es Basissysteme, in denen sich Funktionen durch Linearkombination von „Basisfunktionen“ darstellen lassen. Am bekanntesten ist wohl die Taylorreihe. Dabei handelt es sich um eine Potenzreihe, die eine Funktion  $f(x)$  um einen bestimmten  $x$ -Wert approximiert. Die Basisfunktionen sind in diesem Fall die Potenzfunktionen  $x^n$ .

Ein weiteres Basissystem stellen die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus dar. Nach dem Fourier-Theorem lassen sich **periodische Funktionen** durch eine Linearkombination dieser trigonometrischen Basisfunktionen in einer Fourierreihe entwickeln. Man bezeichnet dies als Fourierzerlegung, Fourieranalyse oder auch als harmonische Analyse.

Sei  $f(x)$  eine periodische Funktion mit der Periode  $L$ , d.h.  $f(x + L) = f(x)$ . Für

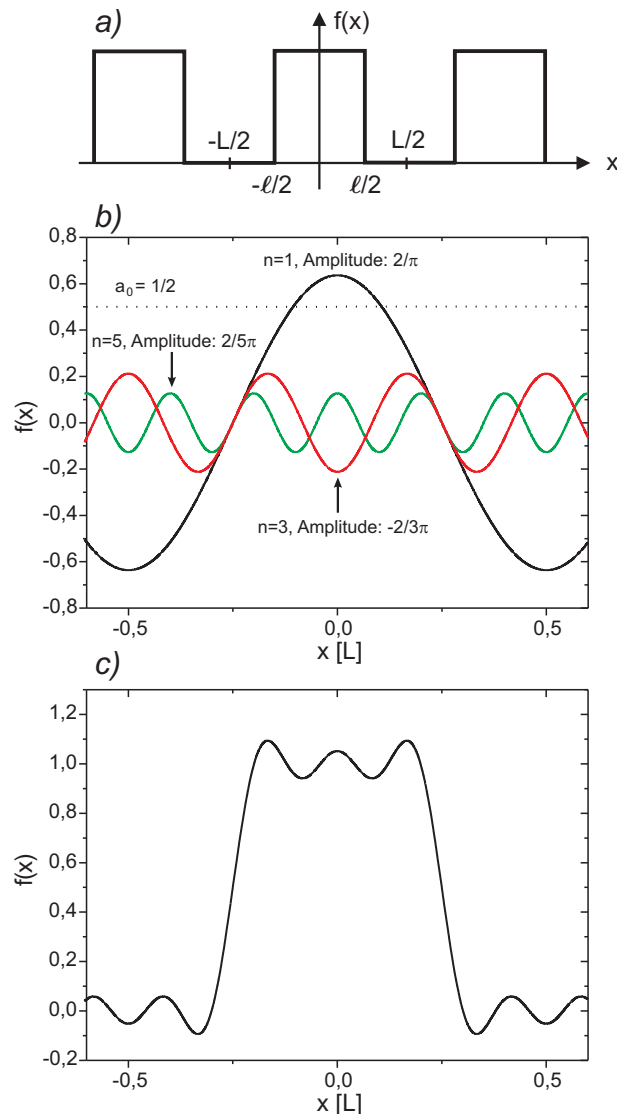


Abbildung 6: a): Rechteckfunktion mit der Periode  $L$ . b): Gleichanteil  $a_0/2$ , sowie die ersten drei Fourierterme. c): Summe aus Gleichanteil und den ersten drei Gliedern.

die Fourierdarstellung dieser Funktion gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \quad (10)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx \quad (11)$$

und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx. \quad (12)$$

Wir wollen hier nicht auf die Herleitung dieser Gleichungen eingehen, sondern deren Aussagen an einem konkreten Beispiel diskutieren. Betrachten wir dazu eine Rechteckfunktion mit der Periode  $L$ , wie sie in Abbildung 6 a) dargestellt ist. Die Funktion  $f(x)$  ist definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -l/2 < x < l/2 \\ 0, & l/2 > |x| < L/2. \end{cases} \quad (13)$$

Um diese Funktion in einer Fourierreihe gemäß Gleichung (10) darzustellen, müssen wir die Fourierkoeffizienten berechnen. Da die Rechteckfunktion gerade ist, d.h.  $f(x) = f(-x)$ , verschwinden, wie Sie leicht nachrechnen können, alle Koeffizienten  $b_n$ . Wir müssen daher nur die Koeffizienten  $a_n$  bestimmen. Für  $a_0$  berechnen wir:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} dx = \frac{2l}{L}. \quad (14)$$

Für die restlichen Koeffizienten  $a_n$  gilt:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-l/2}^{l/2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) dx = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{2}{\pi n} \sin\left(\pi n \frac{l}{L}\right) \quad (15)$$

Betrachten wir als konkretes Beispiel eine Rechteckfunktion mit einem Tastverhältnis von  $L : l = 2 : 1$  (Abbildung 6 a). Aus Gleichung (10) und den oben berechneten Koeffizienten folgt dann für die Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) - \frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{6\pi}{L} x\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(\frac{10\pi}{L} x\right) - \dots \quad (16)$$

In Abbildung 6 b) sind die ersten drei Glieder der Fourierreihe sowie der Gleichanteil  $a_0/2$  grafisch dargestellt, darunter im Teilbild 6 c) die Summe dieser Terme. Zusätzlich zeigt Abbildung 7 noch die Fourierreihen bis hin zu  $n = 27$ . Je mehr Summanden (Ordnungen) in der Fourierreihe „mitgenommen“ werden, desto genauer nähert sich die Reihe der Rechteckfunktion an.

Die Fourieranalyse ist von außerordentlicher Bedeutung in vielen Bereichen der Physik. Ein anschauliches Beispiel findet sich für Funktionen, die ein zeitperiodisches Signal beschreiben, z.B. einen akustischen Ton oder ein elektrisches Signal. Ersetzen wir in Gleichung (10) die Variable  $x$  durch die Zeit  $t$  und wählen für die Periode  $L$ , die Periodendauer  $T$ , wobei gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (17)$$

so ergibt sich für die Fourierreihe einer periodischen, zeitabhängigen Funktion:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (18)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen mit unterschiedlichen **Frequenzen** und **Amplituden** dar. Die Fourieranalyse gibt somit Auskunft über das Frequenzspektrum, aus dem sich ein zeitperiodisches Signal zusammensetzt. In Abbildung 8 ist das Spektrum eines zeitperiodischen Rechtecksignals dargestellt. Entlang der Abszisse ist die Frequenz aufgetragen. Die jeweiligen Amplituden entsprechen den Koeffizienten  $a_n$ .

Das Spektrum eines periodischen Signals ist stets diskret. Neben der Grundfrequenz  $\omega$  (Grundton) treten auch Vielfache  $n\omega$  auf, die als Obertöne oder  $n$ -te Harmonische bezeichnet werden.

In einer Fourierreihe lassen sich **nur** periodische Funktionen entwickeln. Aber auch nichtperiodische Funktionen lassen sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen darstellen. Eine nichtperiodische Funktion erhält man aus einer periodischen Funktion für den Grenzfall, dass die Periode gegen unendlich geht. In Abbildung 9 ist dies für einen Rechteckpuls, der sich aus einer periodischen Rechteckfunktion ableiten lässt, dargestellt. Bild a) zeigt das Spektrum bei einem Tastverhältnis von  $L : l = 2 : 1$ . Vergrößert man die Periode  $L$  bei gleich bleibender Pulsbreite  $l$ , so treten im Spektrum zusätzliche Moden auf. Die Teilbilder b) und c) zeigen dies für ein Tastverhältnis von  $4 : 1$  bzw.  $8 : 1$ .

Für den Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  geht die Anzahl der Moden gegen unendlich und sind unendlich dicht gepackt (Abbildung 9 d). Es ist einleuchtend, dass in diesem

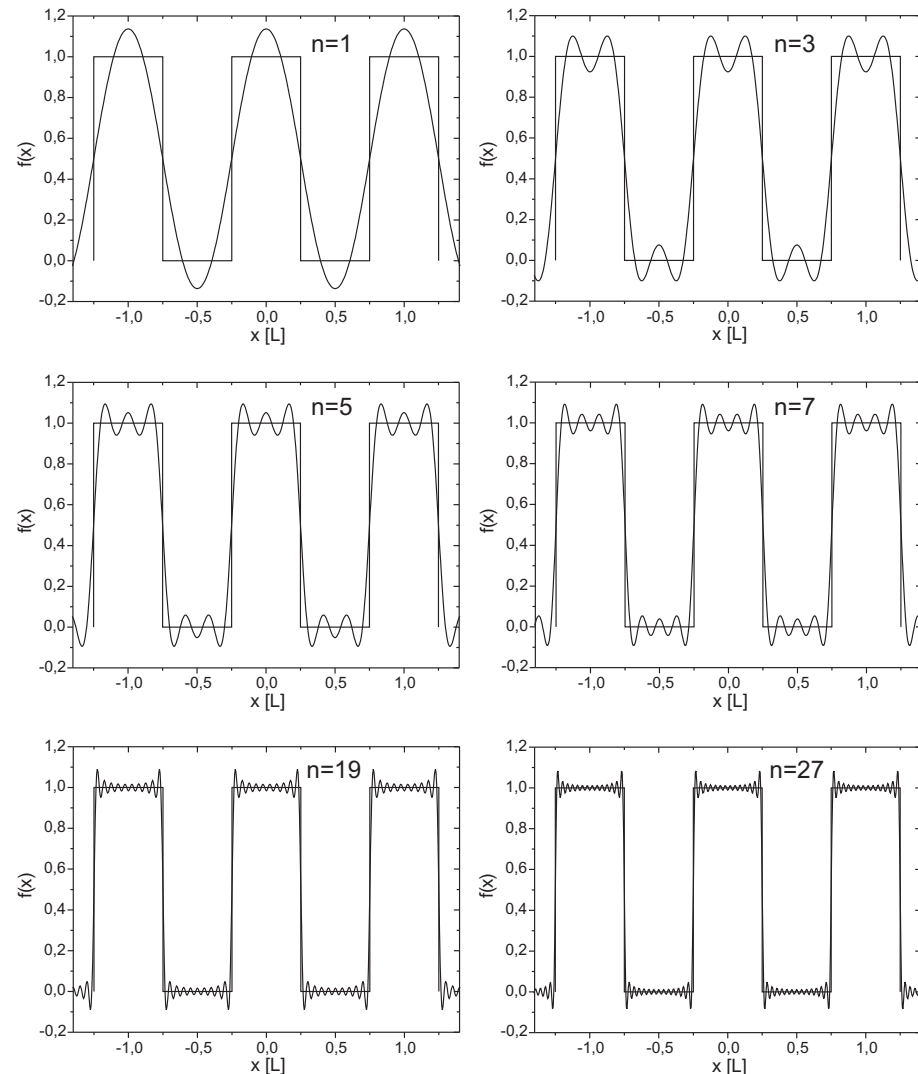


Abbildung 7: Fourierentwicklung eines Rechtecksignals.



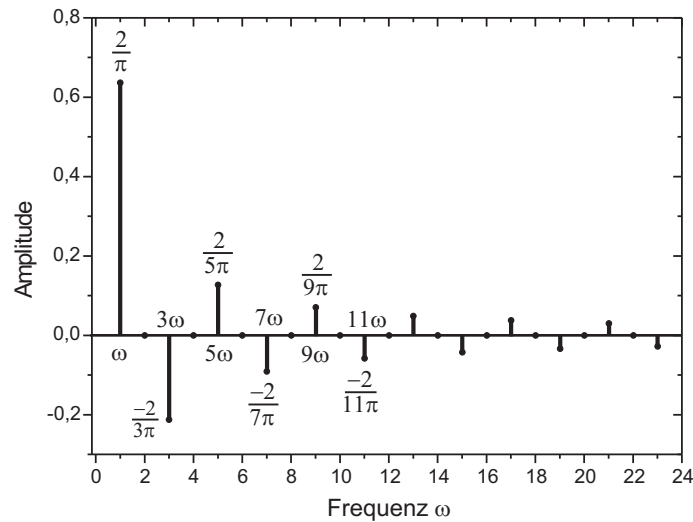


Abbildung 8: *Frequenzspektrum eines Rechtecksignals. Bei den ersten sechs Moden sind die Frequenzen und Amplituden mit angegeben.*

Fall die Fourierreihe in ein Integral übergeht und die Fourierkoeffizienten nicht mehr diskret sind, sondern durch eine kontinuierliche Funktion beschrieben werden. Dies führt zur sogenannten Fouriertransformation eines nichtperiodischen Signals.

Die kontinuierliche Fouriertransformation<sup>1</sup> ist definiert durch:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (19)$$

Wegen

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx) \quad (20)$$

stellt auch die Fouriertransformation die Entwicklung einer Funktion nach trigonometrischen Funktionen dar.  $F(k)$  heißt **Fouriertransformierte** der Funktion  $f(x)$ .

<sup>1</sup>In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen der Fouriertransformation, die sich durch einen Normierungsfaktor unterscheiden.

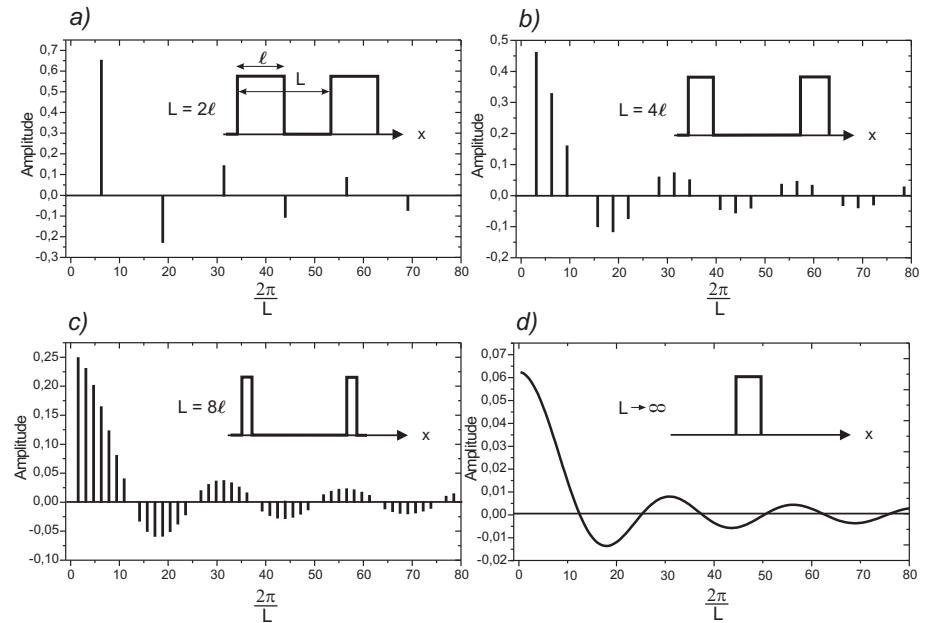


Abbildung 9: *Verdeutlichung des Übergang zur Fouriertransformation einer nichtperiodischen Funktion.*

Für die Rücktransformation gilt:

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (21)$$

Handelt es sich bei  $f(t)$  um eine Funktion, die von der Zeit abhängt, so stellt die Fouriertransformierte  $F(\omega)$  (wir schreiben nun  $\omega$  anstatt  $k$ ) das kontinuierliche Frequenzspektrum dieser Funktion dar. Für den Fall, dass  $x$  eine Ortsvariable ist, schreiben wir für die Fouriertransformierte  $F(k)$  und bezeichnen  $k$  als Raumfrequenz (Ortsfrequenz). Wir werden im nächsten Abschnitt ausführlich darauf eingehen.

### VI.1 Herleitung der Fourierdarstellung der Fraunhoferschen Beugung

Wir wollen im Folgenden das Thema der Fraunhoferschen Beugung in etwas allgemeinerer Gestalt formulieren, um den Übergang zu der hier interessierenden Beschreibung mit Hilfe der Fouriertheorie vorzubereiten.

Wir betrachten nach Abbildung 10 eine Öffnung  $S$  von willkürlicher Gestalt in der  $yz$ -Ebene, die mit monochromatischem Licht bestrahlt werde und wollen die elektrische Feldstärke im Aufpunkt  $P$  bestimmen.

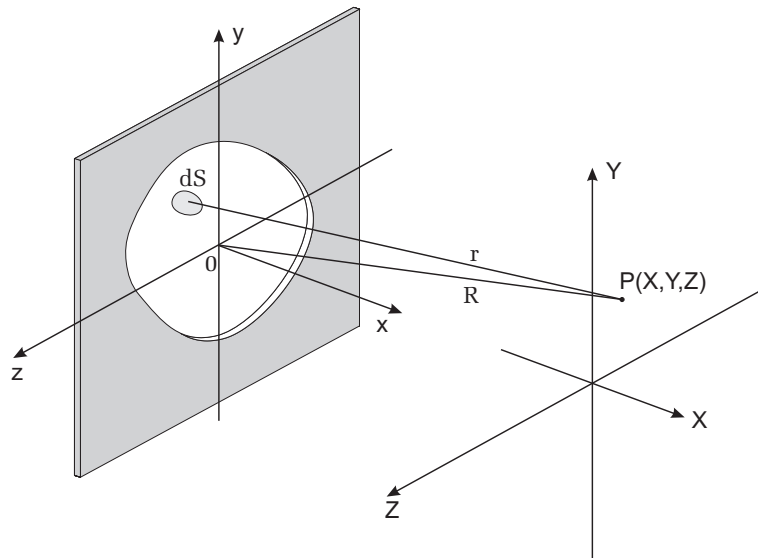


Abbildung 10: Zur Geometrie bei der Beugung an einer beliebigen Öffnung.

Dazu greifen wir ein differentielles Flächenelement  $dS(x = 0, y, z)$  heraus und betrachten eine davon ausgehende Kugelwelle (Elementarwelle)  $e^{ikr}/r$ . Mit  $\epsilon$  als Quellstärke pro Einheitsfläche, die zunächst als konstant über der Fläche  $S$  angenommen wird, ist die elektrische Feldstärke am Ort  $P$  durch

$$dE = \epsilon \frac{e^{ikr}}{r} dS \tag{22}$$

gegeben.

