



Einführung in die Grundlagen der Fehlerrechnung

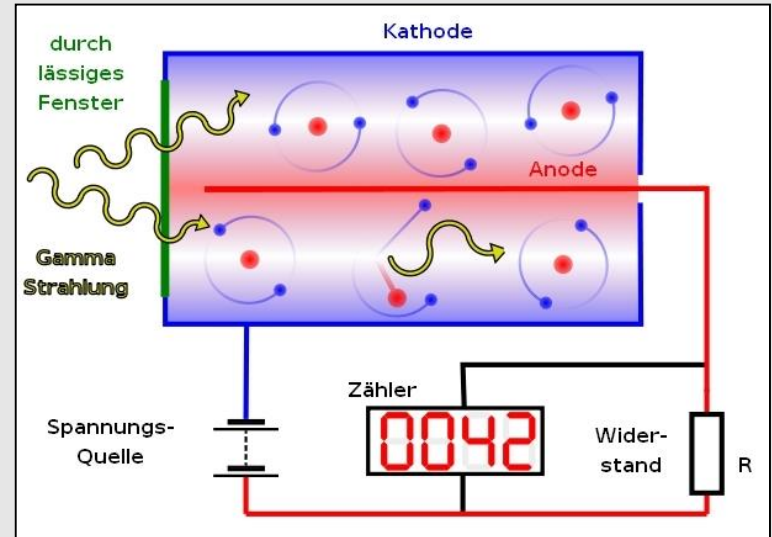
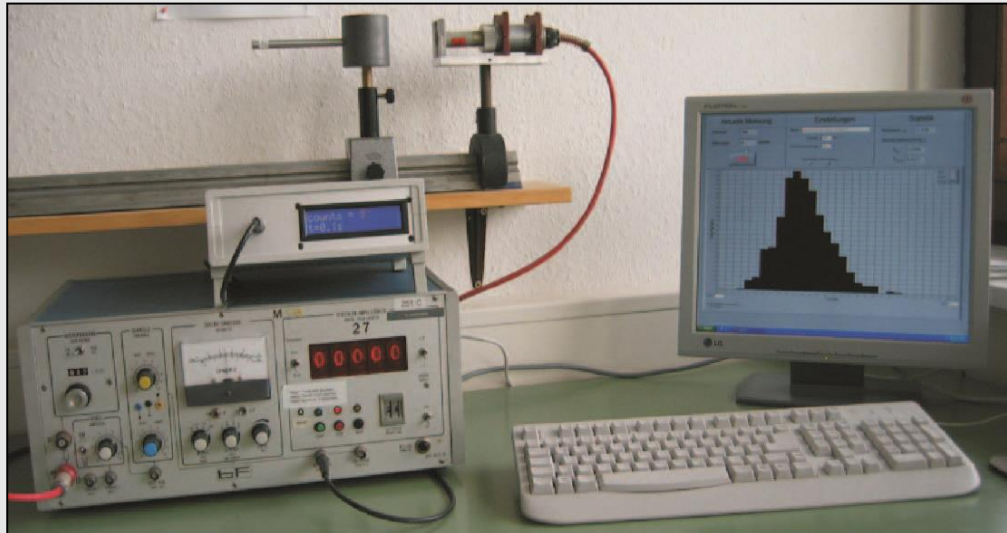
Bestimmung von Messunsicherheiten

Gliederung

- Angabe von Messergebnissen
- Ursache und Arten von Messunsicherheiten
- Berechnung von zufälligen Messunsicherheiten
- Gaussverteilung & Fehlerfortpflanzung
- Graphische Darstellung

Experimentelle Demonstration

Versuch 251: Statistik des radioaktiven Zerfalls



Fehlerangabe

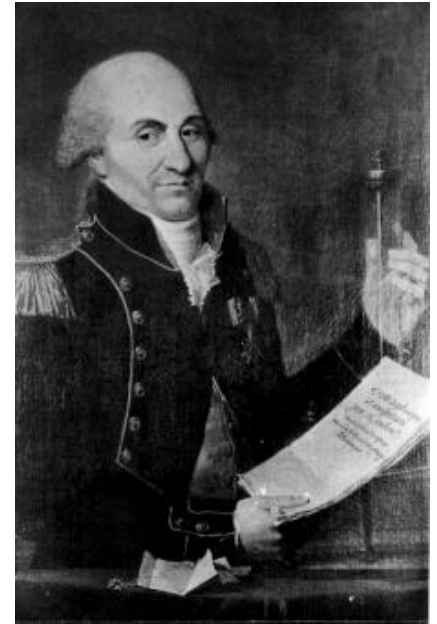
Warum ist die Aussage:

“Ich habe die Elementarladung gemessen,
sie beträgt $1,602 \times 10^{-19}$ Coulomb”

falsch ?

Jede Messung ist mit einem Messfehler behaftet.

Es gibt keine Messung die unendlich genau ist!



Charles Augustin de Coulomb
(1736–1806)

Zwei unabhängige Messungen ergeben ungleiche Resultate:

Nur wenn man die jeweiligen Messfehler angibt, kann man

diskutieren, ob die beiden Messungen - *innerhalb der Fehlergrenzen* -

in Übereinstimmung sind oder nicht !

Fehlerangabe

Um ein theoretisches Modell experimentell durch eine Messung zu überprüfen, muss die Qualität und die Aussagekraft der Messung bekannt sein.

Beispiel:

Die Bestimmung der Elementarladung ergab folgende Ergebnisse:

Messung 1: $e = (1,7 \pm 0,1) \times 10^{-19} \text{ C}$

Messung 2: $e = (1,62 \pm 0,01) \times 10^{-19} \text{ C}$

Welche Aussage kann über die beiden Messungen getroffen werden?

Messung 1 ist konsistent mit dem Literaturwert

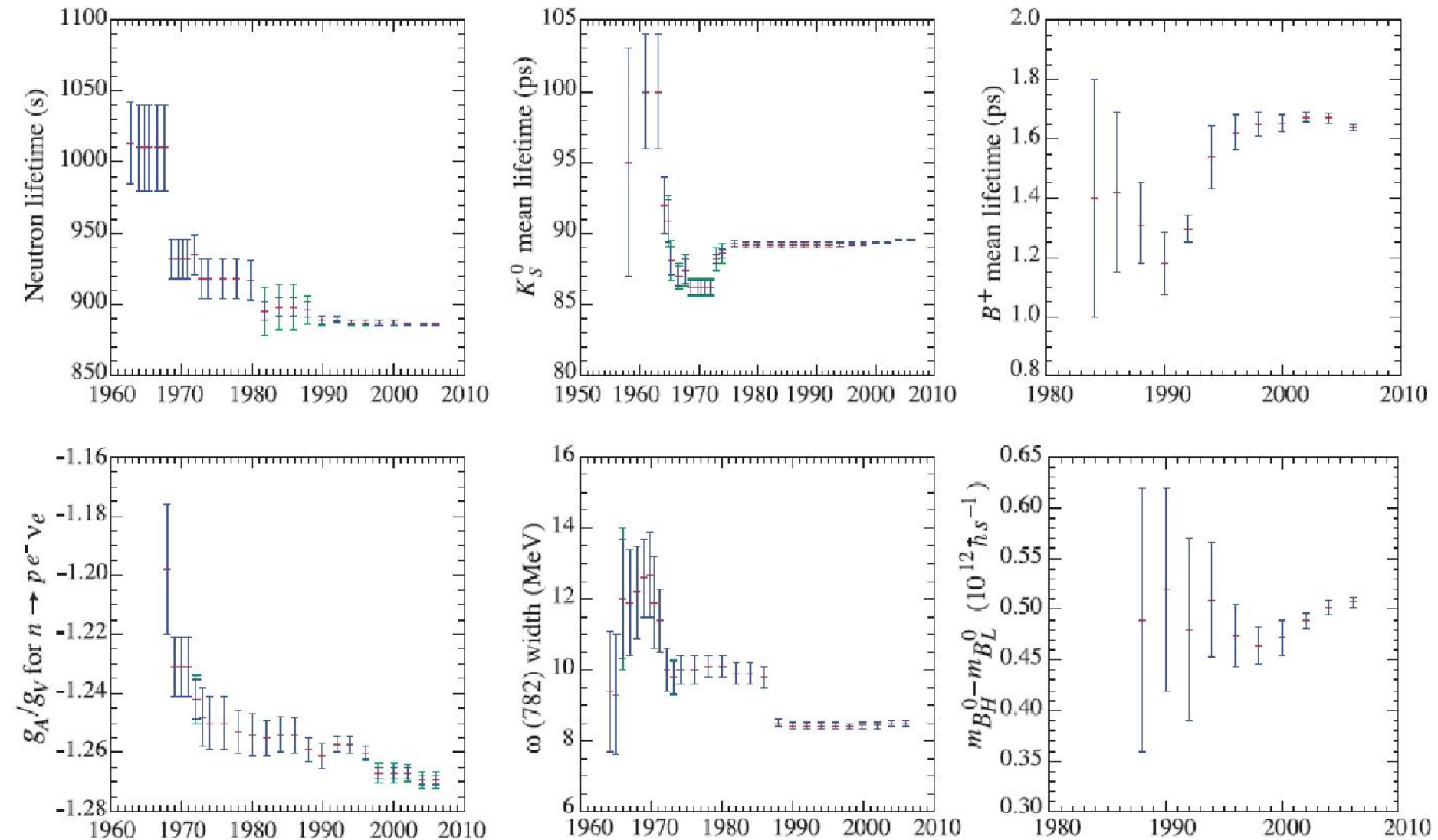
Messung 2 ist zwar präziser, stimmt aber innerhalb der Fehlergrenzen nicht mit dem Literaturwert überein!



Robert Andrews Millikan
(1868–1953)

Wir wollen eine realistische Fehlerabschätzung im Praktikum !

Fehlerangabe



Schwankungen einer Messgröße



Werden Messungen unter identischen Bedingungen wiederholt, so erhält man im Allgemeinen nicht denselben Messwert!

- Wie sind die Messwerte verteilt?
- Welche Größe ist die beste Schätzung des wahren Wertes?
- Wie groß ist die Genauigkeit der Messung?

Spannungsmessung im Versuch
„Bestimmung der Boltzmannkonstante“

Angabe einer Messgröße

Ziel einer Messung:

bestimme einen **Schätzwert** x_B für die betreffende Messgröße x , der zusammen mit der **Messunsicherheit** Δx zur Kennzeichnung eines **Wertebereichs** für den **wahren Wert der Messgröße** dient.

- ▶ Beste Schätzung des „wahren“ Wertes x_B
- ▶ Messunsicherheit Δx („Fehler“)
- ▶ Physikalische Einheit

Angabe des absoluten Fehlers

$$x = x_B \pm \Delta x$$

$$e = (1,62 \pm 0,03) \times 10^{-19} \text{ C}$$

Angabe des Relativfehlers

$$x = x_B \pm (\Delta x / x_B) \times 100$$

$$e = 1,62 \times 10^{-19} \text{ C} \pm 1,9 \%$$

zugehörige physikalische Einheit
gleiche Zehnerpotenzen für Messwert und Messunsicherheit
sinnvolle Zahl der angegebenen Stellen (eine, max. zwei signifikante Stellen)

Anzahl signifikanter Stellen

Geben Sie eine höchstens zwei signifikante Stellen an.

2 signifikante Stellen:

Ist die erste signifikante Stelle ein 1 oder 2, so werden zwei signifikante Stellen angegeben.

$$2.5725413 \pm 0.02432 \rightarrow 2.572 \pm 0.024$$

1 signifikante Stellen:

Ist die erste signifikante Stelle 3 oder größer, so wird eine signifikante Stelle angegeben.

$$2.5725413 \pm 0.623542 \rightarrow 2.6 \pm 0.6$$

Messunsicherheiten: Grobe Fehler

z.B. verursacht durch:

defekter Messgeräte

falsches Ablesen von Skalen

Irrtum bei der
Protokollierung
oder Auswertung



**Grobe Fehler können durch sorgfältiges Experimentieren
ausgeschlossen werden und sollten im Praktikum nicht auftreten !**

Messunsicherheiten: Systematische Fehler

Systematische Fehler

führen zu **einseitigen Abweichungen** vom „wahren Wert“.

Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“.

Ursachen?

Unvollkommenheit der Messgeräte

- ▶ Eich- und Justierfehler, Nichtlinearität, Reibung, ...
teilweise bekannt (Herstellerangaben: Genauigkeitsklassen)

Rückwirkung des Messgerätes (Prozesses) auf die Messgröße

- ▶ Innenwiderstand, Verformung, Erhitzung

Umwelteinflüsse

- ▶ Auftrieb, elektromagnetische Felder, Temperatur, Luftfeuchtigkeit, ...

Systematische Abweichungen sind:

- ▶ **prinzipiell erfassbar**
- ▶ **oft aber schwer zu erkennen**
- ▶ **reproduzierbar und somit zumindest teilweise korrigierbar**

Messunsicherheiten: Statistische Fehler

- ▶ Wiederholung von Messungen (unter gleichen Bedingungen):
einzelne Messwerte werden sich voneinander unterscheiden
- ▶ Statistische Fehler streuen „links“ und „rechts“ um den wahren Wert
(in vielen Fällen sogar symmetrisch um den wahren Wert)
- ▶ Zufällige Abweichungen sind unvermeidlich, aber:

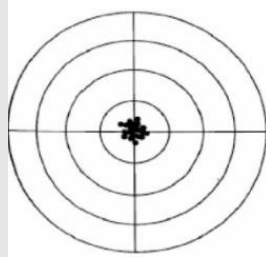
der statistischen Analyse zugänglich:

Die Größe zufälliger Messabweichungen kann mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsaussagen bestimmt werden.

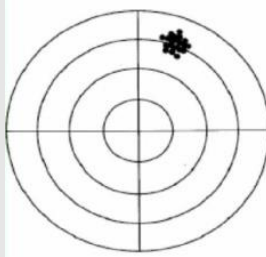
Durch Mehrfachmessungen können statistische Fehler prinzipiell beliebig klein gehalten werden !