Für den Abstand von  $dS$  zu  $P(X, Y, Z)$  erhalten wir

$$r = \sqrt{[X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]}. \tag{23}$$

Wenn die beugende Öffnung klein gegenüber dem Abstand  $OP$  ist, so kann man im Amplitudenterm  $\epsilon_A/r$  statt  $r$  den Abstand  $OP=R$  verwenden. Diese Näherung für  $r$  darf im Phasenterm hingegen nicht ohne weiteres angewendet werden, da  $kr = (2\pi/\lambda)r$  eine große Zahl darstellt. (Sie entspricht dem Abstand  $OP$  in Wellenlängen ausgedrückt). Mit Hilfe von

$$R = \sqrt{[X^2 + Y^2 + Z^2]} \tag{24}$$

erhalten wir durch Einsetzen in Gleichung (23) und einigen Umformungen:

$$r = R\sqrt{[1 + (y^2 + z^2)/R^2 - 2(Yy + Zz)/R^2]}. \tag{25}$$

Im Fernfeld ist  $R$  groß gegenüber den Dimensionen der Öffnung, so dass der Term

$$(y^2 + z^2)/R^2 \ll 1 \tag{26}$$

vernachlässigbar wird. Es verbleibt:

$$r = R\sqrt{[1 - 2(Yy + Zz)/R^2]}. \tag{27}$$

Auch der Ausdruck in der eckigen Klammer kann mit Hilfe der Relation

$$\sqrt{1 - \xi} = 1 - \xi/2. \tag{28}$$

für  $\xi \ll 1$  vereinfacht werden:

$$r = R[1 - (Yy + Zz)/R^2]. \tag{29}$$

Setzen wir nun diese Näherung für  $r$  in den Phasenterm in Gleichung (22) ein und integrieren über die gesamte Öffnung  $S$ , so erhalten wir für die elektrische Feldstärke am Ort  $P$ :

$$E(R) = \epsilon \frac{e^{ikR}}{R} \iint e^{-\frac{ik}{R}(Yy + Zz)} dy dz. \tag{30}$$

Beschränken wir nun unsere Betrachtung auf einen kleinen Bereich um  $R$ . Wir können dann davon ausgehen, dass der Term  $e^{ikR}/R$  vor dem Integral eine Konstante darstellt. Auch  $\epsilon$  wurde bisher als konstant angesehen. Das entspricht aber nicht dem allgemeinen Fall! Denken Sie an eine Öffnung, die z.B. von einem etwas schmutzigen und zusätzlich nicht sehr gleichmäßig dickem Glas überdeckt wird. Die daraus resultierende „Inhomogenität der Transmission“ führt dazu, dass das elektrische Feld sowohl vom Betrag als auch von der Phase vom Ort  $(y, z)$  abhängen wird. Wir berücksichtigen dies, in dem wir eine explizite Orts- und Phasenabhängigkeit der Quellstärke  $\epsilon$  einführen:

$$\epsilon(y, z) = A(y, z) = A_0(y, z)e^{i\varphi(y, z)}. \tag{31}$$

$A(y, z)$  wird in der Literatur auch als Öffnungsfunktion (engl. aperture function) bezeichnet.  $A(y, z)dydz$  ist dann proportional zu dem Feld der vom Flächenelement  $dydz$  ausgehenden Welle. Entsprechend können wir dann das elektrische Feld im Aufpunkt  $(X, Y, Z)$  als Integral über die gesamte emittierende Öffnung  $S$  darstellen als

$$E(Y, Z) = \iint_S A(y, z)e^{-\frac{ik}{R}(Yy+Zz)} dy dz. \tag{32}$$

wobei der Vorfaktor  $e^{ikR}/R$  wie oben erwähnt als Konstante und damit unwesentlich für das Folgende weggelassen wird.

Das Differential

$$dE(Y, Z) = A(y, z)e^{-\frac{ik}{R}(Yy+Zz)} dy dz \tag{33}$$

stellt den Beitrag der vom Flächenelement  $dydz$  ausgehenden ebenen Welle zum elektrischen Feld am Ort  $P$  dar, die sich in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  ausbreitet. Wir definieren die *Raumfrequenzen* (Abbildung 11):

$$k_y = k \frac{Y}{R} = k \sin \phi \tag{34}$$

$$k_z = k \frac{Z}{R} = k \sin \theta. \tag{35}$$

Es ist für das Verständnis nützlich, anzumerken, dass im Photonenbild die hier eingeführten „Raumfrequenzen“ bis auf den Faktor  $\hbar$  den durch die Beugung erzeugten Transversalimpulsen

$$p_y = \hbar k_y \tag{36}$$

$$p_z = \hbar k_z \tag{37}$$

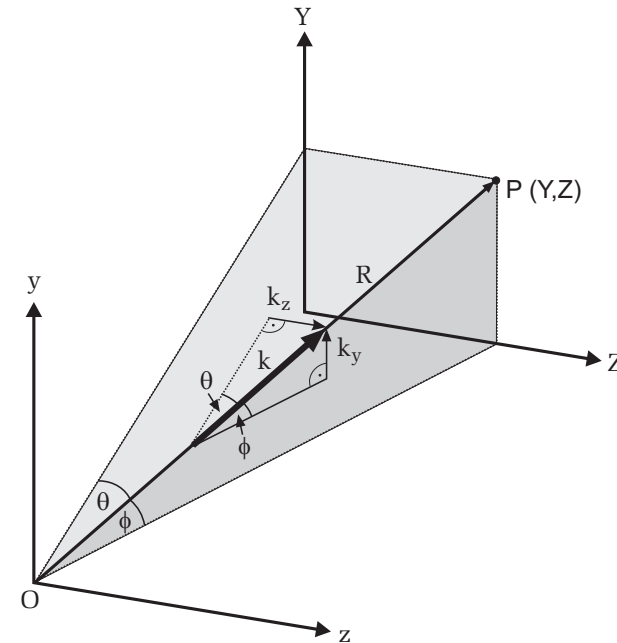


Abbildung 11: Erläuterung zur Definition der Raumfrequenzen  $k_y, k_z$ .

der Photonen entsprechen! Besitzen die Photonen ursprünglich nur einen Impuls in  $x$ -Richtung, so erhalten Sie bei Durchgang durch die Öffnung eine zusätzliche transversale Komponente in  $y$ - und  $z$ -Richtung!

Jedem Punkt  $(Y, Z)$  in der Bildebene wird also eine Raumfrequenz zugeordnet. Gleichung (32) lässt sich dann umschreiben gemäß

$$E(k_y, k_z) = \iint_S A(y, z)e^{-i(k_y y + k_z z)} dy dz. \tag{38}$$

Dieser Ausdruck stellt nichts anderes dar, als die zweidimensionale Fouriertransformation (vergleiche Gleichung (21)) der Öffnungsfunktion  $A(y, z)$ . Damit lässt sich das wichtige Ergebnis dieser Analyse wie folgt formulieren:

**Die Feldverteilung der Beugungsstruktur bei der Fraunhofer-schen Beugung an einer Öffnung ist die Fouriertransformierte der Feldverteilung über die beugende Öffnung.**

Zur Vertiefung dieser Aussage werden wir in den nächsten Kapiteln zwei Spezialfälle, nämlich die Beugung am Spalt und am Doppelspalt, detailliert untersuchen.

### Das Beugungsbild des Spaltes als Fouriertransformierte der Spaltöffnung

Wir wollen im Folgenden diese Betrachtungsweise anwenden, um die Beugung am Spalt nunmehr im Rahmen der Fouriertheorie zu behandeln.

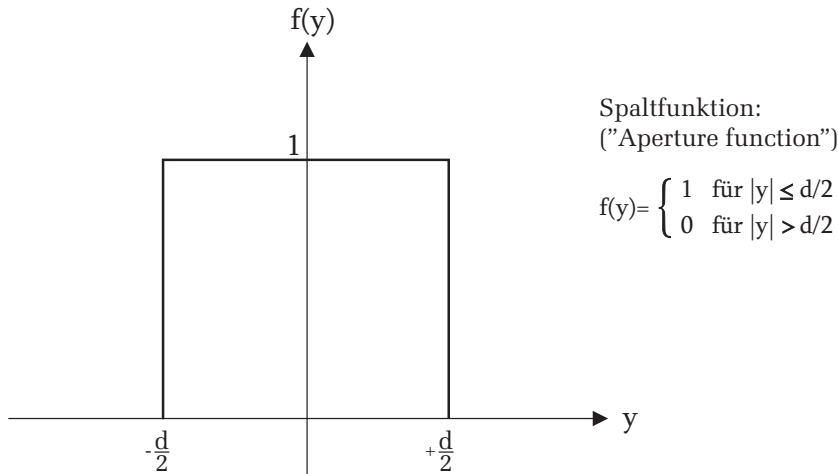


Abbildung 12: Spaltfunktion eines einfachen Spaltes.

Ein Spalt wird durch folgende Spaltfunktion (aperture function, hier eindimensional:  $A(y, z) \rightarrow f(y), E(k_y, k_z) \rightarrow F(k_y)$ ) beschrieben (Abbildung 12):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |y| \leq d/2 \\ 0, & |y| > d/2. \end{cases} \quad (39)$$

Die Fouriertransformierte (wir schreiben nun  $F$  statt  $E$ , um den Aspekt zu betonen, dass das elektrische Feld der Beugungsfigur nun einfach als Fouriertransformierte berechnet werden kann) ergibt sich zu:

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \quad (40)$$

Einsetzen obiger Spaltfunktion ergibt:

$$F(k_y) = \int_{-d/2}^{d/2} e^{-ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y y} \Big|_{-d/2}^{d/2} = \frac{1}{ik_y} \left( e^{ik_y d/2} - e^{-ik_y d/2} \right). \quad (41)$$

Unter Berücksichtigung der Eulerschen Formel

$$e^{\pm i\delta} = \cos \delta \pm i \sin \delta, \quad (42)$$

erhalten wir

$$F(k_y) = d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \equiv \text{sinc}(k_y d/2) d \quad (43)$$

mit den Nullstellen

$$k_y = 2\pi n/d. \quad (44)$$

Gemäß dem Fouriertheorem erhält man mit dieser Funktion rückwärts wieder die Spaltfunktion durch Bildung des Integrals (Fouriersynthese):

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_y) e^{ik_y y} dk_y. \quad (45)$$

Einsetzen des von oben berechneten  $F(k_y)$  und Verwendung der Symmetrie der Funktion bezüglich des Vorzeichens ( $F(k_y) = F(-k_y)$ ) führt zu

$$f(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \right] \cos(k_y y) dk_y. \quad (46)$$

Dieses Integral ist analytisch nicht lösbar, so dass eine numerische Integration notwendig wird. Mit der oberen Grenze  $+\infty$  führt dies Integral wieder zurück

zur Spaltfunktion, d.h. zu dem unverfälschten rechteckigen Spaltbild. Es stellt sich die Frage, wie anhand der Formel  $F(k_y)$  für die Fouriertransformierte der Spaltfunktion die gesuchte Beugungsstruktur, also Intensität in Richtung  $\alpha$ , abgelesen werden kann. Dazu muss man sich lediglich vergegenwärtigen, dass ja über  $k_y = k_0 \sin \alpha$  unmittelbar die gewünschte Winkelabhängigkeit der Beugungsstruktur sichtbar wird.

Will man nun untersuchen, wie die - nun rudimentäre- Spaltfunktion aussieht, wenn man gezielt nur eine kleinere Zahl von gebeugten Teilstrahlen durch Ausblenden in der Fourierebene zur Abbildung zulässt (unser Experiment), so ist als obere Integrationsgrenze nun offenbar der  $k_y$ -Wert zu wählen, der gerade noch zur Abbildung zugelassen wird (Abbildung 13).

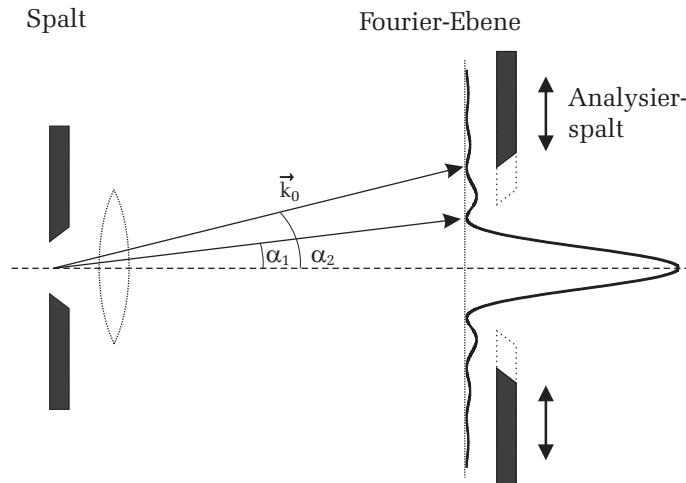


Abbildung 13: Manipulation der Beugungsstruktur durch Ausblenden von Beugungsordnungen mit Hilfe eines Analyserspaltes.

Die obere Integrationsgrenze sei die  $n$ -te Nullstelle von  $F(k_y)$ :

$$k_{y,n} = k_0 \sin \alpha_n = k_0 n \lambda / d = 2n\pi / d \tag{47}$$

Für das Fourierintegral folgt damit dann:

$$f_{\text{modifiziert}}(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} [\sin(k_y d/2) / (k_y d/2)] \cos(k_y y) dk_y \tag{48}$$

Damit kann obiges Integral für unterschiedliche  $k_y$ -Werte an z.B. jeweils 200 Stellen von  $y$  zwischen  $y_i = -d$  bis  $+d$ , also 100 Punkte pro Spaltbreite, berechnet werden. Um die Berechnungen mit den beobachteten Spaltbildern vergleichen zu können, müssen die Ergebnisse noch quadriert werden<sup>2</sup>. Das Ergebnis können Sie ausdrucken und den beobachteten Strukturen gegenüberstellen. Die nachfolgende Bilderserie (Abbildung 14) zeigt Ihnen, was Sie erwarten sollten, wenn Sie, jeweils von links nach rechts gezählt, nur das zentrale Hauptmaximum bzw. die Beugungsordnungen bis zum 1./2./6./10./14. Nebenmaximum zur Abbildung des Spaltes verwenden.

### Die Fouriertransformierte des Doppelspaltes

Mit den oben gewonnenen Ergebnissen zur Fouriertransformation des Einfachspaltes bzw. zur Rücktransformation (Fouriersynthese) gelangt man in einfacher Weise zu den entsprechenden Ausdrücken für den Doppelspalt.

Die Öffnungsfunktion  $f(y)$  ist in Abbildung 15 dargestellt. Die zugehörige Fouriertransformierte hat wieder die Gestalt

$$F(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ik_y y} dy \tag{49}$$

wobei Beiträge nur von den Integrationswegen  $1 \rightarrow 2$  sowie  $3 \rightarrow 4$  herrühren können. Berechnen wir obiges Integral zunächst über den nach rechts verschobenen Einzelspalt. Aus der Abbildung erhält man:

$$F(k_y, \text{rechts}) = \int_3^4 f(y) e^{ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y y} \Big|_3^4 = e^{-ik_y g/2} d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)}, \tag{50}$$

wobei  $g$  den Spaltabstand beschreibt. Entsprechend ergibt sich für den nach

<sup>2</sup>Berechnet wird die Feldstärke. Um die Intensität zu erhalten muss diese quadriert werden.

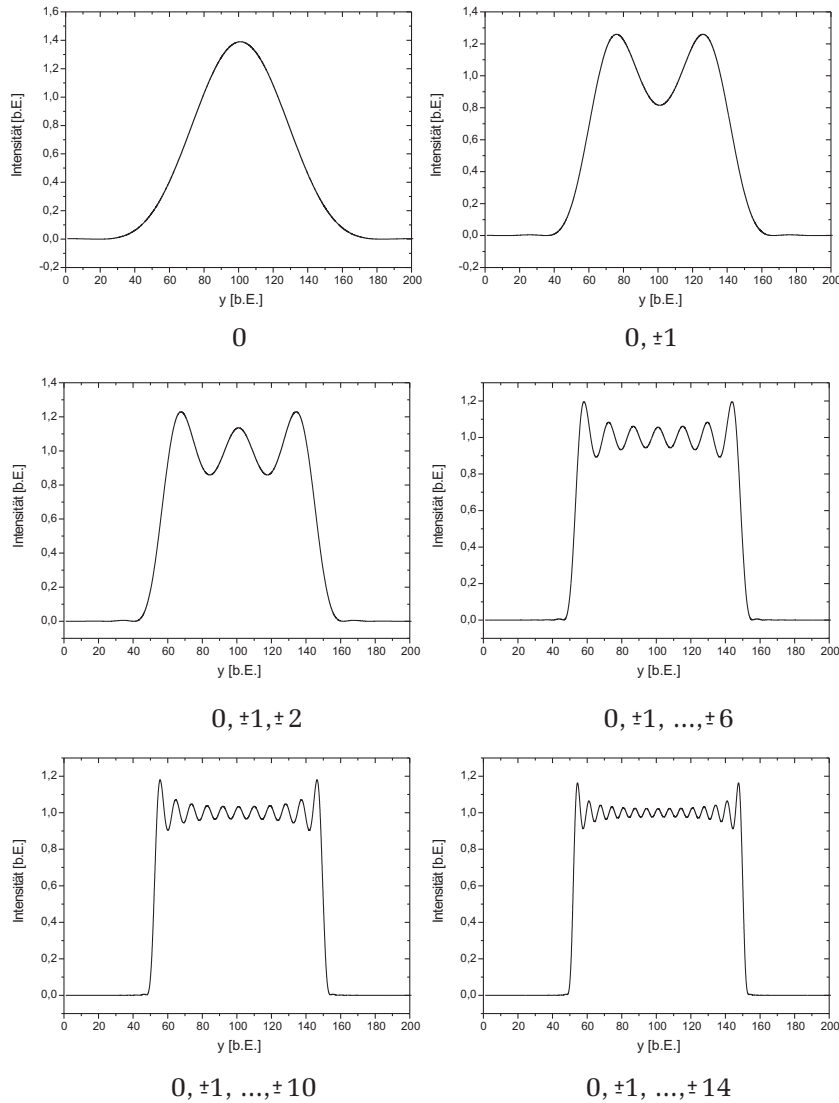


Abbildung 14: Spaltfunktion unter Berücksichtigung unterschiedlicher Beugungsordnungen.