Messunsicherheiten

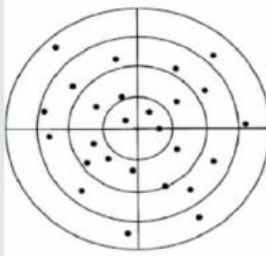
Beispiel syst. und stat. Fehler:
Position eines Sterns



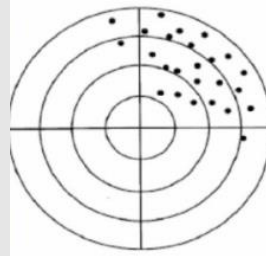
Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: groß



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: groß

Messunsicherheit: Beispiel Streckenmessung

Lineal



Auflösung: 1 mm

Schieblehre



Auflösung: 0,05 mm

Mikrometerschraube



Auflösung: 0,01 - 0,001 mm

Messunsicherheit?

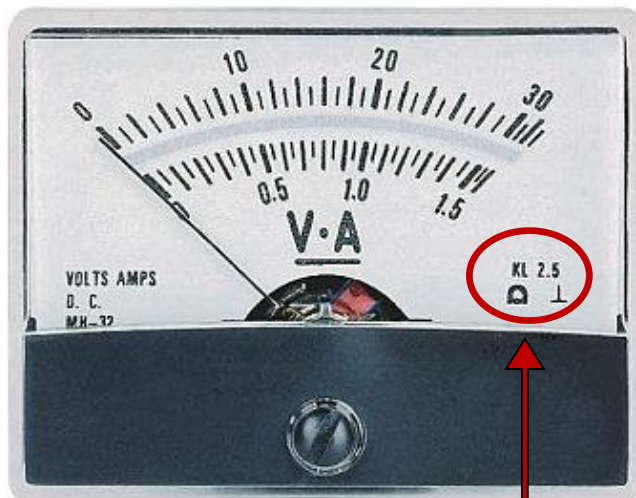
Falls keine Messgenauigkeiten angegeben sind, kann der Fehler aus der Skalenteilung abgeschätzt werden.

Messunsicherheit: 30% – 50% der Skalenteilung

Messunsicherheit: Beispiel Analoginstrumente

An vielen Analogmessinstrumenten ist eine Genauigkeitsklasse angegeben.

Genauigkeitsangabe: Max. Unsicherheit in % des Skalenendwertes



Genauigkeitsklasse

Genauigkeit: 40 mbar
40 % der Skalenteilung

Messunsicherheit: Beispiel Digitalinstrumente

Im Praktikum: Genauigkeitsangabe der Bedienungsanleitung entnehmen !



7. Elektrische Angaben

Bemerkung: Die Messgenauigkeit wird angegeben als Summe aus

- einem relativen Anteil des Messwertes und
- einer Anzahl von Digit (d.h. Zahlenschritte der letzten Stelle).

Diese Messgenauigkeit gilt bei Temperaturen von 18 °C bis 28 °C und einer relativen Luftfeuchtigkeit kleiner 80 %.

7.1 Gleichspannungsbereiche

Der Eingangswiderstand beträgt 10 M Ω (im 400 mV-Bereich 1 G Ω).

Messbereich	Auflösung	Messgenauigkeit	Überlastschutz
600 mV	100 μ V	$\pm$ (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V _{DC}
6 V	1 mV	$\pm$ (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V _{DC}
60 V	10 mV	$\pm$ (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V _{DC}
600 V	100 mV	$\pm$ (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V _{DC}
1000 V	1 V	$\pm$ (0,5 % des Messwertes + 2 Digit)	1000 V _{DC}

7.2 Wechselspannungsbereiche

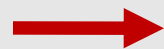
Der Eingangswiderstand beträgt 10 M Ω parallel 100 pF.

Messbereich	Auflösung	Messgenauigkeit ¹⁾ im Frequenzbereich 50 Hz - 600 Hz	Überlastschutz
600 mV	100 μ V	$\pm$ (0,9 % des Messwertes + 5 Digit) ²⁾	750 V _{eff}
6 V	1 mV	$\pm$ (0,9 % des Messwertes + 5 Digit) ²⁾	750 V _{eff}

Beispiel:

Es wurde eine Wechselspannung von 4,736 V gemessen

Fehler: 0,9% von 4,736 = 0,043 V, 5 Digit = 5 mV



Messunsicherheit: 0,048 V Ergebnis $U = (4,74 \pm 0,05)$

Messunsicherheit: Beispiel Stoppuhr

Beispiel:
Zeitmessung mit Handstoppuhr

Auflösung: $1/100 \text{ s}$

Messunsicherheit ?



zusätzlicher Fehler durch das endliche Reaktionsvermögen des Experimentators, Reaktionszeit $\sim 0,2 \text{ s} - 0,3 \text{ s}$
(Bei Differenzmessungen kleiner!)

Statistische Fehler

Um statistische Fehler zu bestimmen müssen mehrere Messungen unter gleichen Versuchsbedingungen durchgeführt werden: ► **Stichprobe von N Messungen**

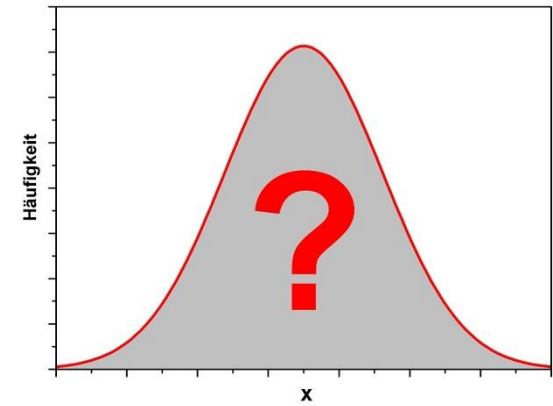
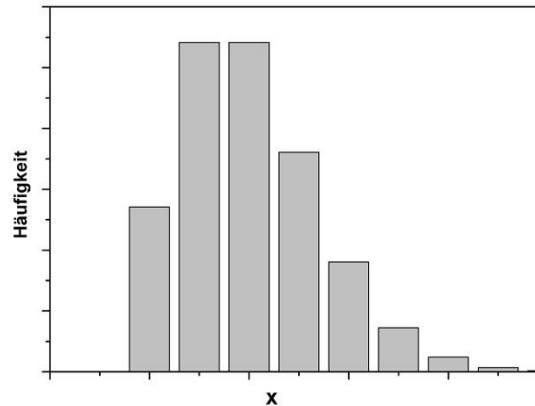
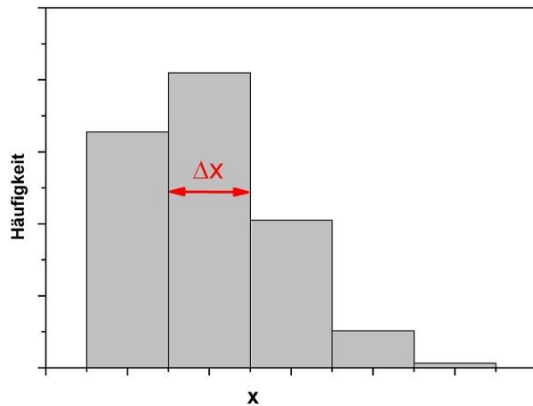
Vorgabe:

- **Unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen**

Gesucht:

- **Beste Schätzung des wahren Wertes x_b**
- **Aussagen über Genauigkeit der Messung**

Graphische Darstellung als Histogramm: Häufigkeit der Ereignisse in einem Intervall $[x_i, x_i + \Delta x]$



Experimentelle Demonstration

Gaußverteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$P(x)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung** mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2



Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$

Erwartungswert: $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x) dx$

Varianz: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot P(x) dx$

Interpretation:

- ▶ **Wahrscheinlichster Wert μ ist die beste Schätzung des „wahren Wertes“**
- ▶ **Breite σ der Verteilung ist ein Maß für die Messgenauigkeit !**

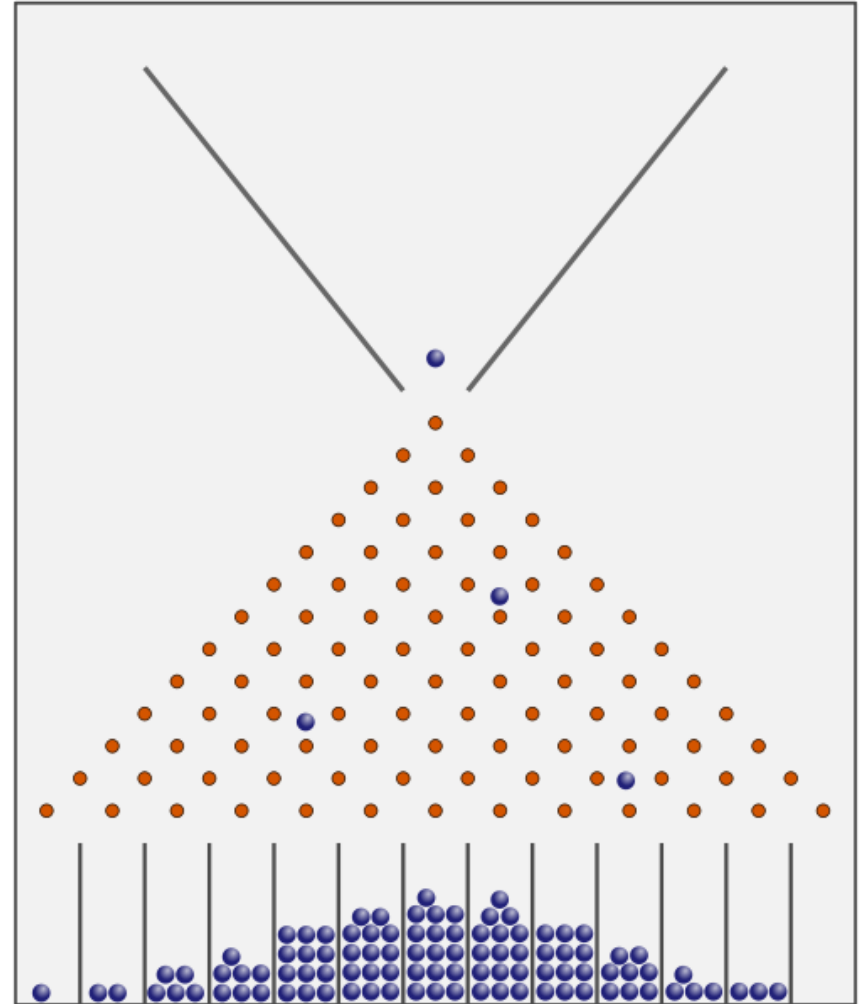
Gaußverteilung

Zentraler Grenzwertsatz

Die Verteilungen der Summen von stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen streben mit wachsendem Stichprobenumfang gegen die Gaußsche Normalverteilung.

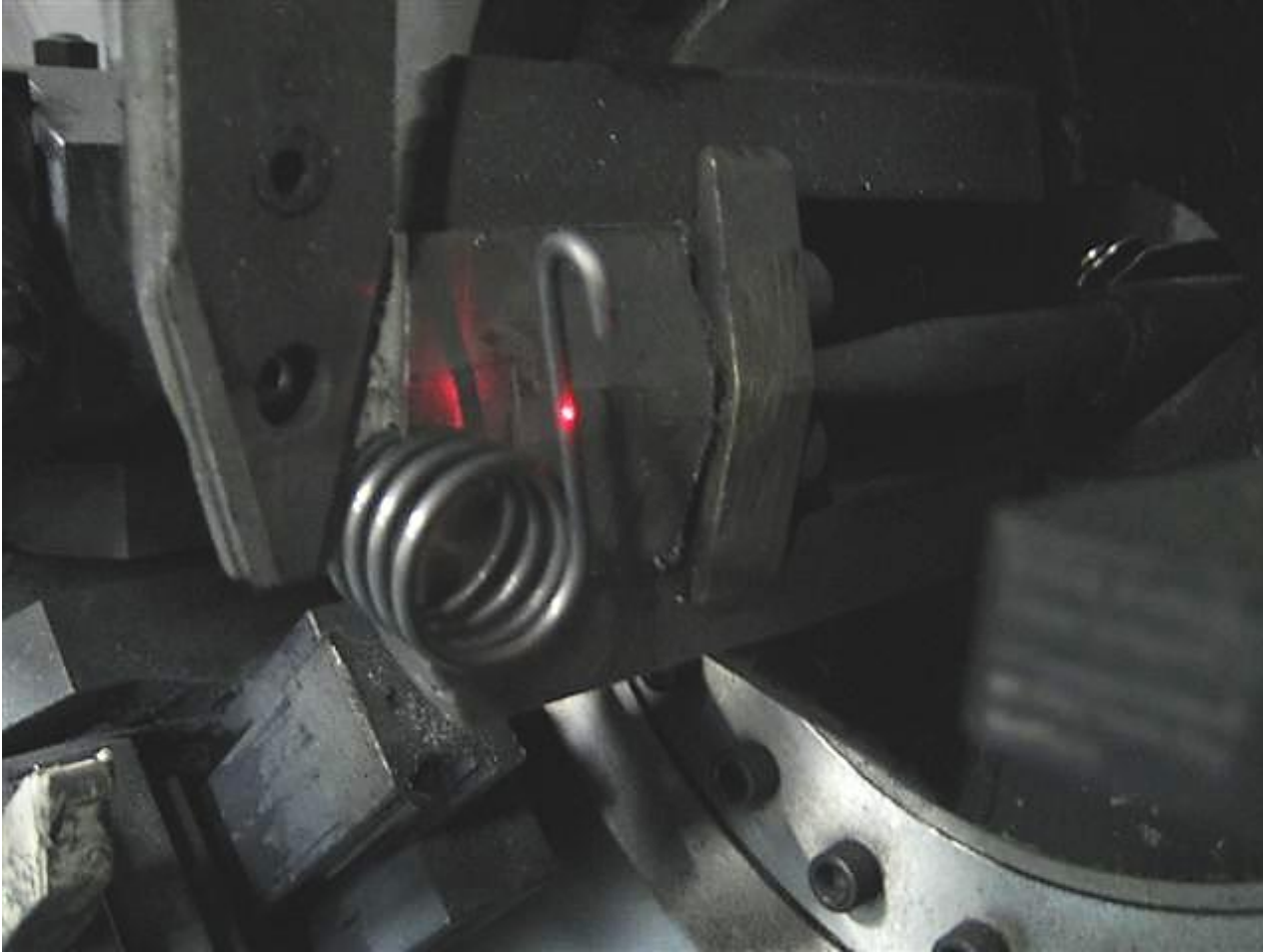
Beispiele:

- Streuprozesse
- Brownsche Bewegung
- Thermisches Rauschen
- ...



Zentraler Grenzwertsatz

Beispiel aus der Industrie



Beispiel aus der Industrie



Gaußverteilung: σ -Abweichung

Aufgabe 4 (AB Fehlerrechnung)

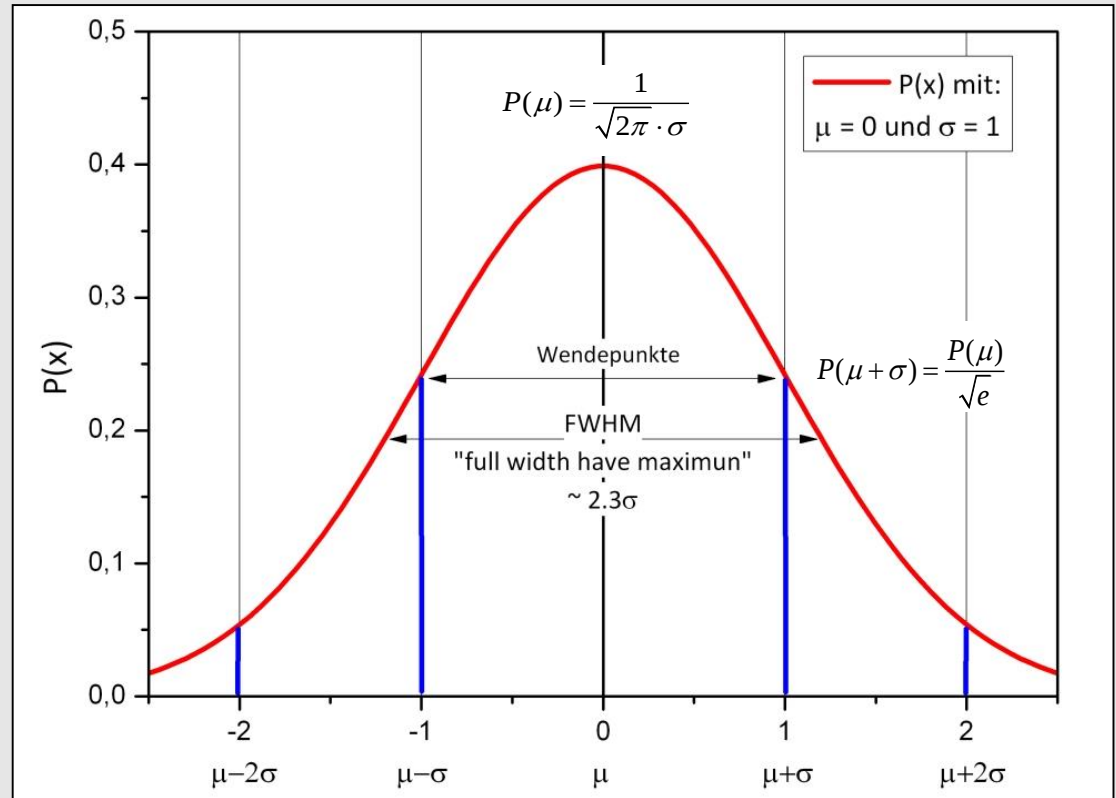
Interpretation des Ergebnisses

$$x = \mu \pm \sigma \text{ bzw. } x = \bar{x} \pm \Delta x$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} P(x) dx = 0,683$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} P(x) dx = 0,955$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} P(x) dx = 0,997$$



Als beste Schätzung für den „wahren Wert“ wurde bei einer Messung der Wert $\bar{x}$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Intervall $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ (1σ -Umgebung).

Schätzwert für die Stichprobe

Schätzwert für den Erwartungswert

Der arithmetische Mittelwert

Schätzwert für die Standardabweichung

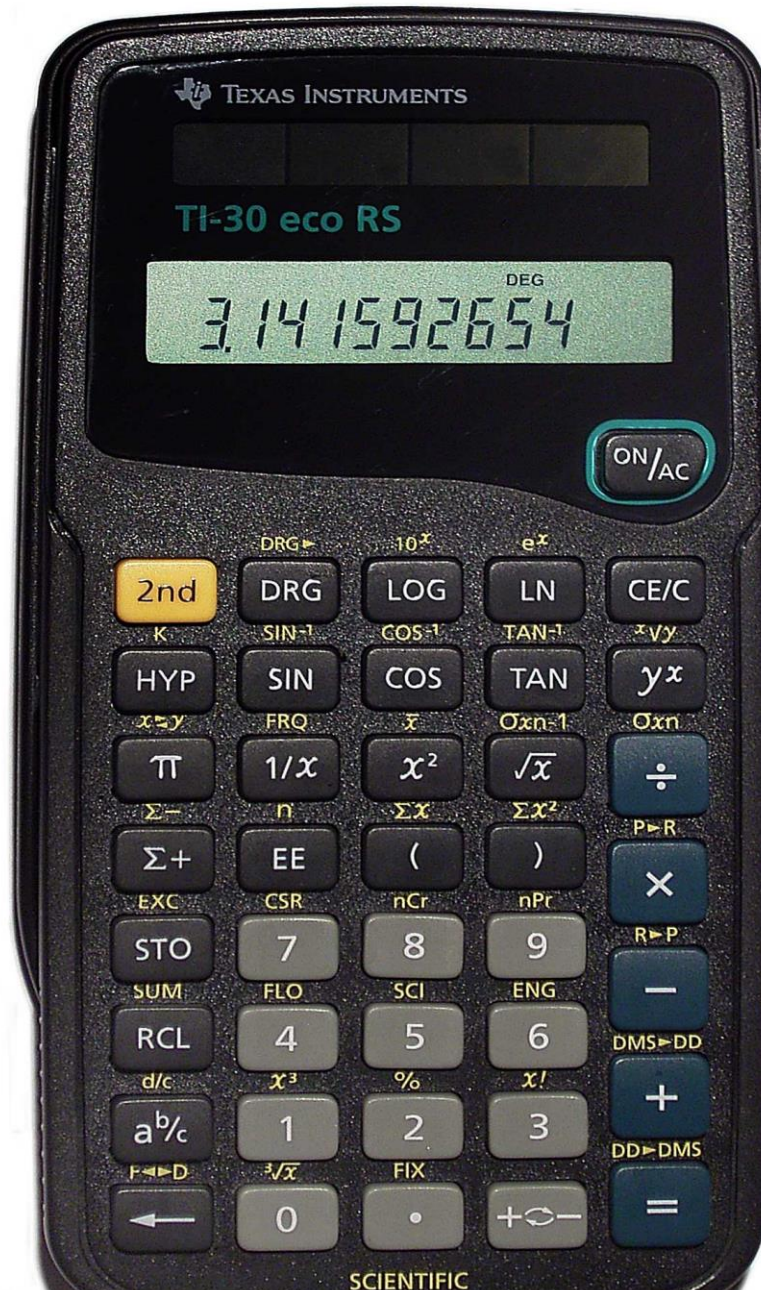
Breite der Verteilung und Streuung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