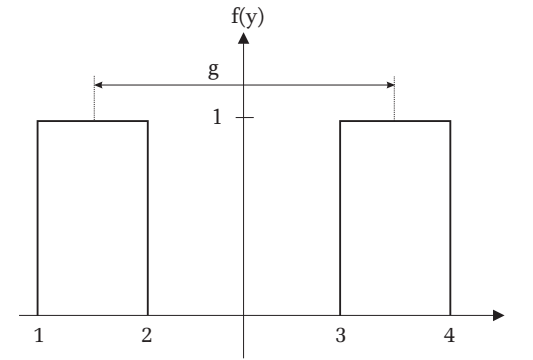


Abbildung 15: Spaltfunktion eines Doppelspalts. Die Größe  $g$  beschreibt den Spaltabstand.

links verschobenen Einzelspalt:

$$F(k_y, links) = \int_1^2 f(y) e^{ik_y y} dy = -\frac{1}{ik_y} e^{-ik_y} \Big|_1^2 = e^{ik_y g/2} d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \quad (51)$$

Damit ergibt sich schließlich für die Fouriertransformierte des Doppelspalts:

$$F = F(k_y, rechts) + F(k_y, links) = 2 \cos(k_y g/2) d \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \quad (52)$$

Wir erkennen in dem rechts stehenden Term dieses Ausdrucks wieder die Fouriertransformierte des Einzelspaltes, der Vorfaktor beschreibt die Interferenz der von beiden Spalten ausgehenden Wellen. Führen wir wieder wie beim Einzelspalt die Substitution  $k_y = k_0 \sin \alpha = 2\pi/\lambda \sin \alpha$  durch und quadrieren den Ausdruck, so erhalten wir als **Beugungsfigur des Doppelspalts** schließlich

$$I = 4 \cos^2(k_y g/2) d^2 \frac{\sin^2(k_y d/2)}{(k_y d/2)^2} = 4 \cos^2(\pi g/\lambda \sin \alpha) d^2 \frac{\sin^2(\pi d/\lambda \sin \alpha)}{(\pi d/\lambda \sin \alpha)^2}. \quad (53)$$

Der Ausdruck entspricht dem Produkt der Gitterfunktion  $\cos^2(\pi g/\lambda \sin \alpha)$  und der Spaltfunktion, die wir bereits beim Einzelspalt abgeleitet haben. Abbildung 16 zeigt die hiermit berechnete Beugungsfigur für den von uns verwendeten Doppelspalt zusammen mit der Beugungsstruktur, wie sie nur einer der Spalte ergibt.

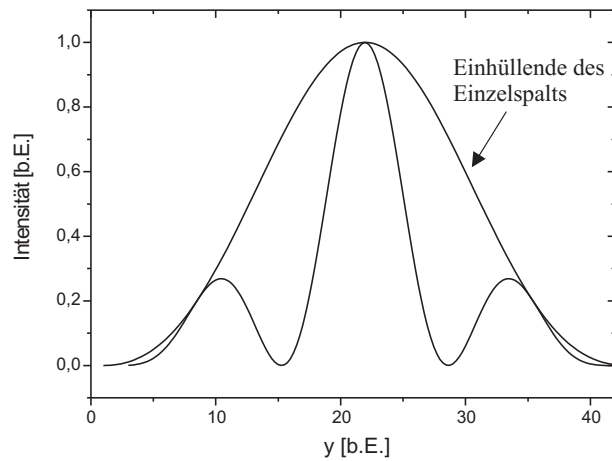


Abbildung 16: *Beugungsfigur eines Spalts und eines Doppelspaltes.*

Mit dem oben stehenden Ausdruck für die Fouriertransformierte des Doppelspaltes können wir dann auch leicht wieder angeben, wie das „modifizierte“ Bild  $F_{\text{modifiziert}}$  des Doppelspaltes aussieht, wenn man in der Fourierebene mit dem Analysierspalt wieder die Zahl der zur Abbildung zugelassenen Fourierkomponenten gezielt begrenzt:

$$F_{\text{modifiz.}}(y) \propto [f_{\text{modifiz.}}(y)]^2 = \left[ 2d/\pi \int_0^{k_{y,n}} \cos(k_y g/2) \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \cos(k_y y) dk_y \right]^2. \tag{54}$$

Ausführung dieser Integrale  $F_{\text{modifiziert}}(y)$  ergibt (obere Integrationsgrenze  $k_{y,n} = 2\pi n/d$ ) für  $n = 1, 2, 3, 6$  die nachfolgend wiedergegebenen Spaltbilder (Abbildung 17). Der Bezug zu den analogen Bildern des Einzelspaltes ist offensichtlich.

Ein weiterer, auch experimentell von uns untersuchter Aspekt, kann an diesen Formeln untersucht werden, nämlich die Frage nach der Auflösung:

„Welcher Anteil der Fourierkomponenten des Beugungsbildes ist notwendig, um noch die Doppelstruktur unseres Objektes im modifizierten Bild zu sehen?“ Für das Experiment bedeutet dies: „Bei welcher Spaltweite des Analysierspaltes ver-

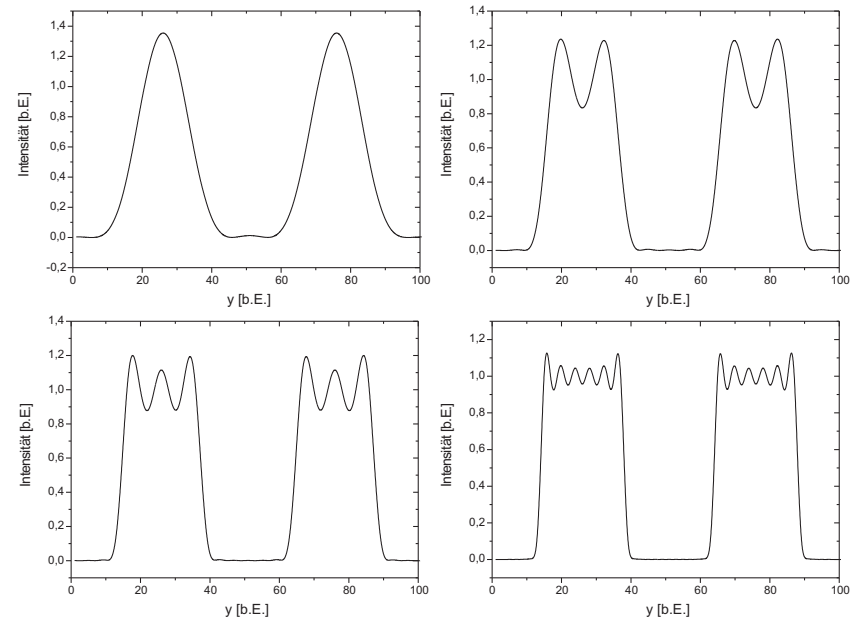


Abbildung 17: *Spaltbild eines Doppelspaltes unter Berücksichtigung unterschiedlicher Beugungsordnungen.*

schwindet die Doppelstruktur?“

Für die Auflösung der Doppelstruktur ist nun der Spaltabstand  $g$  maßgebend. Das Maximum 1. Ordnung erscheint unter  $\sin \alpha = \lambda/g$ . Diese Beugungsordnung muss mindestens noch zur Abbildung zugelassen werden, um die Doppelstruktur zu erkennen. Wenn Sie also den zugehörigen Wert  $k_0 \sin \alpha = k_0 \lambda/g$  als Obergrenze für die Integration verwenden und kontinuierlich verkleinern, werden Sie zu Bildern kommen, wie sie nachstehend gezeigt sind (Abbildung 18). Der „Dunkelbereich“ zwischen den Einzelspalten hellt zunehmend auf, bis schließlich nur noch ein flaches Plateau die ursprünglichen Einzelspaltbilder verbindet: Die Doppelstruktur ist verschwunden! Vergleichen Sie den rechnerisch gefundenen Grenzwert für  $k_y$  mit dem experimentell aus der entsprechenden Spaltbreite des Analysierspaltes bestimmten Wert für die Auflösung.

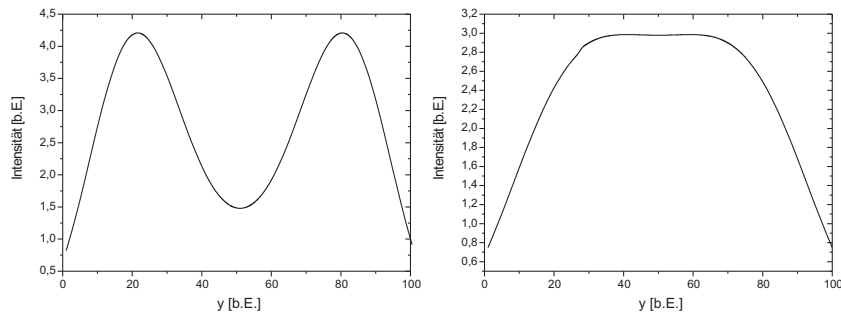


Abbildung 18: Auflösung eines Doppelspalts bei Beschneidung des Maximum 1. Ordnung.

## VII Durchführung des Versuchs

Der optische Aufbau zu unseren Versuchen ist in Abbildung 19 dargestellt. Er soll als erstes von Ihnen mit den vorhandenen Komponenten erstellt werden.

Als Lichtquelle dient ein Diodenlaser mit einer Wellenlänge von 635 nm und einer Leistung von maximal 1 mW, einstellbar über ein Potentiometer, dessen Licht fest in eine „single-mode“-Lichtfaser eingekoppelt wird und an deren Ausgang über einen Faserstecker zur Verfügung steht. Das unter einem Öffnungswinkel  $u$  von ca. 14 Grad austretende Licht wird über eine kurzbrennweitige Linse ins Unendliche abgebildet, wobei der austretende Parallelstrahl nun einen Durchmesser  $D$  von  $D = fu = 7 \text{ mm}$  besitzt. Durch Wahl der Linse kann man sich damit einen gut kollimierten Laserstrahl von gewünschtem Durchmesser verschaffen. Nehmen Sie nun als erstes den Diodenlaser in Betrieb. Er wird über eine Schutzschaltung, die in einem kleinen Kästchen mit mA-Meter untergebracht ist, eingeschaltet und der Strom über das Potentiometer auf den fest eingestellten Maximalstrom von 60 mA hochgeregelt. Bei etwa 40 mA beginnt die Laseraktivität, bei dem Maximalstrom erhalten wir eine Laserleistung von ca. 1 mW. Hinter dem Laserauskoppelteil wird das zu untersuchende Objekt zentrisch in den Laserstrahl justiert, dahinter wiederum eine Linse  $L_1$  von 80 mm Brennweite derart, dass Sie das Objekt scharf auf den Schirm im Abstand von ca. 1 m abbildet. Nun wollen wir simultan mit dem **Objektbild** die von dem Objekt erzeugten Beugungsstrukturen – das **Fourierbild** – auf dem Schirm sichtbar machen: Die Beugungsstrukturen entstehen zunächst in der Brennebene der ab-

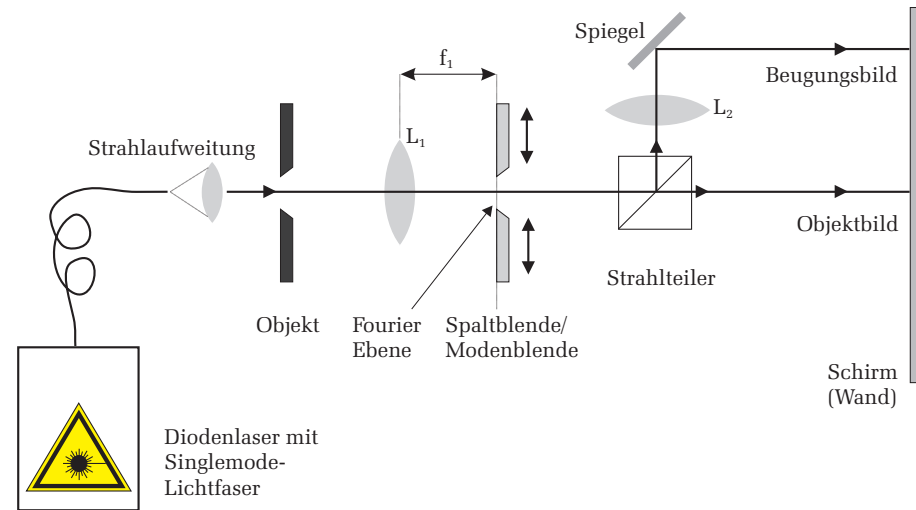


Abbildung 19: Schematische Darstellung des optischen Aufbaus.

bildenden Linse. Halten Sie da mal ein Papierzettelchen hinein und überzeugen sich davon! Mit einer zweiten Linse wollen wir nun diese Fourierebene (die Beugungsstrukturen in dieser Ebene bilden also den Gegenstand für diesen zweiten Abbildungsweg) ebenfalls auf den Schirm abbilden, aber getrennt vom ersten Abbildungspfad.

Dazu wählen wir einen Strahlteiler, der uns ca. 50 Prozent des Lichtes herausspiegelt. Die dahinter aufgestellte Linse  $L_2$  muss nun so positioniert werden, dass sie über den nachfolgenden Spiegel, der den weiterlaufenden Strahl wieder parallel zum ersten Strahl bringt, die Beugungsstruktur stark vergrößert neben dem Bild des Objektes, auf dem Schirm entwirft. Durch feine Verschiebungen der Linse können Sie nun auch das Bild der Beugungsstruktur scharf stellen. Schauen Sie sich die Bilder für die Spalte A,B,C zunächst ohne Kamera auf dem Schirm an.

Auf diese Weise erhalten wir also Bild und Fourierbild des Objektes nebeneinander auf dem Schirm sichtbar und können nun studieren, wie sich Manipulationen in der Fourierebene- d.h. gezieltes Zulassen und Wegblenden bestimmter Beugungsordnungen- auf das Bild auswirken.

Für diese Manipulationen stehen ein fein justierbarer symmetrisch öffnender



Spalt und Modenblenden (schmale Streifenblenden) zur Verfügung. Da diese Elemente genau in der Fourierebene (zur Erinnerung: = Brennebene der abbildenden Linse  $L_1$ ) untergebracht werden müssen, sollten Sie also vor dem Strahlteiler genügend Platz für den notwendigen Reiter mit Justierbühne lassen. Es wird ein bisschen eng, aber es geht! Montieren und justieren Sie also hier zunächst den symmetrisch öffnenden Spalt auf dem Verschiebetisch, der wiederum die Mitte des Spaltes genau auf die Mitte der Beugungsstruktur einzustellen gestattet.

## 1. Quantitative Beobachtungen am Einfachspalt

Wir wollen zunächst die Beugungsstruktur des Spaltes bestimmen:

Zur Messung steht eine CCD-Zeilenkamera zur Verfügung, die über eine USB-Schnittstelle auf einen PC ausgelesen wird und die es erlaubt, die Lichtintensität als Funktion des Ortes darzustellen. Der lichtempfindliche Teil besteht aus 2048 Pixel von jeweils  $14\ \mu\text{m}$  Breite und  $56\ \mu\text{m}$  Höhe mit einer Gesamtlänge von  $28,7\ \text{mm}$ . Justieren Sie zunächst  $L_2$  auf ein **scharfes Beugungsbild in der Ebene der Kamera**. Sie ist durch einen Doppelpfeil auf dem Kameragehäuse gekennzeichnet. Schieben Sie diese dazu zunächst ein wenig zur Seite und schauen Sie sich das Beugungsbild auf einem daneben gehaltenen Blatt Papier an. Schieben Sie nun die Zeilenkamera mittig über die Beugungsstruktur und sehen sich das Ergebnis auf dem PC-Monitor an. Sie werden zunächst i.a. nichts Vernünftiges sehen! Der Grund dafür ist, dass das Beugungsbild aus einer linearen, symmetrischen Anordnung von hellen Punkten besteht, deren Intensität nach außen stark abnimmt, und diese Punktlinie muss ja mit der Pixel-Zeile der Kamera zur Deckung gebracht werden - kein leichtes Unterfangen, wenn man bedenkt, dass diese Zeile nur  $56\ \mu\text{m}$  hoch ist! Was also tun? Suchen Sie mal unter den zur Verfügung stehenden optischen Bauteilen nach einer **Zylinderlinse**. Wie könnte man's damit machen, ohne die zu bestimmende Intensitätsverteilung zu verändern? Reduzieren Sie vor allem stark die Laserintensität weit unter die Sichtbarkeitsgrenze! Die verwendete Zeilenkamera ist sehr empfindlich und wird sehr rasch übersteuert, was zu völlig „wilden“ Strukturen führt, die nichts mit der tatsächlichen Intensitätsverteilung zu tun haben.