kleine Stichprobe

Schätzwert für die Standardabweichung des Mittelwerts

10 mal höhere Genauigkeit
100 mal mehr Messwerte



Wertes

Fehler einer Einzelmessung

$$= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

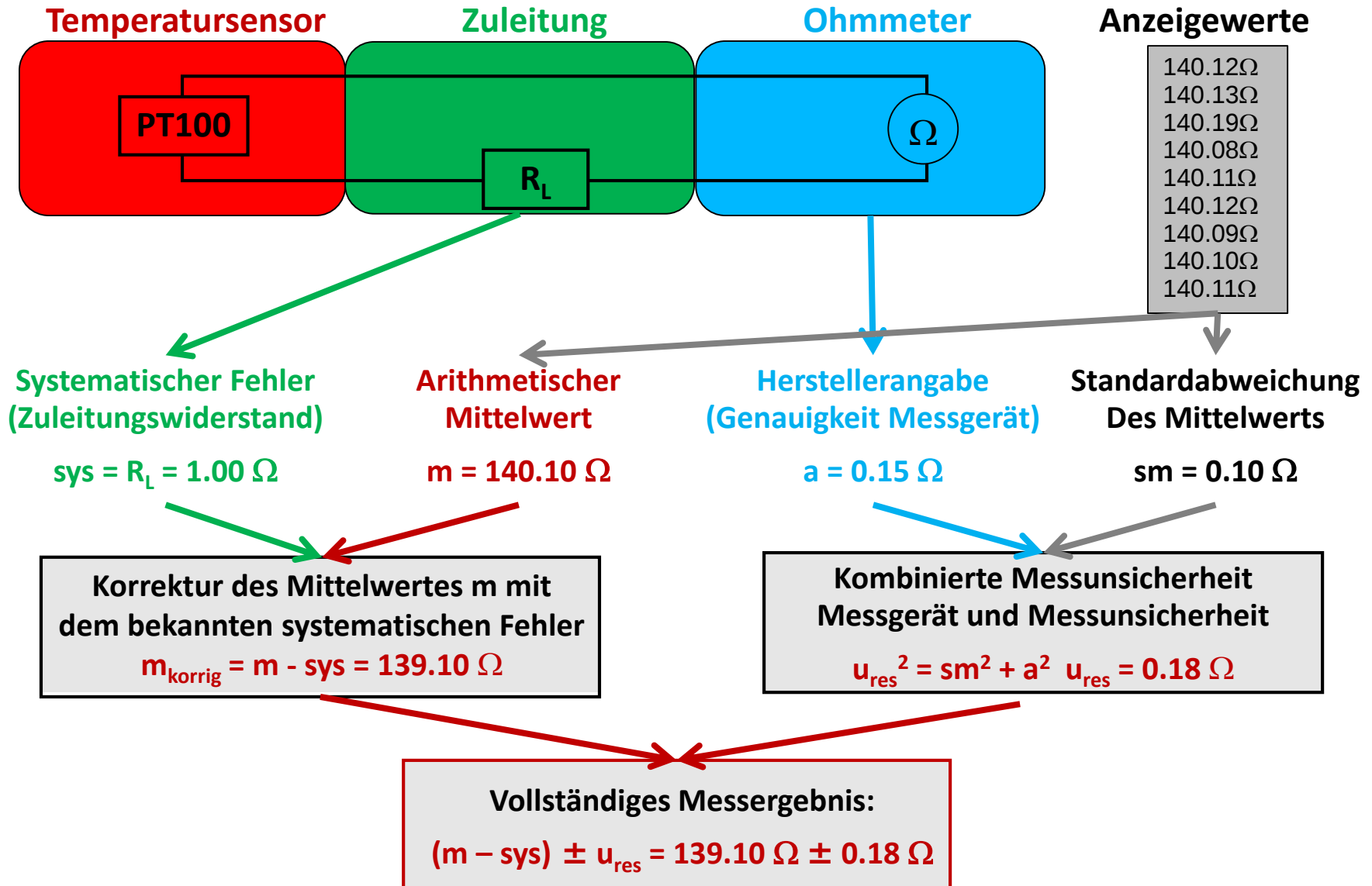
wird unterschätzt!

Fehler des Mittelwerts

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

Mittelwert, Fehler Einzelmessung, Fehler des Mittelwerts

Beispiel Temperaturmessung mit PT100



Arbeitsblatt Fehlerrechnung

1. Gegeben seien die folgenden 5 Einzelmessungen einer Länge a (in mm):

$\{71, 72, 72, 73, 71\}$.

Bestimmen Sie a) den Mittelwert, b) die Standardabweichung der Einzelmessung sowie c) den mittleren Fehler des Mittelwertes.

Mittelwert

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{359}{5} \text{ mm} = 71.8 \text{ mm}$$

Standardabweichung der Einzelmessung

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{a} - a_i)^2} = \sqrt{\frac{2.8}{4}} \approx 0.84 \text{ mm}$$

Mittlerer Fehler des Mittelwertes

$$S_{\bar{a}} = \frac{S_a}{\sqrt{n}} \approx \frac{0.84 \text{ mm}}{\sqrt{5}} \approx 0.37 \text{ mm}$$

Fehlerfortpflanzung

In der Regel kann eine physikalische Größe nicht direkt gemessen werden, sondern wird aus einer oder mehreren Messgrößen bestimmt.

Beispiel:

Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

$$q = (v_f + v_s) \frac{6\pi d}{U} \sqrt{\frac{9v_f \eta^3}{2\rho g}}$$

Die Messgrößen $v_f, v_s, U, d, \eta, \rho, g$ sind fehlerbehaftet

Welchen Einfluss haben die Einzelfehler der gemessenen Größen auf die zu berechnende physikalische Größe?