Wenn Sie schließlich die Beugungsstruktur in voller Schönheit auf dem Monitor haben (Abbildung 20), sollten Sie durch Feinjustieren des optischen Aufbaus (Höheneinstellung der Zylinderlinse,  $L_2$ , transversale Position des

Spaltes auf der optischen Bank) eine optimale Symmetrie der beobachteten Beugungsstruktur herstellen. Mit Hilfe des von der Bedienungssoftware zur Verfügung gestellten Cursor können Sie nun (Betriebsmode *view* der Kamera) die **Lage und Intensitäten** der verschiedenen Beugungsmaxima und -minima bis zur typischerweise 5. Ordnung sowie auch den **Untergrund** (jeweils rechts und links!) bestimmen und protokollieren. Drucken Sie die gemessene Beugungsstruktur aus und tragen Sie die gemessenen Lagen und Intensitäten der verschiedenen Ordnungen in den Ausdruck ein. Wegen des hohen Intensitätsabfalles zu steigender Ordnung der Beugungsmaxima müssen Sie zur besseren Vermessung der höheren Beugungsordnungen ein **2. Bild** bei höherer Intensität des Diodenlasers aufnehmen, die Sie über den Strom regeln können. Das zentrale Maximum darf dabei ruhig in Sättigung gehen. Das Maximum 1. Ordnung muss allerdings auf beiden Bildern gut zu sehen sein. Sie können hierüber alle Intensitäten relativ zur Intensität des 0-ten Maximums angeben! Tragen Sie auch hier wieder Ihre Messwerte in den Ausdruck ein.

Die Eichung der Abszisse (d.h. wieviel Pixel auf der Kamera entsprechen  $1\ \text{mm}$  in der Fourierebene) erhalten Sie bequem, indem Sie in der Fourierebene den Analyserspalt auf verschiedene Weiten einstellen und die zugehörigen Abstände in Pixel auf dem Monitor ablesen. (Die Ablesung der Spaltbreite erfolgt mit dem integrierten Messfühler. Beachten Sie, dass der Messfühler die Verschiebung nur einer Spaltschneide registriert. Die andere bewegt sich dabei gegenläufig, so dass die Spaltweite dem doppelten Ablesewert entspricht). Wiederholen Sie dies für mehrere gut ablesbare Punkte des Beugungsbildes und protokollieren Sie die Daten. Speichern Sie danach die Bilder ab und drucken Sie sie für Ihr Protokollheft aus.

## 2. Beugungsstruktur des Doppelspaltes

Ersetzen Sie den Einzelspalt durch das Rähmchen mit dem Doppelspalt ohne den Reiter zu verschieben. Verschaffen Sie sich zunächst wieder durch Feinjustieren des neuen Objektes ein scharfes Bild der **Beugungsstruktur** des Doppelspaltes auf dem Schirm. Schauen Sie sich die Strukturen für die verschiedenen Doppelspalte in dem Dia-Rahmen an. Fertigen Sie eine Skizze der Struktur an und versuchen Sie die Strukturen zu interpretieren. Quantitative Messungen werden im Folgenden an dem mittleren Doppelspalt „B“ des Dia-Rähmchens durchgeführt. Zur Beobachtung der Beugungsstruktur verwenden wir wieder die CCD-Kamera.

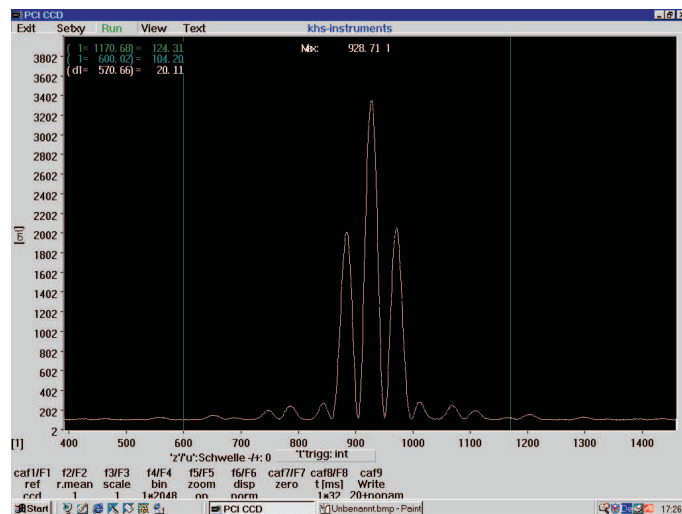
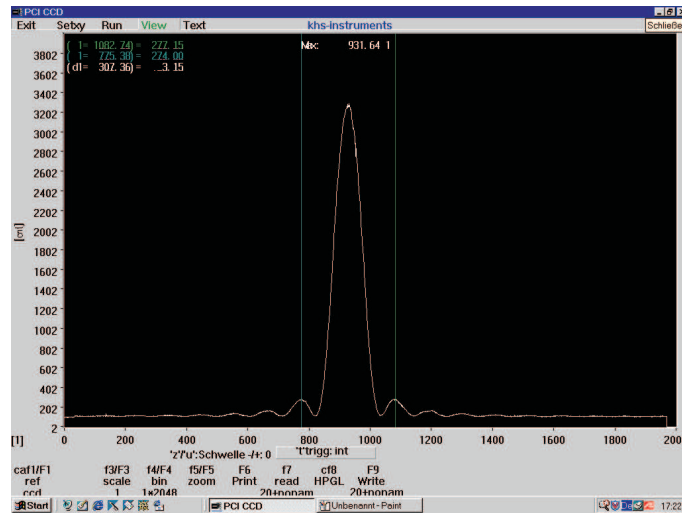


Abbildung 20: Bedienoberfläche der Kamera- Software. Dargestellt ist oben das Beugungsbild eines Spaltes und unten das Beugungsbild eines Doppelspaltes.

Wie bei der vorangegangenen Vermessung des Einzelspaltes, müssen Sie auch hier wieder das Beugungsbild in die Ebene der Kamerazeile scharf einstellen und sich dann mit Hilfe von Zylinderlinse und Einregeln der Laserintensität ein brauchbares Bild der Intensitätsverteilung auf dem Monitor verschaffen. Justieren Sie wieder auf Symmetrie und optimalen Kontrast. Versuchen Sie vorab schon einmal den beobachteten Maxima und Minima, Beugungsordnungen der Spalt- und Gitterfunktion zuzuordnen. Für die Auswertung zu Hause bestimmen Sie wie beim Einzelspalt mit Hilfe der Cursor Lage und Höhe der Maxima und Minima im Bereich zwischen den 1. Minima (links-rechts) der Spaltfunktion, sowie des Untergrundes und drucken zum Schluss das Bild aus.

Die Eichung der Abszisse auf dem Monitorbild können Sie von der entsprechenden Messung am Einzelspalt (Messung 1) übernehmen. Es wurde ja lediglich das Rähmchen mit dem Einzelspalt gegen den Doppelspalt ausgetauscht. Gegenstandsweite und Bildweite bleiben unverändert. Wenn Sie versehentlich doch an den die Vergrößerung bestimmenden Positionen von Objekt (Dia-Rahmen), Fourierebene,  $L_2$  oder die Position der Kamera nachjustiert haben, müssen Sie die Eichung für diese Messung wiederholen.

### 3. Das Objektbild als Fouriersynthese des Beugungsbildes

Am Beispiel des Spaltes soll nun die Auswirkung der Manipulationen in der Fourierebene auf die Struktur des Bildes quantitativ untersucht werden. Die zunächst nur qualitativ mit dem Auge feststellbaren Änderungen am Bild, etwa: „Die Ränder erscheinen schärfer, wenn man die Beugungsordnungen höherer Ordnung mit zur Abbildung zulässt“, werden nun quantitativ gemessen.

Wir bestimmen die Intensitätsverteilung des Spaltbildes wieder mit Hilfe der CCD-Zeilenkamera. **Öffnen** Sie zunächst den **Analysierspalt** in der Fourierebene und stellen Sie die Laserintensität am Steuergerät auf Maximum ein. In den Strahlengang zur Kamera stellen Sie dicht hinter dem Strahlteiler ein Graufilter (Abschwächung  $10^{-2}$ ). Ohne das Graufilter würde die Kamera übersteuern! Man beobachtet eine zunächst mehr oder weniger gut ausgeprägte Rechteckfunktion mit einer großen Zahl von „wiggles“. Das wollen wir ganz sauber sehen! Also: Nachjustieren!

Bei diesem **Nachjustieren** muss man nun aufpassen: Sie wollen ja nach wie vor das Fourierbild scharf auf dem Schirm beibehalten, wozu ja wieder-

um die Gegenstandsweite für diesen Abbildungsweig (=Abstand hintere Brennebene von  $L_1$  zu Linse  $L_2$ ) **unverändert bleiben** muss! Man muss also die Linse  $L_1$  stehen lassen und vielmehr das Objekt selbst bzgl. dieser Linse nachjustieren, bis dessen Bild in der Ebene des Photodetektors scharf erscheint. Letzteres wird dadurch kenntlich, dass Sie nun eine zunehmend ideale Rechteckfunktion auf dem Monitor beobachten können. Stellen Sie auf **größtmögliche Steilheit der Kanten** des Spaltbildes ein. Dazu den Spalt sehr feinfühlig verrücken, es geht um Bruchteile eines mm! Bei diesem Vorgehen bleibt dann die Lage der Fourierebene und damit das Beugungsbild auf dem Schirm unverändert. Nun die Laserintensität geeignet einstellen!

Um sich zunächst einen Überblick über die sukzessiv auftretenden Strukturen zu verschaffen drehen Sie den Analysierspalt nun langsam zu und beobachten **simultan** die Veränderungen der Beugungsstruktur auf dem Schirm und des Spaltbildes auf dem Monitor. Die einfachste Struktur des Spaltbildes erhalten Sie offenbar, nachdem Sie bis auf das zentrale Maximum alle Nebenmaxima ausgeblendet haben. Symmetrisieren Sie das Fourierbild gleichzeitig durch Nachjustieren des Verschiebereiters, der den Analysierspalt trägt, bzgl. der 0-ten Ordnung des Beugungsbildes.

Mit dieser Einstellung beginnend suchen Sie nun der Reihe nach bei **größer werdender Öffnung des Spaltes** die charakteristischen Bildstrukturen auf, die sich einstellen, wenn Sie der Reihe nach genau die 0-te,  $\pm 1$ -te,  $\pm 2$ -te Ordnung etc. zur Abbildung zulassen. Bis zu welcher Ordnung können Sie deutliche Strukturen beobachten? Auch hier können Sie nochmals auf die genaue Justierung der Abbildung achten. Zum Beispiel spielt die genaue vertikale Stellung der abbildenden Linse  $L_1$  eine Rolle sowie die transversale Position des Spaltes. Hier sollten Sie die optimale Justage durch Ausprobieren herausbekommen.

Sicher ist Ihnen aufgefallen, dass die Kurven nicht so glatt sind, wie Sie es erwartet haben. Entfernen Sie deshalb das Graufilter und reduzieren gleichzeitig die Laserleistung: Sie werden im Allgemeinen eine wesentlich bessere Signalqualität beobachten. Der Grund: Die verwendeten Graufilter sind optisch nicht absolut homogen und beeinflussen Amplitude und Phase der durchlaufenden Teilbündel. Dies führt zu Störungen der Intensität in der Ebene der Kamera, in die ja die Linse  $L_1$  letztlich alle Bündel zum - modifizierten - Bild des Spaltes zusammenführt.

Für Ihr Protokoll sollen die von Ihnen als optimal gefundenen Bilder für die fünf ersten Einstellungen des Analysierspaltes auf das 1. bis 5. Minimum der Beugungsfigur ausgedruckt werden. Zum quantitativen Vergleich mit den später auch zu berechnenden Bildern wollen wir jedoch beispielhaft an den ersten drei Bildern auch die Intensitätsverhältnisse zahlenmäßig überprüfen und protokollieren dazu (verwenden Sie wieder den Cursor) die Intensitäten der Maxima, Minima und des Untergrundes.

Die Zahl der beobachtbaren „Wiggels“ können Sie aber bis zu wesentlich höheren Beugungsordnungen (ca.  $n=15$ ) verfolgen. Bestimmen Sie an solch einem Bild mit hohem  $n$  die Abstände der Maxima und Minima (x-Achse vernünftig strecken und die Cursor verwenden) und überprüfen Sie auf Äquidistanz. Sehen die Bilder so aus, wie Sie's erwarten? Was fällt Ihnen auf? Entnehmen Sie weiterhin diesem Bild, das einer rechteckigen Spaltfunktion am nächsten kommt, die Breite in Pixel ( $14\mu\text{m}$ ). Sie entspricht der Spaltbreite, die hier gemäß der optischen Abbildung ( $L_1$ ) vergrößert erscheint. Die Vergrößerung ist aus Brennweite  $f$  der Linse und Bildweite  $b$  bestimmbar, letztere messen Sie mit einem Zollstock, dessen Messgenauigkeit hierzu völlig ausreicht. Vergleichen Sie den hieraus bestimmten Wert mit dem weiter oben (Auswertung zu 1) gefundenen Wert. Drucken Sie zum Schluss dieses Bild aus.

#### 4. Fourierbild des Doppelspaltes

Als nächstes schauen Sie sich nun das **Bild des Doppelspaltes** mit der CCD-Kamera an. Justieren Sie wieder auf optimale Kantensteilheit der Spaltbilder und Symmetrie! Bestimmen Sie **Breite und Abstand** der beiden Einzelspalte auf dem Monitor (wie immer bisher in Pixel-Einheiten). In derselben Weise wie bei den Messungen am Einzelspalt können Sie aus der aktuellen Bildweite und Brennweite die Vergrößerung bestimmen und auf die Abmessungen des Doppelspaltes (**Spaltweite** und **Spaltabstand** siehe Abbildung 15) rückschließen. Diese Werte werden später bei der Interpretation des gemessenen Beugungsbildes benötigt! Beobachten Sie im Folgenden auch hier wieder die schon beim Einzelspalt untersuchten Beiträge der einzelnen Beugungsordnungen der Spalte, indem Sie nun den Analysierspalt in der Fourierebene auf- und zudrehen. Überlegen Sie sich hierzu die wichtige Frage: Wie liegen eigentlich die Beugungsbilder der individuellen Spalte in der Brennebene (Fourierebene) relativ zueinander? Drucken Sie ein Bild zu niedriger Beugungsordnung ( $\leq 5$ ) für Ihr Protokoll

aus.

Als letztes drehen Sie nun langsam den Analysierspalt zu (Wichtig: schauen Sie sich dabei gleichzeitig immer auch das Beugungsbild auf dem Schirm an und verfolgen, was da geschieht!) und beobachten, wie die beiden rechteckigen Spaltprofile zu zwei gaussähnlichen Profilen verschwimmen (Fall a: nur noch die 1-ten Beugungsmaxima beider Spalte tragen zur Abbildung bei), wie sich zunehmend auch der Zwischenraum aufhellt und schließlich die Doppelstruktur endgültig verschwindet und nur noch ein flaches Plateau (Fall b: auch die dem Doppelspalt zuzuordnenden 1. Gittermaxima werden abgeschnitten) sichtbar bleibt. Notieren Sie die zu a) und b) gehörenden Einstellungen des Analysierspaltes und drucken die zugehörigen Bilder aus.

## VIII Auswertung

### Zu Aufgabe 1:

Vergleichen Sie die Lage der Maxima und Minima sowie die gemessenen Intensitätsverhältnisse der einzelnen Beugungsordnungen mit den theoretisch zu erwartenden Werten. Tragen Sie zunächst den Abstand der Minima  $n$ -ter Ordnung (jeweils in Pixel angegeben) gegen die Ordnungszahl  $n$  auf. Es sollte sich eine Gerade ergeben, deren Steigung die Spaltweite des verwendeten Beugungsspaltes zu bestimmen gestattet (Herleitung!) In dasselbe Diagramm tragen Sie nun die gemessenen Werte für die Lage der Beugungsmaxima ein und entnehmen der Geraden die Werte für  $n$ . Liegen diese genau zwischen den entsprechenden Werten der Minima bei 1,5, 2,5 etc.? Wo sollten sie liegen? Schätzen Sie die Fehler ab. Als nächstes ermitteln Sie die Intensitätsverhältnisse der gemessenen Nebenmaxima relativ zum Maximum 0-ter Ordnung und vergleichen Sie diese mit den theoretisch erwarteten Werten. Fehler angeben!

### Zu Aufgabe 2:

Berechnen Sie mit Hilfe von Python oder mit dem Onlinescript<sup>3</sup> ein Bild der theoretisch zu erwartenden Beugungsstruktur des Doppelspaltes. Benutzen Sie dabei für die Spaltweite und den Abstand der Spalte die Werte aus Aufgabe 4. Vergleichen Sie diese mit der experimentell bestimmten Struktur: Welche Minima entsprechen den Nullstellen der Spaltfunktion, welche

<sup>3</sup>Sie können die Berechnungen auch auf der Praktikumshomepage durchführen.  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Software.php>

denen der Gitterfunktion? Vergleichen Sie für die zwischen den 1. Minima der Spaltfunktion gemessenen Nebenmaxima die relativen Intensitäten bezogen auf das zentrale Maximum mit den entsprechenden theoretischen Werten.

### Zu Aufgabe 3:

Berechnen Sie mit Python oder dem Onlinescript für die ersten drei spezifischen Einstellungen des Analysierspaltes die entsprechenden Bilder (die Formeln werden im Kapitel „Grundlagen“ diskutiert).

•Vergleichen Sie:

- Zahl und Lage der „Wiggels“ (der Maxima).
  - Intensitäten der Maxima und Minima der ersten drei Bildkurven, normiert auf das Maximum des zur 0-ten Beugungsordnung gehörenden modifizierten Spaltbildes.
- Überlegen Sie sich warum bei einem fast geschlossenem Analysierspalt (d.h. nur die 0-te Ordnung wird durchgelassen) die Intensität in der Bildmitte höher ist, als wenn dieser weit geöffnet ist.

### Zu Aufgabe 4:

Im Kapitel Grundlagen sind die Formeln für die Fouriertransformierte des Doppelspaltes sowie die durch Fouriersynthese rückwärts wieder gewonnene Darstellung des Doppelspaltbildes mit einigen gerechneten Beispielen angegeben. Auch hier erhält man wieder in einfacher Weise die „rudimentäre“ Spaltfunktion, so wie sie experimentell beobachtet wird, indem man als obere Integrationsgrenze die Zahl der für die Abbildung zugelassenen Beugungsordnungen - also deren  $k_y$ - Wert - einsetzt.

Vergleichen Sie die rechnerisch gewonnenen Bilder mit den oben experimentell beobachteten Fällen. Fall a) entspricht dem 1. Spaltminimum als obere Integrationsgrenze. Um Fall b) zu simulieren, müssen Sie sich für verschiedene Werte von  $k_y$  nahe dem Wert  $k_y = k_0 \sin \alpha = k_0 \lambda / g$  die zugehörigen Bilder verschaffen und durch Iteration auf einen Wert hinarbeiten, der gerade die experimentell bestimmte Struktur wiedergibt. Dieses mit Python erstellte Bild mit dem zugehörigen Grenzwert für  $k_y$  der Auswertung beifügen. Aus der gemessenen Breite des Analysierspaltes beim Experiment (Fall b) können Sie sich zusammen mit der Kenntnis der Brennweite von  $L_1$  den experimentell bestimmten Grenzwert für  $k_y$  verschaffen und vergleichen.

## IX Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

### IX.1 Berechnung der Beugungsbilder

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus.

Intensitätsverteilung  $I$  des Beugungsbild des Spalts:

$$I(x) = \frac{\sin(x)^2}{x^2} \quad (55)$$

mit  $x = d/\lambda\pi\sin(\alpha)$ .

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Die Beugungsfunktion des Spalts ist eine sinc()- Funktion und ist im Modul Numpy enthalten.

```
#Beugungsfunktion Spalt
def beugung_spalt(x):
    return np.sinc(x)**2
```

Für den Doppelspalt gilt

$$I(x) = \frac{\sin(x)^2}{x^2} \cos(vx)^2, \quad (56)$$

wobei  $v = g/d$  das Verhältnis von Spaltabstand zu der Spaltbreite darstellt. Da Numpy die normierte Form der sinc-Funktion verwendet, muss im Argument des Kosinus noch der Faktor  $\pi$  hinzugefügt werden.

```
#Beugungsfunktion Doppelspalt
def beugung_doppelspalt(x):
    return np.sinc(x)**2*np.cos(np.pi*v*x)**2
```

Die Abszissenwerte generieren wir uns mit der Numpy-Funktion `x=np.linspace(start,stop,steps)`.

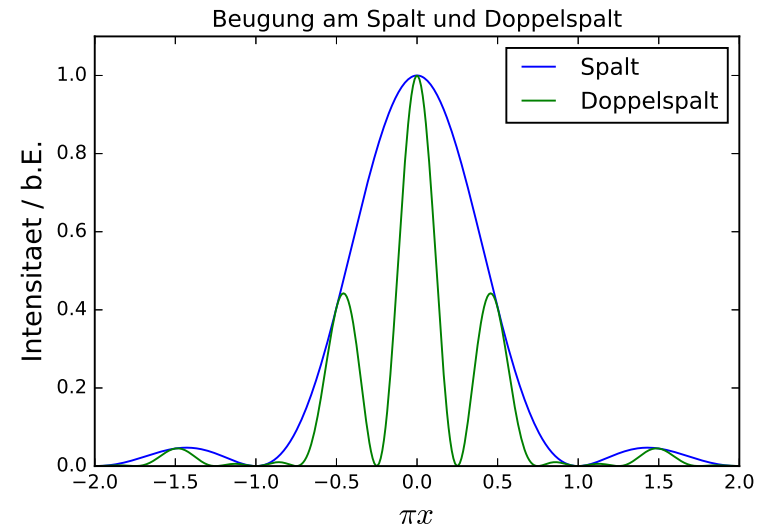


Abbildung 21: *Beugung am Spalt und Doppelspalt.*

```
#Anzahl a der Nebenmaxima die dargestellt werden sollen:
a=1
#Verhaeltnis Spaltabstand zu Spaltbreite:
v=2
x=np.linspace(-(a+1),a+1,200)
plt.plot(x,beugung_spalt(x),label='Spalt')
plt.plot(x,beugung_doppelspalt(x),label='Doppelspalt')
plt.xlabel('$\pi x$')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
```

```
plt.title('Beugung am Spalt und Doppelspalt')
plt.ylim((0,1.1))
plt.legend()
plt.savefig("figures/Beugung_spalt_doppelspalt.pdf", format="pdf")
```

Drucken Sie das Diagramm aus. Es sollte so ähnlich aussehen wie in Abbildung 21.

## IX.2 Berechnung der modifizierten Spaltbilder

Um das resultierende Bild des Spaltes zu erhalten muss folgendes Integral berechnet werden:

$$f_{\text{modifiziert}}(y) = \frac{d}{\pi} \int_0^{k_{y,n}} \left[ \frac{\sin(k_y d/2)}{(k_y d/2)} \right] \cos(k_y y) dk_y \quad (57)$$

mit

$$k_{y,n} = k_0 \sin \alpha_n = k_0 n \lambda / d = 2n\pi / d, \quad (58)$$

wobei  $d$  die Spaltbreite und  $n$  den Integrationsbereich bezüglich der Nullstellen angibt. Wählen Sie z.B.  $n = 1$ , so erfolgt die Integration nur bis zu den ersten Nullstellen, d.h. nur über das Hauptmaximum. Bei  $n = 2$  erfolgt die Integration über das Hauptmaximum und über die ersten Nebenmaxima.

```
#Integrand
def spalt(k):
    return d/np.pi*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)
```

```
d=1 #Spaltbreite auf 1 setzen
n=3 #Integrationsbereich
```

Für den  $y$ -Bereiche wählen wir die doppelte Spaltbreite.

```
#y-Werte:
Y=np.linspace(-1,1,200)*d
```

Um die numerische Integration durchzuführen brauchen wir die Funktion `quad()` die im Modul `scipy.integrate` enthalten ist.

```
#Berechnung des resultierenden Objektbilds
from scipy.integrate import quad
f_modifiziert=[]
for i in range(len(Y)):
    y=Y[i]
    result, error = quad(spalt, 0, 2*np.pi*n/d)
    f_modifiziert.append(result**2)
#Kurve auf 1 normieren:
f_modifiziert=f_modifiziert/np.max(f_modifiziert)
```

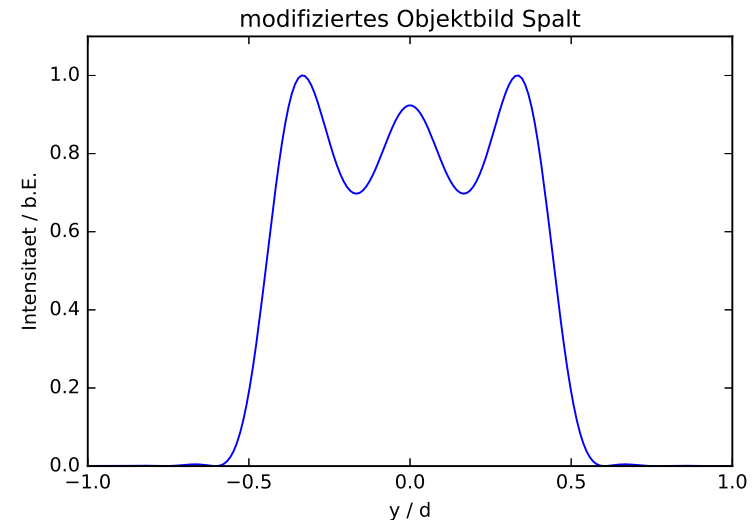


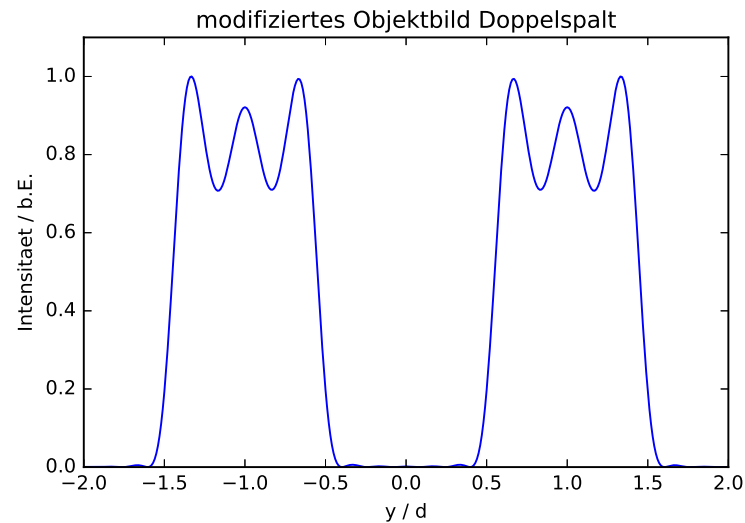
Abbildung 22: Modifiziertes Spaltbild.

Das Ergebnis ist in Abbildung 22 dargestellt. Die Abszisse ist in Einheiten der Spaltbreite  $d$  skaliert.

```
plt.plot(Y,f_modifiziert)
plt.xlabel('y / d')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.title('modifiziertes Objektbild Spalt')
plt.ylim((0,1.1))
plt.savefig("figures/spalt.pdf", format="pdf")
```

Analog verfahren Sie mit dem Doppelspalt. Sie benötigen die Funktion des Doppelspalts:

```
def doppelspalt(k):
    return d/np.pi*np.cos(k*g/2)*np.sin(k*d/2)/(k*d/2)*np.cos(y*k)
#Spaltabstand in Einheiten der Spaltbreite:
g=2*d
n=3
```

Abbildung 23: *Modifiziertes Bild des Doppelspalts.*

Tragen Sie das Ergebnis der Integration in ein Diagramm ein. Den y-Bereich müssen Sie gemäß Ihres gewählten Spaltabstands anpassen. Das Diagramm sollte so ähnlich wie in Abbildung 23 aussehen.

## X Anhang

Die folgenden Bilder zeigen Fotografien von Objekt- und Beugungsbildern, die im Praktikum aufgenommen wurden. Bei allen Teilbildern ist neben dem Beugungsbild auch das resultierende Objektbild eingeblendet. Abbildung 24 zeigt die Beugung an einem Spalt. Im Teilbild a) tragen alle Beugungsordnungen zur Abbildung bei, so dass ein „scharfes Spaltbild“ erkennbar ist. Bei den Bildern b) bis e) wurden einzelne Moden des entsprechenden Beugungsbildes ausgeblendet, so dass nur einzelne Ordnungen zur Bildentstehung beitragen (Tiefpassfilter). Deutlich ist die Intensitätsverteilung gemäß Abbildung 14 zu erkennen. Das Teilbild f) zeigt zusätzlich das Spaltbild bei Ausblendung des Hauptmaximums (Hochpassfilter).

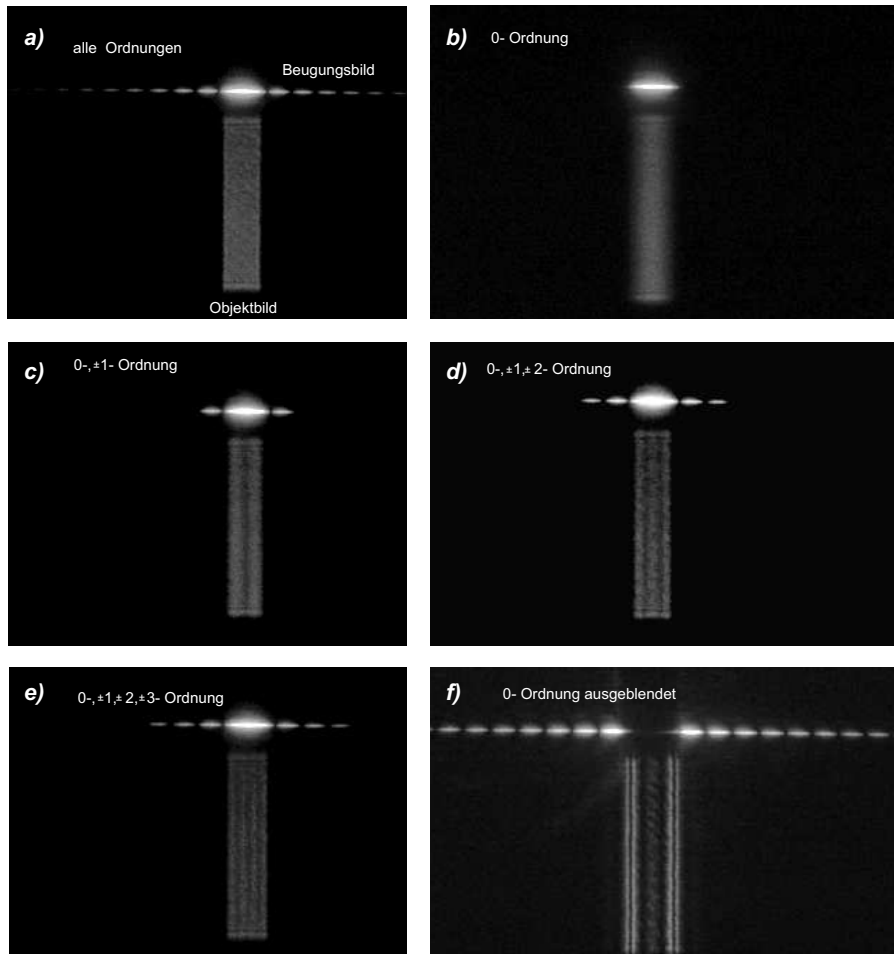


Abbildung 24: *Beugung am Spalt.*

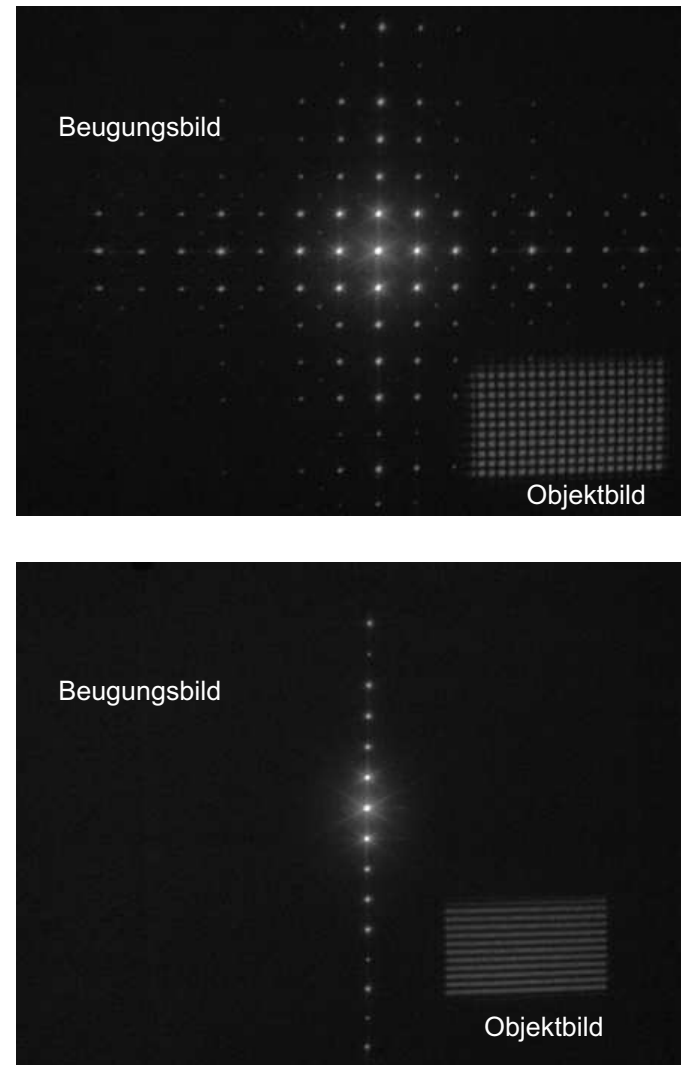


Abbildung 25: *Beugung am Kreuzgitter.*



## Versuch 234 Lichtquellen



Abbildung 1: Versuchsaufbau.

### I Messaufbau

- Gitterspektrometer, Ocean Optics USB4000
- verschiedene Lichtquellen: LED, LASER, Energiesparlampe, Halogenlampe, Glühlampe, Natriumdampfampe
- PC mit Drucker

### II Literatur

- Atomic Spectra Database: <http://www.nist.gov/physlab/data/asd.cfm>

### III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Plancksches Strahlungsgesetz, Sonnenspektrum, Fraunhofer-Linien, Gitterspektrometer, Wasserstoffspektrum, Atomspektren, Rayleigh-Streuung.

Verständnisfragen:

1. Vergleichen Sie das Spektrum einer Halogenlampe mit dem einer Gasentladungslampe. Worauf beruht die jeweilige Lichtemission?
2. Warum kann das Licht eines reinen Temperaturstrahlers niemals grünlich wirken?
3. Warum zeigt das auf der Erdoberfläche gemessene Sonnenspektrum deutliche Abweichungen von der Intensitätsverteilung eines schwarzen Strahlers?
4. Nach welchen Prinzipien lässt sich mit einer LED weißes Licht erzeugen?
5. Nach welchem Prinzip funktioniert ein Gitterspektrometer? Wie hoch ist die spektrale Auflösung.
6. Warum ist der Himmel tagsüber blau, am Morgen und am Abend jedoch rot?

### IV Aufgaben

1. Aufnahme des Sonnenlichtspektrums bzw. des gestreuten Himmelslichts hinter einer Fensterscheibe und ohne Fensterscheibe. Zuordnung von starken Fraunhoferlinien im Spektrum. Messung der Absorption von Fensterglas durch Vergleich des Sonnenlichts ohne und mit Glasscheibe.
2. Wenn möglich: Aufnahme des direkten Sonnenlichts.
3. Aufnahme der Spektren von Lichtquellen und deren Vergleich: Sonnenlicht, Glühlampe, LED's, Energiesparlampe.
4. Spektroskopie: Aufnahme des Spektrums einer Natriumlampe mit hoher Auflösung. Zuordnung der Serienübergänge der Hauptserie und von zwei Nebenserien. Bestimmung der vom Drehimpuls abhängigen Korrekturen der Energieniveaus im Natrium.