Fehlerfortpflanzung

Der Einfluss **einer fehlerbehafteten Eingangsgröße x** auf das Ergebnis **$f(x)$** kann mittels der Taylorreihe abgeschätzt werden:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots$$

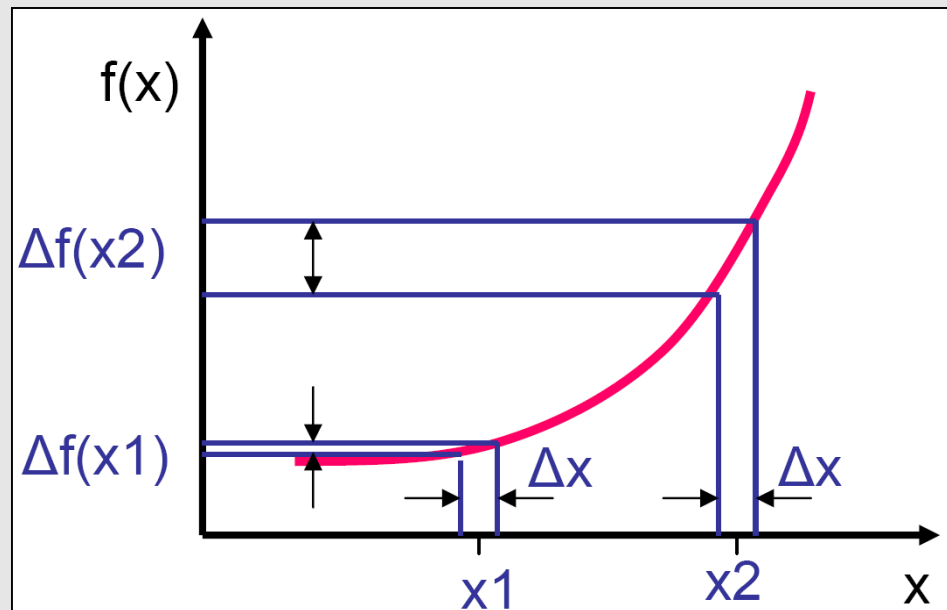
Bei genügend kleinem $|\Delta x|$ kann die Reihenentwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen werden

(Näherungslösung!)
$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + \text{Ordnung}[(\Delta x)^2]$$

Wie wirkt sich der Fehler Δx einer Messgröße x auf eine abgeleitete physikalische Größe $f(x)$ aus?

$$\Delta f(x_2) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_2) \Delta x$$

$$\Delta f(x_1) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \Delta x$$

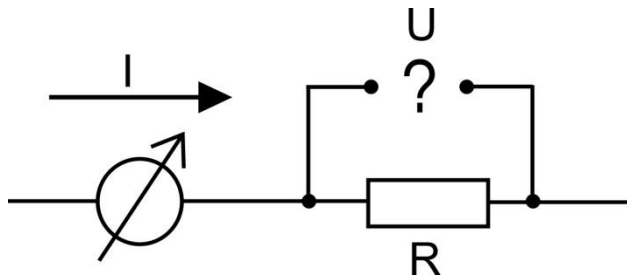


Fehlerfortpflanzung

Beispiel

Bestimmung der Spannung nach dem Ohmschen Gesetz:

Fließt durch einen Widerstand R ein Strom I , so fällt am Widerstand die Spannung U ab.

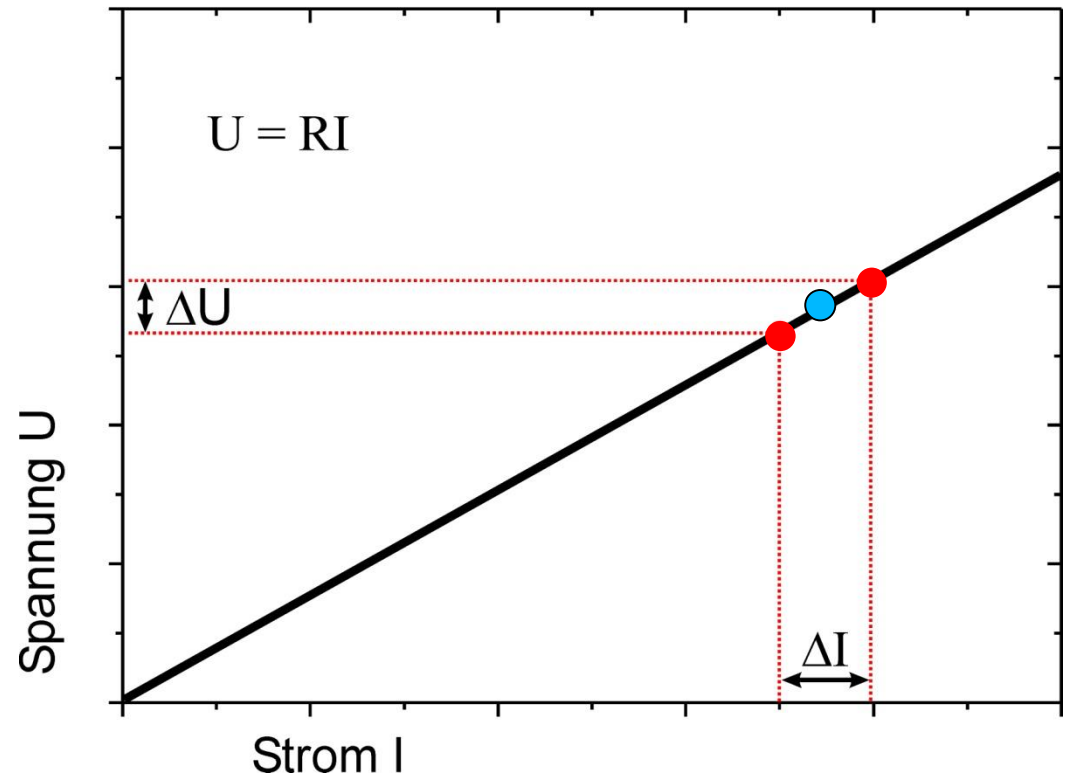


Fehler von U

$$\Delta U = \text{Geradensteigung} \times \Delta I$$

$$\Delta U = \frac{dU}{dI} \Delta I$$

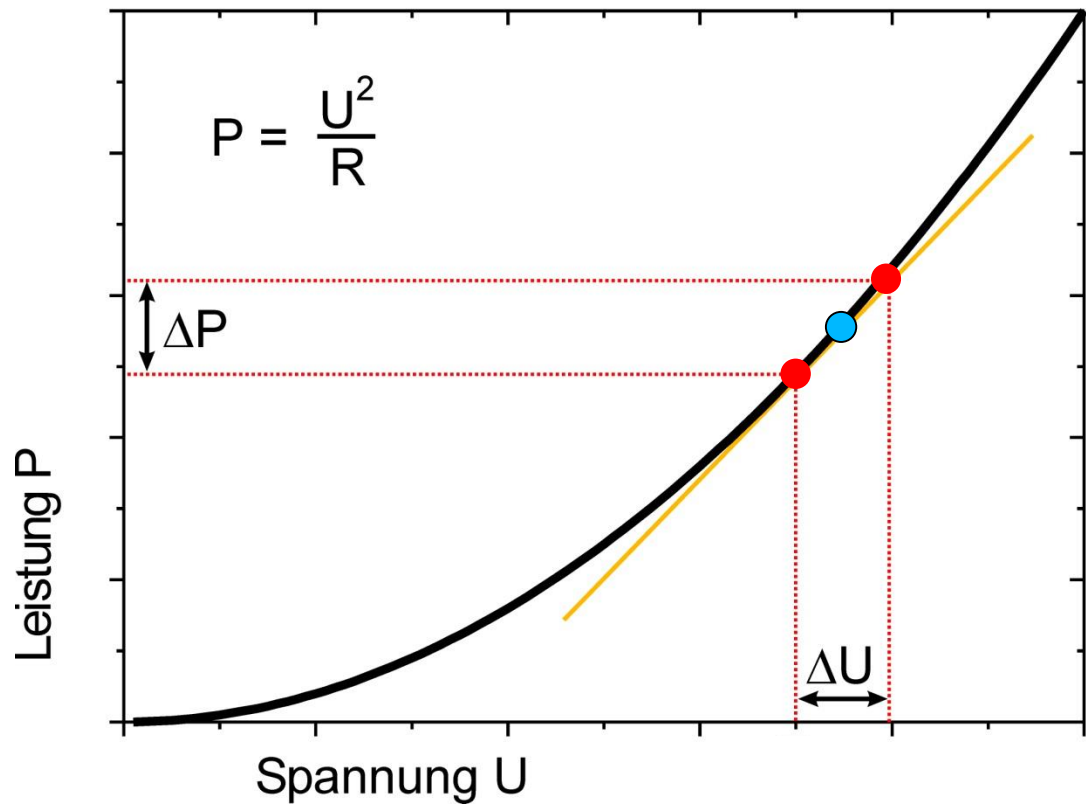
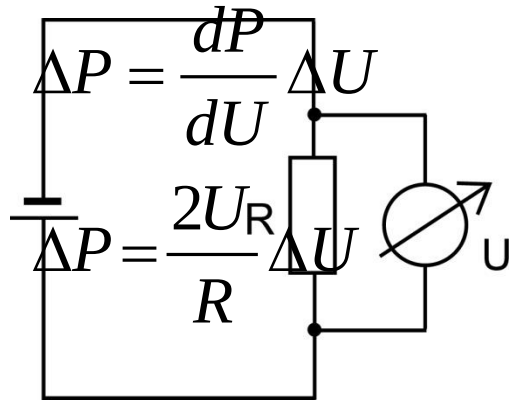
$$\Delta U = R \Delta I$$