## V Grundlagen

### V.1 Temperaturstrahler

Jeder Körper, dessen Temperatur größer als 0 K ist, sendet elektromagnetische Strahlung aus, deren Intensität von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionsvermögen  $\epsilon = 1$ . Die Intensitätsverteilung der Strahlung die von einem schwarzen Strahler ausgeht, wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} dA d\lambda, \quad (1)$$

wobei  $M_\lambda$  die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement  $dA$  im Wellenlängenbereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 2 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt.

Bei reinen Temperaturstrahlern hängt die spektrale Intensitätsverteilung nur von der Temperatur ab. Mit zunehmender Temperatur verschiebt sich das Intensitätsmaximum zu kleineren Wellenlängen. Quantitativ wird dies durch das Wiensche Verschiebungsgesetz beschrieben:

$$\lambda_{max} = \frac{2897,8 \mu m \cdot K}{T} \quad (2)$$

In der Technik werden Lichtquellen durch die sogenannte Farbtemperatur charakterisiert. Bei einer Temperatur von 0 K erscheint jeder Körper absolut schwarz. Mit zunehmender Erwärmung wird irgendwann rotes Licht emittiert. Eine weitere Temperaturerhöhung bewirkt, dass zusätzlich Grünanteile emittiert werden. Diese Grünanteile mischen sich mit den bereits vorhandenen Rotanteilen, so dass das ausgesendete Licht orange bis gelblich erscheint. Bei einer Temperatur von ungefähr 5500 K werden alle Wellenlängen des sichtbaren Bereichs mit ungefähr der gleichen Intensität emittiert und das Licht wirkt weiß. Eine weitere Erwärmung bewirkt, dass vermehrt Blauanteile ausgesendet werden. Die Farbe ändert sich dann von hellblau über blau zu violett. Umgangssprachlich

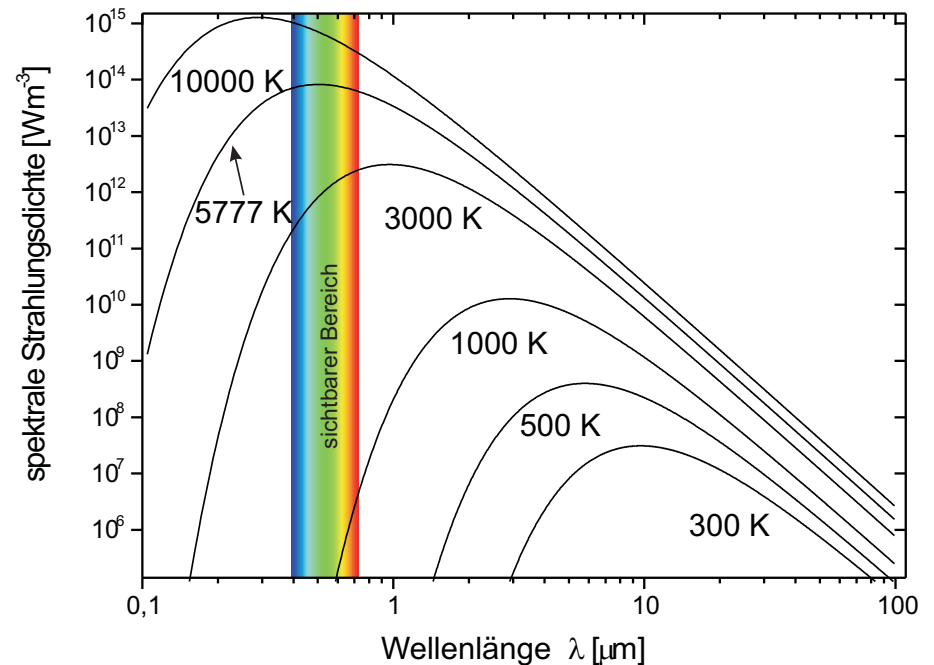


Abbildung 2: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

wird Licht mit einem hohen Blauanteil auch als Kaltlicht und Licht mit hohem Rotanteil als Warmlicht bezeichnet.

Während das direkte Sonnenlicht „warm“ ist, ist das gestreute Sonnenlicht (Himmelslicht) bläulich kalt. Ursache dafür ist die starke Frequenzabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts bei der Streuung des Sonnenlichts (Rayleigh-Streuung). Da der Wirkungsquerschnitt proportional zur vierten Potenz der Frequenz des Lichts ist, wird blaues Licht etwa 16-fach stärker gestreut als rotes Licht.

Das Sonnenlicht besitzt ein kontinuierliches Spektrum, das von vielen Absorptionslinien durchzogen ist, den „Fraunhoferlinien“. Die Absorption findet zum einen direkt in der Sonnenatmosphäre statt. Zum anderen auch in der Erdat-

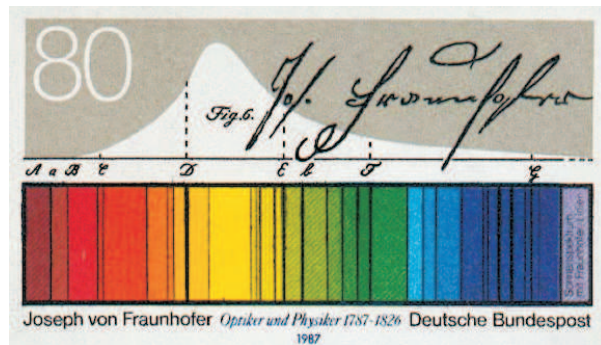


Abbildung 3: Zum 200. Geburtstag von Joseph Fraunhofer brachte die Deutsche Bundespost 1987 eine Briefmarke heraus. Dargestellt ist das Sonnenspektrum mit den nach Fraunhofer benannten Absorptionslinien der Atmosphäre.

mosphäre. Insbesondere Wasserdampf, Sauerstoff und Kohlendioxid führen zu ausgeprägten Absorptionslinien bzw. Absorptionsbanden. Ozon absorbiert breitbandig im Bereich von 200 bis 700 nm und filtert somit einen großen Teil der UV-Strahlung heraus. Das von Fraunhofer selbst kolorierte Spektrum mit den wichtigsten Linien ist in Abbildung 3 gezeigt. Im Fraunhoferspektrum wurde neben bekannten Linien wie z.B. die der Balmerreihe, erstmals eine gelbe Linie entdeckt, die keinem bekannten Element zugeordnet werden konnte. Dieses wurde daher Helium genannt (von helios = Sonne). Leider ist diese Linie mit unserem Spektrometer nicht nachzuweisen, da sie von der starken Doppellinie des Natriums überlagert wird.

## V.2 Nichttemperaturstrahler

Die Lichterzeugung bei Nichttemperaturstrahlern beruht nicht auf Wärmestrahlung sondern auf die Anregung von bestimmten Atomzuständen in Gasen oder Festkörpern oder durch Rekombination von Elektron-Loch Paaren in Halbleitern. Hierzu zählen Gasentladungslampen wie z.B. Leuchtstoffröhren, Leuchtdioden, oder LASER. Solche Lichtquellen haben im Gegensatz zu den Temperaturstrahlern ein diskretes Spektrum. Die spektrale Zusammensetzung des emittierten Lichts hängt bei den Gasentladungslampen von dem verwendeten „Leuchtgas“ (Metalldämpfe, Gase) ab. Von besonderer Bedeutung ist

Quecksilber, welches in Leuchtstoffröhren und Energiesparlampen verwendet wird. Das Licht einer reinen Quecksilberdampf Lampe erscheint bläulich bis lila. Die Intensität im sichtbaren Wellenlängenbereich ist gering. Der Hauptanteil wird im UV-Bereich emittiert. Um die Intensität des ausgesendeten Lichts im sichtbaren Bereich zu erhöhen, werden die Lampen mit einem Leuchtstoff (Leuchtstoffröhren) beschichtet. Bei Bestrahlung mit UV-Licht fluoresziert der Leuchtstoff, wobei das Fluoreszenzlicht im sichtbaren Bereich liegt. Als Beispiel einer Gasentladungslampe, werden wir im nächsten Kapitel, das Spektrum einer Natriumlampe detailliert untersuchen.

Die Emission von Licht bei Leuchtdioden (LED = Light Emitting Diode) beruht auf der Rekombination von Elektron-Loch Paaren in einem pn-Übergang. Bei den sogenannten direkten Halbleitern wird dabei ein Photon emittiert. Wichtige Halbleitermaterialien sind z.B. GaAs (IR), AlGaAs (rot, IR), GaAsP (rot, orange, gelb), GaP (grün), SiC (blau). Mittlerweile gibt es auch Leuchtdioden die weißes Licht aussenden. Solche LED's bestehen entweder aus drei separaten LED's (RGB= Rot Grün Blau), die sich additiv zu weißem Licht mischen oder werden aus blauen LED's hergestellt, die - ähnlich wie Leuchtstoffröhren - mit einer zusätzlichen Fluoreszenzschicht beschichtet sind

Leuchtdioden besitzen im Vergleich zu anderen Lampen, einen sehr hohen Wirkungsgrad. Bei einer herkömmlichen Glühlampe beträgt dieser etwa 5 %, bei Leuchtstofflampen ungefähr 25 % und bei Leuchtdioden bis zu 70 %.

## V.3 Das Natriumspektrum

Alkaliatome haben ein Leuchtelektron und besitzen daher „wasserstoffartige“ Spektren. Das Leuchtelektron im Natrium sieht nicht die volle Kernladung, sondern näherungsweise ein vom Neonrumpf mit 10 Elektronen teilweise abgeschirmtes kugelsymmetrisches Potential  $V(r)$ , das sich in Kernnähe dem Coulombpotential des Kerns

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3)$$

und für große Radien dem Wasserstoffpotential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

annähert. Da das Potential kein Coulombpotential mehr ist, wird die 1-Entartung des Wasserstoffspektrums aufgehoben. Die Energieniveaus hängen

nicht mehr nur von der Hauptquantenzahl  $n$  ab sondern auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$ . In guter Näherung können die Energierterme in der Form

$$E_{n,l} = -13,6eV \frac{1}{(n - \Delta_{l,n})^2} \quad (5)$$

geschrieben werden, wobei die Korrektur  $\Delta_{l,n}$  nur wenig von  $n$  abhängt und daher näherungsweise als  $\Delta_l$  geschrieben werden kann. Anschaulich ist klar, dass s-Elektronen im Mittel näher am Kern sind als p- Elektronen und dass d-Elektronen im Mittel große Abstände vom Kern und den anderen Elektronen haben. Zu einem festen Wert der Hauptquantenzahl  $n$  liegt also das s-Niveau am tiefsten und das d-Niveau am höchsten. Das Energiespektrum mit den wichtigsten Übergängen ist in Abbildung 4 gezeigt. Das Valenzelektron ist im Grundzustand im 3s-Zustand. Die Hauptserie entspricht den Übergängen  $np \rightarrow 3s$ , also zum Grundzustand. Die bekannteste Linie ist das gelbe Dublett bei 589 nm. Zum 3p-Zustand führen die beiden Nebenserien  $nd \rightarrow 3p$  (1. Nebenserie) und  $ns \rightarrow 3p$  (2. Nebenserie), die ebenfalls Linien im hier beobachtbaren Spektralbereich liefern. Das beobachtbare Spektrum ist in Abbildung 5 skizziert.

Welche Energieniveaus in der Na-Lampe durch die elektrische Entladung mit welcher Häufigkeit angeregt werden, hängt vom Druck und der Feldstärke in der Gasentladung ab und diese ist in der Lampe nicht konstant. Das Spektrum hängt daher davon ab, welcher Teil der Gasentladung in das Spektrometer abgebildet wird.

## VI Durchführung des Versuchs

- Die Leuchtstofflampen im Versuchsraum dürfen während den Messungen nicht eingeschaltet sein! Sie werden sonst immer durch Streulicht störende Linien beobachten.
- Die Lichtleitfaser vom Objektiv zum Spektrometer darf auf keinen Fall geknickt werden.

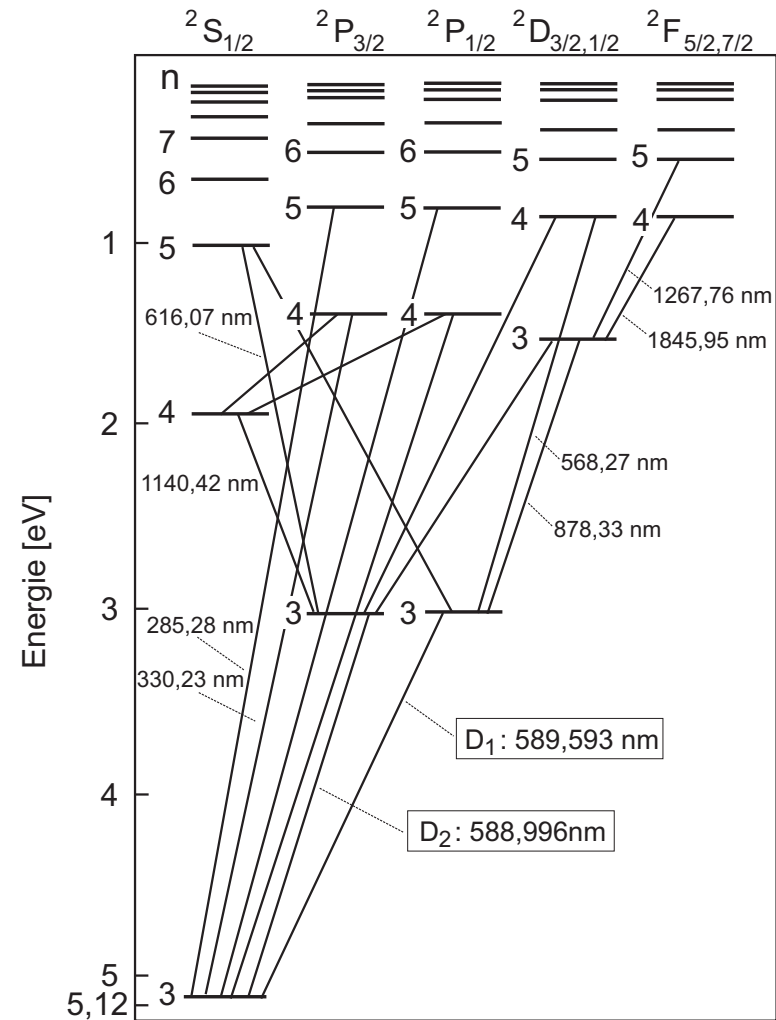


Abbildung 4: Energieschema und Photonübergänge im Natriumatom (Grotrian-diagramm).

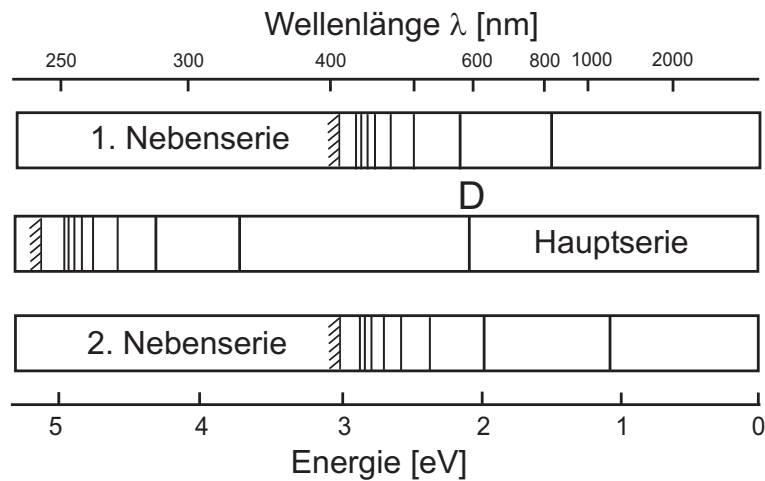


Abbildung 5: *Spektren der Natriumserien. Diese sind im Experiment natürlich überlagert. Zur Auswertung müssen die beobachteten Linien den Serien zugeordnet werden.*

### VI.1 Bedienung des Spektrometers und der Software

Im Versuch wird ein computergesteuertes Gitterspektrometer (Abbildung 6) eingesetzt, das es erlaubt, den Spektralbereich einer Lichtquelle von 180 nm bis 950 nm zu registrieren. Die zu untersuchende Lichtquelle wird über ein Objektiv und einer Lichtleitfaser in das Spektrometer eingekoppelt und über ein optisches Gitter auf eine CCD- Zeile mit 3648 Pixel abgebildet. Dabei entspricht ein Pixel einem Wellenlängenintervall von 0,21 nm. Die Auflösung des Spektrometers beträgt etwa 1 nm. Das verfügbare Datenerfassungsprogramm **SpectraSuite** erlaubt es den Dunkelstrom zu messen und bei der Datenaufnahme automatisch abzuziehen. Zur Reduzierung von Fluktuationen kann automatisch über viele Scans gemittelt werden. Die Auswertung der Spektren erfolgt mit dem Programm **Python**.

Starten Sie das Programm **SpectraSuite** vom Desktop aus. Dabei sollte die Datenaufnahme des Spektrometers im Scope-Mode **S** automatisch gestartet werden. In diesem Modus wird das Spektrum mit der angegebenen Integrationszeit kontinuierlich gemessen und dargestellt. Sie sehen dann ein Fenster gemäß Abbildung 7. Wenn das Spektrometer vom Programm erkannt wird, erscheint links

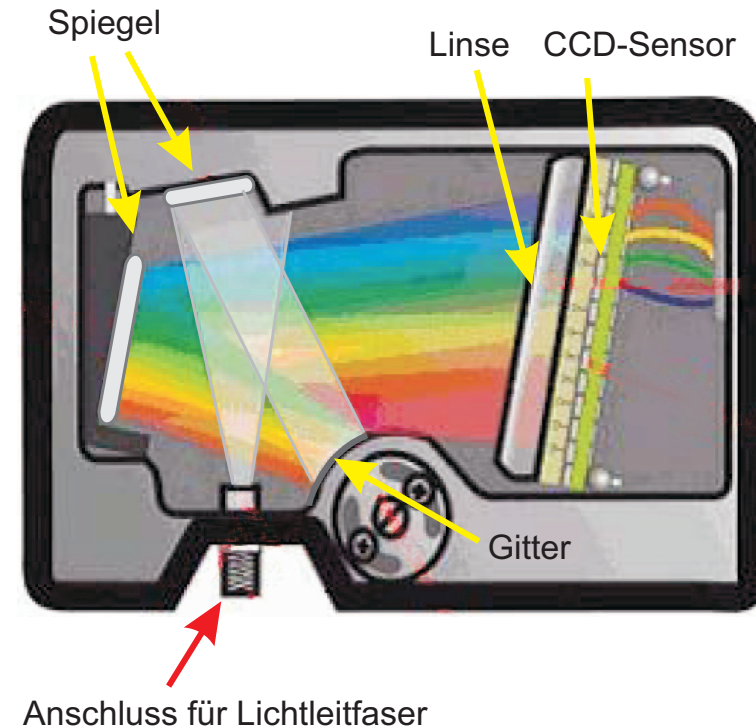


Abbildung 6: *Strahlengang im Gitterspektrometer.*

das Spektrometersymbol. Sollte das Spektrometer nicht angezeigt werden, dann überprüfen Sie ob der Netzstecker eingesteckt und der USB-Stecker des Spektrometers angeschlossen ist. Anschließend im Menü auf *Spektrometer* und *Nach Geräten suchen* klicken. Falls kein Graph angezeigt wird, müssen Sie auf *Datei* → *Neu* → *Spektrum anzeigen* klicken.

#### VI.1.1 Messung im Scope- Modus

Im Scope- Modus werden kontinuierlich Spektren aufgenommen und grafisch dargestellt. Schalten Sie eine Lichtquelle ein und richten Sie das Objektiv auf die Lichtquelle aus. Bei Bewegung sollten Sie beobachten, wie sich das angezeigte Spektrum ändert. Das Maximum des angezeigten Spektrums sollte bis mindes-

tens 2/3 des Skalenbereichs gehen. Fixieren Sie das Objektiv an der Stativstange. Die Anpassung der gewünschten Intensität erfolgt über den Abstand des Sammelobjektivs von der Lichtquelle, die Irisblende und letzten Endes die Auswahl der Integrationszeit. Reduzieren Sie die Integrationszeit, wenn die Intensität zu hoch ist, d.h. das Spektrum gesättigt ist, vergrößern Sie die Integrationszeit oder verbessern Sie die Lichtsammlung, wenn sie zu klein ist. Sie können das Rauschen des Spektrums verringern, indem Sie über mehrere Einzelmessungen mitteln. Dazu im Feld Scans für Mittelwert die Zahl der Einzelmessungen eintragen. Die Gesamtzeit der Datenaufnahme sollte 4 Sekunden nicht übersteigen.

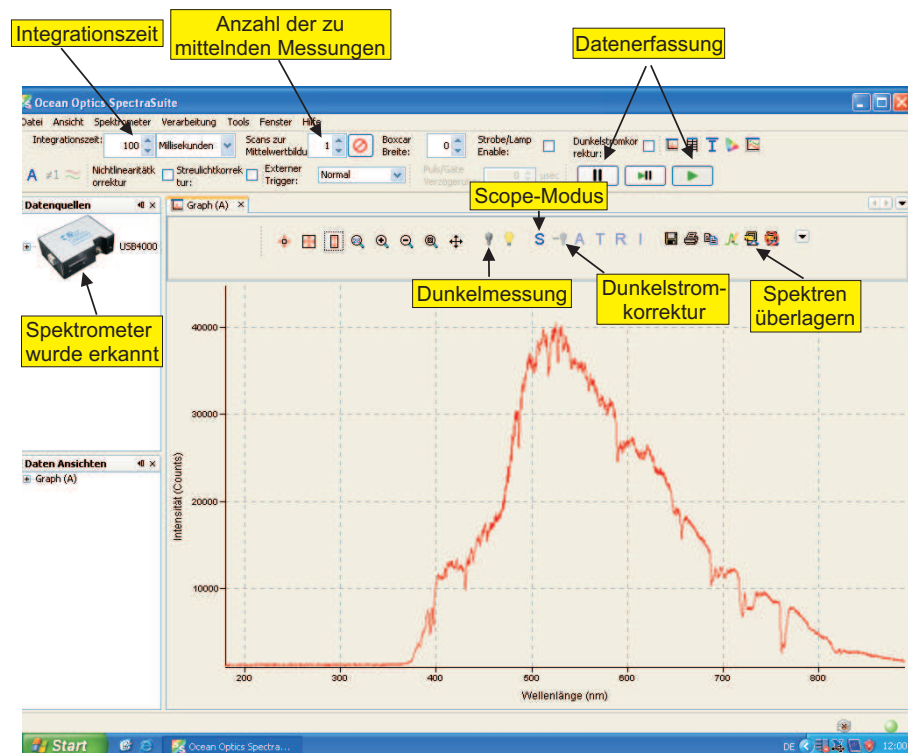






Abbildung 7: Oberfläche des Datenerfassungsprogramms.

### VI.1.2 Dunkelmessung

Die CCD- Zeile des Spektrometers liefert auch dann ein von Null verschiedenes Signal, wenn kein Licht einfällt. Daher muss der Dunkelstrom für quantitative Messungen vom Spektrum abgezogen werden. Das Datenerfassungsprogramm hat diese Option integriert:

- **Dunkelstromkorrektur:** Stellen Sie zunächst die gewünschte Integrationszeit und die Anzahl der Messungen zur Mittelwertbildung ein. Lösen Sie vorsichtig den SMA- Stecker der Lichtleitfaser am Spektrometereingang und decken Sie die Lichteintrittsöffnung mit dem Daumen ab, so dass kein Licht in das Spektrometer gelangt. Klicken Sie auf das Symbol der Dunkelmessung  und anschließend auf .
- **Spektrum aufnehmen und speichern:** Schließen Sie die Lichtleitfaser wieder an das Spektrometer an und starten Sie die Aufnahme im Modus *Scope - Dunkelspektrum* . Wenn Sie nun um eine Messung aufzunehmen auf das Symbol  klicken, wird automatisch der Dunkelstrom vom aufgenommenen Spektrum abgezogen. Speichern Sie Ihre gemessenen Spektren (auf das Diskettensymbol klicken). Es öffnet sich ein Fenster. Geben Sie eine Zieldatei ein und einen Namen für das Datenfile. Sie sollten die Messdaten doppelt speichern: Einmal als interne SpectraSuite- Datei mit der Endung \*.ProcSpec und einmal als Textdatei (Tab getrennt) mit der Endung \*.txt. Diese Datei kann später in der Auswertungssoftware Python importiert werden.

Nehmen Sie so nacheinander alle gewünschten Spektren auf. **Falls Sie die Integrationszeit oder die Zahl der Scans zur Mittelung ändern, müssen Sie - bevor Sie das neue Spektrum im Modus *Scope - Dunkelspektrum* aufnehmen können - eine neue Dunkelmessung machen und abspeichern!**

## VII Messungen

### VII.1 Sonnenspektrum

Registrieren und speichern Sie nacheinander die auf den Dunkelstrom korrigierten Spektren von:

- Himmelslicht bei geöffneten Fenster. Falls die Sonne scheint richten Sie das Objektiv möglichst zum blauen Himmel aus.
- Himmelslicht hinter Fensterglas.
- Falls die Sonne scheint, nehmen Sie auch noch das direkte Sonnenlicht auf.

### VII.2 Qualitativer Vergleich einfacher Lichtquellspektren

Die folgenden Messungen werden nur qualitativ durchgeführt. Sie können auf die Dunkelstrommessung verzichten, d.h. es reicht, das im Scopemodus aufgenommene Bild. Nehmen Sie für folgende Lichtquellen das Spektrum auf und speichern Sie diese als interne `SpectraSuite`- Datei mit der Endung `*.ProcSpec`:

- Glühlampe
- Halogenlampe
- Energiesparlampe
- verschiedene LED's
- Laser.

Führen Sie im Anschluss der Messung direkt die Auswertung durch.



### VII.3 Natriumspektrum

**Schließen Sie die Spektrallampen niemals direkt an die Steckdose an sondern nur an das Vorschaltgerät (Drossel)!**


Schließen Sie die Natriumlampe an das Vorschaltgerät (Drossel) an und schalten Sie die Drossel ein. Die Lampe braucht längere Zeit um zu zünden und bis sie stabil brennt. Richten Sie das Objektiv auf die Lichtquelle aus. Es ist sofort klar, dass die gelbe Natriumlinie alle anderen Linien weit überstrahlt. Wählen Sie den Abstand bzw. die Blendenöffnung so, dass die gelbe Linie bei einer Integrationszeit von 5 ms gerade in Sättigung geht.

#### VII.3.1 Aufnahme der Linien kleiner Intensität

Versuchen Sie zunächst im Scope- Modus möglichst viele schwache Linien des Natriums zu registrieren, die nach Abbildung 5 überwiegend im Bereich zwischen 400 nm und 540 nm liegen.

Wählen Sie mit dem Zoomwerkzeug  daher diesen Wellenlängenbereich zur Darstellung aus indem Sie ein Rechteck um den gewünschten Bereich ziehen. Klicken Sie danach auf  um die Intensität auf den vollen Bereich zu skalieren. Drehen Sie jetzt vorsichtig das Objektiv, so dass dieses den „Fuss“ der Gasentladung abbildet. Sie sollten sehen, wie eine Schar von Linien zwischen 400 nm und 540 nm erscheint. Falls diese nicht sehr deutlich sind, erhöhen Sie die Integrationszeit, so dass noch keine Linie in Sättigung ist. Maximieren Sie die Intensität der Linien durch vorsichtiges Drehen des Objektivs. Wählen Sie zum Schluss die Zahl der Scans zur Mittelwertbildung so, dass eine Gesamtaufnahmezeit von etwa 4 Sekunden entsteht.

Registrieren Sie nun ein auf den Dunkelstrom korrigiertes Spektrum. Achten Sie darauf, dass bei der Dunkelstrommessung nicht aus Versehen das Objektiv bewegt wird! Wenn das Spektrum auf dem Bildschirm vernünftig aussieht, dann speichern Sie es im `SpectraSuite`- Format und als Textfile.

Es wird immer der gesamte Spektralbereich aufgezeichnet. Wenn Sie sich daher zum Schluss den gesamten Spektralbereich anschauen (Klick auf ) , dann werden Sie feststellen, dass die intensiven Linien, insbesondere die Na-D Linie, in Sättigung sind. Es ist daher notwendig das Spektrum der intensiven Linien nochmals aufzunehmen.

#### VII.3.2 Aufnahme des Spektrums der intensiven Linien


Schauen Sie sich das gesamte Spektrum im Scopemodus an und reduzieren Sie die „Intensität“ durch kurze Integrationszeit und Schließen der Irisblende so weit, dass die Na-D Linie nicht mehr in Sättigung ist. Nehmen Sie dann ein auf den Dunkelstrom korrigiertes Spektrum mit diesen Einstellungen auf.

Überzeugen Sie sich, dass Sie in der unmittelbaren Umgebung der Na-D Linie zwei Linien bei ca. 620 nm und 570 nm beobachten, die vorher überdeckt waren.

**Beginnen Sie nach Beendigung der Messung unmittelbar mit der Auswertung der Daten.**

## VIII Auswertung

### VIII.1 Auswertung der unterschiedlichen Lichtquellen

Erstellen Sie ein Diagramm in dem die verschiedenen Lichtquellen miteinander verglichen werden. Hierzu ist es am einfachsten, in **SpectraSuite** dem letzten gemessenen Spektrum (z.B. dem LED-Spektrum) die anderen Spektren zu überlagern. Hierzu auf das Symbol  klicken und das zu überlagernde Spektrum auswählen. Für jedes Spektrum wird automatisch eine andere Farbe gewählt. Direkt ausdrucken (farbig) und von Hand beschriften. Schätzen Sie für jedes Spektrum die mittlere Wellenlänge ab und diskutieren Sie die Ergebnisse. Nach welchem Prinzip wird das Licht der weißen LED erzeugt? Welche Lampen sind warm, kalt?

## IX Auswertung in Python mit Jupyter Notebook

Führen Sie die Rechnungen in einem vollständig dokumentierten Jupyter Notebook durch und legen Sie es Ihrer schriftlichen Ausarbeitung ausgedruckt bei. Starten Sie das Programm **Jupyter** vom Desktop aus.

### IX.1 Auswertung des Sonnenspektrums

**Glasabsorption:** Kopieren Sie alle Ihre Messung (Textdateien) in den Ordner **data** auf dem Desktop. Schauen Sie sich die Messung des Himmellichts an. Die Datei besitzt 17 Headerzeilen und besteht aus 2 Spalten. Als Dezimaltrennzeichen werden Kommas verwendet. Die letzte Zeile ist eine Kommentarzeile die mit dem Zeichen > beginnt. Um die Daten zu importieren müssen wir alle Header- und Kommentarzeilen ausblenden und alle Kommas durch Punkte er-

setzen. Das können Sie entweder direkt in der Datei machen oder von Python aus.

Wir benötigen die folgenden Module:

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Das Ersetzen der Kommas geht mit folgender Funktion:

```
def comma_to_float(valstr):
    return float(valstr.decode("utf-8").replace(',', '.'))
```

Zum Importieren verwenden wir die Numpy-Funktion `loadtxt()`. Wir müssen den Pfad/Dateiname der Messung des Himmellichts ohne Glas angeben. Desweiteren werden die erste 17 Zeilen übersprungen. Der converter ersetzt alle Kommas durch Dezimalpunkte. Mit der Option `unpack=True` wird jede Spalte getrennt in die Arrays `lamb_og`, `inten_og` geschrieben, `comments=>` blendet die letzte Kommentarzeile aus:

```
lamb_og, inten_og=np.loadtxt('data/himmel_o_g.txt', skiprows=17,
                             converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                             comments='>', unpack=True)
```

Analog importieren Sie die Messung des Himmellichts mit Glas.

```
lamb_mg, inten_mg=np.loadtxt('data/himmel_m_g.txt', skiprows=17,
                              converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                              comments='>', unpack=True)
```

Tragen Sie beide Spektren mit und ohne Fensterglas in ein gemeinsames Diagramm ein (Abbildung 8).

```
plt.plot(lamb_og, inten_og, label='ohne Fenster')
plt.plot(lamb_mg, inten_mg, label='mit Fenster')
plt.title('Gemessenes Sonnenspektrum mit und ohne Fenster')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E.')
plt.legend()
plt.grid()
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((250,900))
plt.savefig("figures/Himmel_m_o_G.pdf", format="pdf")
```



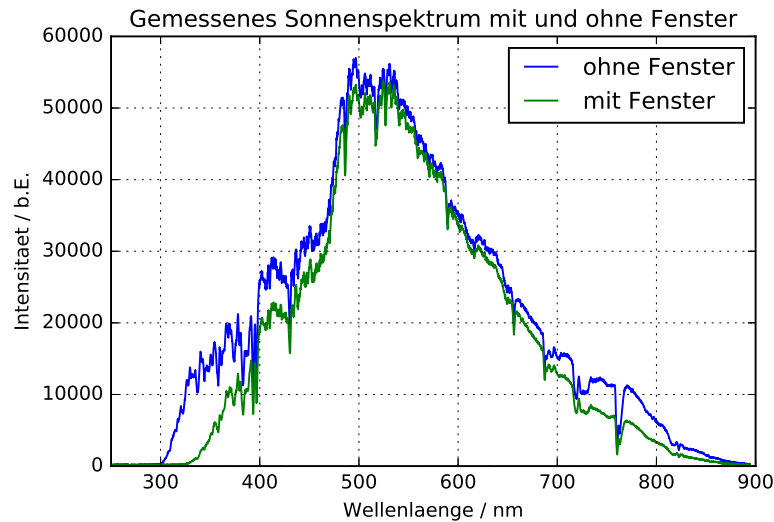


Abbildung 8: *Himmelspektrum gemessen einmal durch ein Glasfenster und einmal direkt ohne ein Glasfenster.*

Berechnen Sie die Absorption von Glas:

$$A_{Glas} = 1 - \frac{I_{mG}(\lambda)}{I_{oG}(\lambda)}, \quad (6)$$

wobei  $I_{mG}$  die gemessene Intensität mit und  $I_{oG}$  ohne Fensterglas darstellen. Zeichnen Sie das Diagramm nur für Wellenlängen größer als 320 nm (Abbildung 9).

`A=1-inten_mg/inten_og`

```
plt.plot(lamb_mg, A)
plt.title('Absorption von Glas')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Absorption / b.E.')
plt.ylim((0,1))
```

```
plt.xlim((320,800))
plt.savefig("figures/Absorption_Glas.pdf", format="pdf")
```

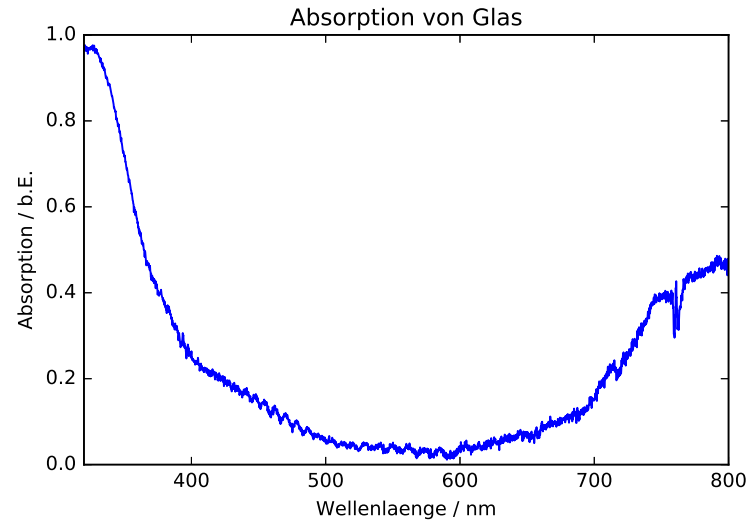


Abbildung 9: *Wellenlängenabhängigkeit der Absorption von Fensterglas.*

Drucken Sie beide Diagramme aus. Was können Sie über die Absorption von Glas sagen? **Fraunhoferlinien:** Zeichnen Sie ein neues Diagramm des Sonnenspektrums (Direktlicht oder Himmelslicht ohne Glas) um die wichtigsten Fraunhoferlinien zu identifizieren. Schalten Sie mit `%matplotlib notebook` in den interaktiven Modus von Matplotlib. Die Diagramme werden dann in einem externen Fenster dargestellt und Sie haben die Möglichkeit zu zoomen und die Daten mit einem Cursor auszumessen. Falls die Ausgabe nicht in einem externen Fenster erfolgt, müssen Sie den Kernel neu starten (Menu → Kernel → Restart), `%matplotlib inline` durch `%matplotlib notebook` ersetzen und alle Zellen nochmals ausführen (Menu → Cell → Run All).

```
%matplotlib notebook
plt.plot(lamb_og, inten_og)
plt.title('Sonnenspektrum')
```

```
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E. ')
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((350,800))
plt.savefig("figures/Fraunhofer.pdf", format="pdf")
```

Zeichnen Sie nur den Wellenlängenbereich von 350 nm bis 800 nm. Messen Sie zuerst die Wellenlängen der bekannten Linien der Balmerreihe von Wasserstoff. Eine Übersicht der wichtigsten Fraunhoferlinien und die Balmerreihe finden Sie im Anhang. Wo erwarten Sie die gelbe Heliumlinie? Markieren Sie die gefundenen Fraunhoferlinien von Hand auf einem Ausdruck und heften Sie diesen in Ihr Protokollbuch ein. Vergleichen Sie Ihre gemessenen Werten mit den Literaturwerten.

## IX.2 Auswertung des Natriumspektrums

Kopieren Sie Ihre Messung des Natriumspektrums kleiner Intensität in den Ordner `data` auf dem Desktop und importieren diese in Ihr Notebook. Tragen Sie die Daten in ein interaktives Diagramm ein.

```
lamb_og, inten_og=np.loadtxt('data/Na1.txt', skiprows=17,
                             converters= {0:comma_to_float, 1:comma_to_float},
                             comments='>', unpack=True)
```

```
plt.plot(lamb, inten)
plt.title('Natriumspektrum geringer Intensitaet')
plt.xlabel('Wellenlaenge / nm')
plt.ylabel('Intensitaet / b.E. ')
plt.yscale('log')
plt.ylim((0,60000))
plt.xlim((350,800))
```

### • Starke Linien:

- Schauen Sie sich zuerst das Gesamtspektrum für die Linien hoher Intensität zwischen 300 nm und 850 nm mit logarithmischer Intensitätsskala an.
- Drucken Sie das Spektrum aus.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Zoomfunktion und dem Cursor die Wellenlängen der intensiven, klar erkennbaren Linien und tragen Sie diese von Hand in das Diagramm ein. Schätzen Sie den Fehler der Wellenlänge aus der Halbwertsbreite der jeweiligen Linie ab.

### • Schwache Linien:

- Importieren Sie die entsprechende Messung wie zuvor und tragen Sie diese in ein interaktives Diagramm ein.
- Zeichnen Sie das Spektrum im Bereich 300 nm bis 540 nm mit logarithmischer Intensitätsskala und bestimmen Sie die Wellenlängen mit Fehlern der beobachteten Linien (Abbildung 10). Drucken Sie das Diagramm aus und tragen Sie die gefundenen Werte in das Diagramm ein.
- Zeichnen und drucken Sie das Spektrum im Bereich 600 nm bis 850 nm und bestimmen Sie die Wellenlängen mit Fehlern.

## IX.3 Zuordnung der gefundenen Linien zu Serien

Die gefundenen Linien müssen zunächst den drei Serien des Natriums zugeordnet werden. Berechnen Sie hierzu die ungefähren Wellenlängen der Linien für jede Serie und vergleichen Sie diese mit den beobachteten Linien.

### IX.3.1 Erwartete Linien für die 1. Nebenserie: $md \rightarrow 3p$

Bei diesen Übergängen können Sie in erster Näherung annehmen, dass der Korrekturterm für die d-Energieniveaus Null ist. Dann gilt für die Wellenlänge  $\lambda_m$  der einzelnen Übergänge:

$$\frac{hc}{\lambda_m} = E_{Ry}[\text{eV}]/m^2 - E_{3p}[\text{eV}], \quad (7)$$

bzw.

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx \frac{1,2398 \times 10^3[\text{nm eV}]}{-13,605 \text{ eV}/m^2 - E_{3p}[\text{eV}]} \quad (8)$$

Hier beschreiben  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $E_{Ry} = -13,605 \text{ eV}$  die Rydbergenergie.  $m$  ist die Hauptquantenzahl des

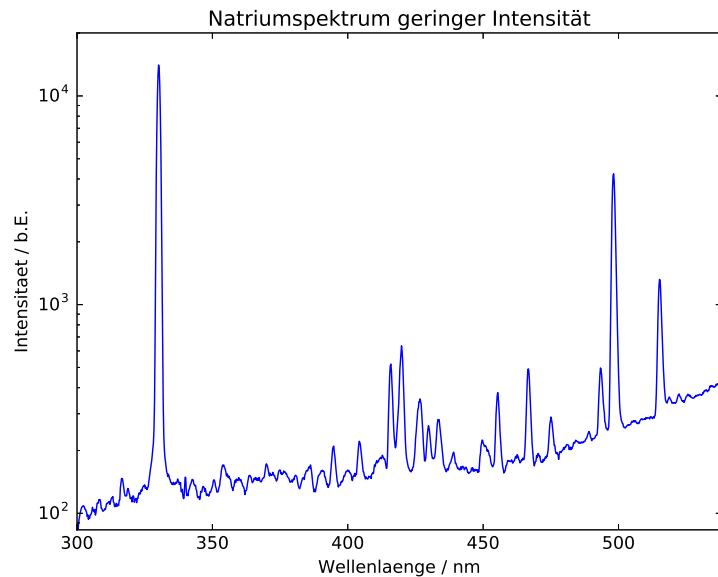


Abbildung 10: Natriumspektrum im Bereich 300 nm bis 540 nm.

d-Niveaus und  $E_{3p}$  die Energie des 3p Zustandes in Elektronenvolt. Der Vorfaktor  $hc$  berechnet sich zu  $hc = 1,2398 \times 10^3$  [nm eV].

Ordnen Sie der gemessenen Linie im Bereich von 819 nm den Wert  $m = 3$  zu und berechnen Sie damit  $E_{3p}$ . Benutzen Sie immer die gemessenen Wellenlängen auf eine Stelle nach dem Komma. Berechnen Sie die erwarteten Wellenlängen für die Nebenserie bis  $m = 12$  und versuchen Sie die gefundenen Linien zuzuordnen.

```
for m in range(3,13):
    l=1.2398E3/(-13.605/m**2-E_3p)
    print('m={m:2d}, lambda={l:6.2f}'.format(m=m,l=l))
```

Legen Sie im Protokollbuch eine Tabelle für diese Serie an und tragen Sie die gemessenen Wellenlängen als Funktion von  $m$  ein. Achtung: Wenn Sie sich nicht sicher sind, ob eine Linie zugeordnet werden kann, dann lassen Sie es. Falsche Zuordnungen sind viel schlimmer als eine Linie weniger! Falls eine Wellenlänge in einer Serie fehlt, schauen Sie nach, ob Sie diese übersehen haben.

### IX.3.2 Erwartete Linien für die 2. Nebenserie: $ms \rightarrow 3p$

Nutzen Sie aus, dass die gelbe D-Linie des Natriums bei  $\lambda = 589$  nm dem Übergang  $3p \rightarrow 3s$  entspricht und berechnen Sie die Bindungsenergie (in eV) des Grundzustands:

$$E_{3s} = E_{3p} - 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / \lambda \quad (9)$$

und berechnen Sie aus  $E_{3s}$  den Korrekturfaktor  $\Delta_s$  gemäß

$$E_{3s} = -13.605 \text{ eV} / (3 - \Delta_s)^2. \quad (10)$$

Berechnen Sie damit die Wellenlängen der zweiten Nebenserie für  $m = 4$  bis 9:

$$\lambda_m [\text{nm}] \approx \frac{1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}]}{-13,605 \text{ eV} / (m - \Delta_s)^2 - E_{3p} [\text{eV}]} \quad (11)$$

Ordnen Sie wie zuvor die gemessenen Linien dieser Serie zu und tragen Sie diese in eine Tabelle ein.

### IX.3.3 Erwartete Linien für die Hauptserie: $mp \rightarrow 3s$

Berechnen Sie aus  $E_{3p}$  den Korrekturfaktor  $\Delta_p$ :

$$E_{3p} = -13,605 \text{ eV} / (3 - \Delta_p)^2 \quad (12)$$

und bestimmen Sie wieder die Wellenlängen für  $m = 4$  bis 5:

$$\lambda_m [\text{nm}] \approx \frac{1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}]}{-13,605 \text{ eV} / (m - \Delta_p)^2 - E_{3s} [\text{eV}]} \quad (13)$$

Vergleichen Sie diese mit den gemessenen Linien (falls vorhanden).

Es bleiben Linien sichtbar, die keiner der drei Serien zugeordnet werden können insbesondere bei Wellenlängen über 700 nm. Diese kommen z.T. von Krypton. Ignorieren Sie diese Linien.

## IX.4 Bestimmung der Serienenergien und der l-abhängigen Korrekturfaktoren

Benutzen Sie die gemessenen Wellenlängen der Serien um die Rydbergenergie  $E_{Ry}$ ,  $E_{3p}$  und die Korrekturterme  $\Delta_d$  und  $\Delta_s$  zu bestimmen. Tragen Sie Ihre

gefundenen Linien mit Fehlern und die dazugehörigen Quantenzahlen in Arrays ein. Die folgenden Zahlenwerte sind nur Beispiele und entsprechen nicht den wahren Werten!

```
wellenl=np.array([819.1,569.9,499.5,468.3,451.3,
                 441,434.8,431.6,428.3,421.4])
fehler=np.array([2,1,1,1,1,1,1,1,1,2])
quantenz=np.arange(3,13)
```

Tragen Sie Ihre Messwerte in ein Diagramm ein.

```
plt.errorbar(quantenz,wellenl,fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Quantenzahl')
plt.ylabel('Wellenlaenge / nm')
plt.title('1. Nebenserie des Na-Atoms')
```

Für die erste Nebenserie wählen Sie die Funktion

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / [E_{Ry} / (m - \Delta_d)^2 - E_{3p}] \quad (14)$$

mit  $E_{Ry}$ ,  $E_{3p}$  und  $\Delta_d$  als freie Parameter.

```
from scipy.optimize import curve_fit
def fit_func(m,E_Ry,E_3p,D_d):
    return 1.2398E3/(E_Ry/(m-D_d)**2-E_3p)
```

Mit `para = [-13.6,-3,-0.02]` werden die Startparameter in der Reihenfolge wie sie in der Funktion definiert wurden initialisiert. Mit der Funktion `curve_fit()` wird die Anpassung durchgeführt. Das Ergebnis, d.h. die Parameter werden im Array `popt` gespeichert und deren Varianzen befinden sich auf der Diagonalen der Kovarianzmatrix `pcov`. Falls der Fit nicht konvergiert, müssen Sie Startparameter ändern.

```
para = [-13.6,-3,-0.02]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, quantenz, wellenl,
                      sigma=fehler ,p0=para)
```

Lassen Sie sich die Fitergebnisse ausgeben:

```
print("E_Ry=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("E_3p=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("D_d=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
```

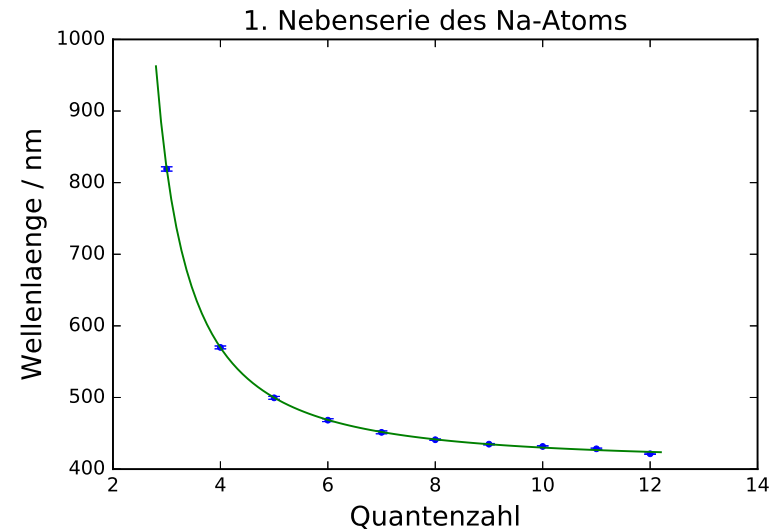


Abbildung 11: 1. Nebenserie des Na-Atoms.

Diskutieren Sie die Güte des Fits. Berechnen Sie die  $\chi^2$ -Summe:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left( \frac{\text{Funktionswert}_i - \text{Messwert}_i}{\text{Fehler}_i} \right)^2 \quad (15)$$

und  $\chi_{red}^2 = \chi^2 / \text{Freiheitsgrad}$ . Der Freiheitsgrad berechnet sich aus der Anzahl der Messwerte abzüglich der Zahl der Fitparameter.

```
chi2=np.sum((fit_func(quantenz,*popt)-wellenl)**2/fehler**2)
dof=len(quantenz)-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad
chi2_red=chi2/dof
print("chi2=", chi2_)
print("chi2_red=",chi2_red)
```

Berechnen Sie noch die „Fitwahrscheinlichkeit“, das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einer Wiederholungsmessung ein  $\chi^2$ - Wert erhalten, der größer oder gleich Ihrem  $\chi^2$ - Wert ist.

```

from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chi2_,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit:", prob,"%")

```

Vergleichen Sie die Fitergebnisse mit den zuvor berechneten Werten. Hinweis:  $\Delta_d$  ist eine empirische Näherungsformel. In Wirklichkeit hängt diese Größe auch noch schwach von der Hauptquantenzahl  $n$  ab. Wundern Sie sich daher nicht, wenn die Wahrscheinlichkeit des Fits nicht so gut ist.

Zeichnen Sie die erhaltene Funktion mit Parametern in das Diagramm mit Ihren Messwerten. Mit `*popt` werden die gefundenen Parameter automatisch in Ihre Funktion entpackt. Die Abszissenwerte für die Funktion generieren wir mit `linspace()`.

```

plt.errorbar(quantenz,wellenl,fehler, fmt=".")
plt.xlabel('Quantenzahl')
plt.ylabel('Wellenlaenge / nm')
plt.title('1. Nebenserie des Na-Atoms')
x=np.linspace(2.8,12.2, 100)
plt.plot(x, fit_func(x,*popt))
plt.savefig("figures/1_Nebenserie.pdf", format="pdf")

```

Ihr Diagramm sollte so ähnlich wie Abbildung 11 aussehen.

Wiederholen Sie die Anpassung für die zweite Nebenserie. Hier müssen Sie die Funktion

$$\lambda_m[\text{nm}] \approx 1,2398 \times 10^3 [\text{nm eV}] / [E_{Ry} / (m - \Delta_s)^2 - E_{3p}] \quad (16)$$

anfitten.

## X Anhang

Symbol	Wellenlänge (nm)	Element/Molekül
A	759,4	telluric oxygen
B	686,7	telluric oxygen
C	656,3	hydrogen
D <sub>1</sub>	589,6	sodium
D <sub>2</sub>	589,0	sodium
D <sub>3</sub>	587,6	helium
E	527,0	iron and calcium
b <sub>1</sub>	518,4	magnesium
F	486,1	hydrogen
G	430,8	iron and calcium
H	396,8	calcium
K	393,4	calcium

Tabelle 1: *Fraunhoferlinien.*

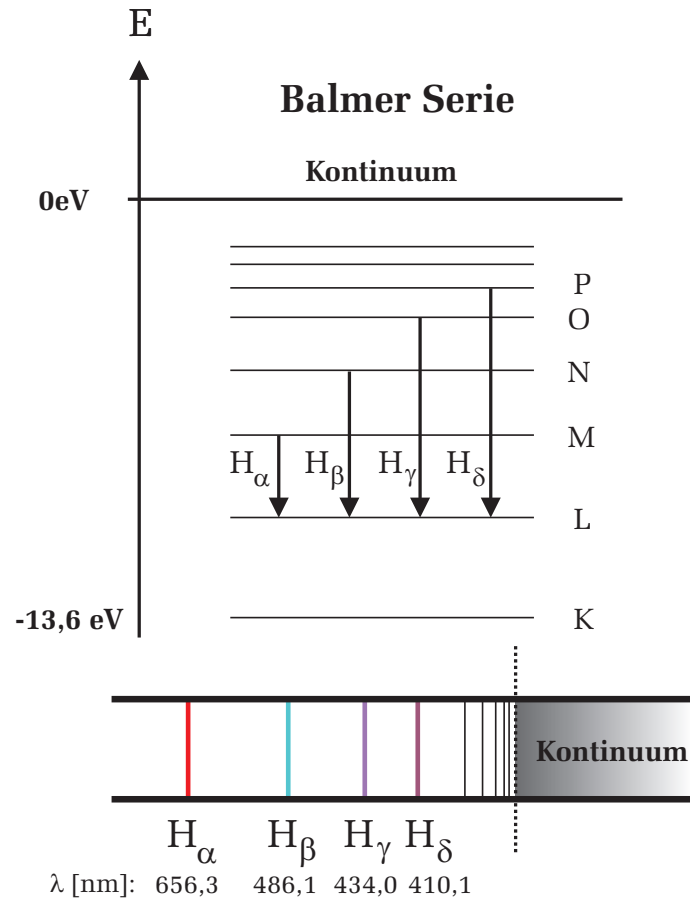


Abbildung 12: *Balmerserie des Wasserstoffatoms.*