Fehlerfortpflanzung

Beispiel

Messung der Leistung an einem Widerstand R , an dem die Spannung U anliegt.



Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Hängt eine physikalische Größe f von mehreren Messgrößen mit den Fehlern $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ab, so berechnet sich der Fehler von f gemäß:

Der Gesamtfehler $\Delta f(\Delta x_i)$ von $f(x_i)$ ergibt sich zu:

$$\Delta f(\Delta x_i) \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$$

Warum quadratische Addition ?

Messewerte streuen statistisch „links“ und „rechts“ um den Mittelwert, d.h. die Fehler kompensieren sich teilweise!



Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

Fehlerfortpflanzung

Hängt eine physikalische Größe f von den Messgrößen x und y ab, ergibt sich für den Gesamtfehler Δf :

$$\Delta f(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2}$$

Einfache Fälle $f(x,y)$ - nützlich zu Erinnern bei der Auswertung:

$$f = kx$$

$$\Delta f = k \Delta x$$

$$f = x + y, \quad f = x - y$$

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$f = xy, \quad f = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

$$f = x^{\pm n}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = |n| \frac{\Delta x}{x}$$

Die einfachen Fälle brauchen bei der Auswertung nicht hergeleitet werden, sondern können direkt angewendet werden!

Fehlerfortpflanzung

Die Berechnung der Differentiale kann sehr mühsam sein.

$$\Delta f(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2}$$

Relative Fehler nutzen

Siehe Praktikumsanleitung: Fehlerrechnung mit Köpfchen

In der Praxis ist die Nutzung von relativen Fehlern von unschätzbarem Wert und sollte wann immer möglich genutzt werden.

I.1 Relative Fehler als Erleichterung der Fehlerfortpflanzung

Es ist sehr einfach zu zeigen, dass für eine Funktion der Form

$$f(x, y, z) = x^a \cdot y^b \cdot z^c \quad (1)$$

gilt:

$$\left(\frac{df}{f}\right)^2 = \left(a \frac{dx}{x}\right)^2 + \left(b \frac{dy}{y}\right)^2 + \left(c \frac{dz}{z}\right)^2. \quad (2)$$

Dabei sind a, b, c beliebige Potenzen ($3/2, -4, \dots$). Zu merken ist:

- Prozentuale Fehler werden quadratisch addiert.
- Wenn ein prozentualer Fehlerbeitrag kleiner als 20% des größten Fehlers ist, dann kann er mit Sicherheit vernachlässigt werden, da er den Gesamtfehler nur noch zu 2% beeinflusst.

Arbeitsblatt Fehlerrechnung

2. Bestimmen Sie das vollständige Differential der Funktionen $w = f(x, y, z)$ mit

a) $w = 3xy + 5/z$

b) $w = 5y + 6x^2/z$

a) $dw = 3y dx + 3x dy + \frac{-5}{z^2} dz$ b) $dw = \frac{12x}{z} dx + 5 dy + \frac{-6x^2}{z^2} dz$

Vollständiges Differential der Funktion $w(x, y, z)$: $dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

3. Der Wert der in 2a) gegebenen Funktion w wird durch die Messungen der Variablen x , y , und z mit den statistischen Fehlern Δx , Δy , und Δz bestimmt. Berechnen Sie den Fehler Δw nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz.

a) $dw = \sqrt{(3y \Delta x)^2 + (3x \Delta y)^2 + ((5/z^2) \Delta z)^2}$

b) $dw = \sqrt{((12x/z) \Delta x)^2 + (5 \Delta y)^2 + ((6x^2/z^2) \Delta z)^2}$

Arbeitsblatt Fehlerrechnung

5. Die Spannung einer Spannungsquelle wird mit zwei verschiedenen Methoden bestimmt (1 σ -Fehler):

a) Messwert A: $21,1 \pm 1,4$ V

b) Messwert B: $19,2 \pm 1,7$ V.

Ist der Unterschied zwischen A und B signifikant? Begründung?

Differenz D

$$D \equiv U_A - U_B = 1.9V$$

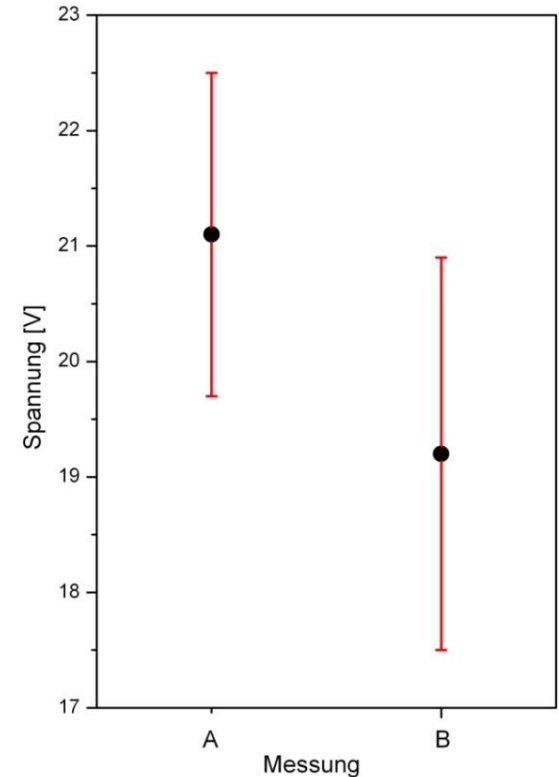
Fehler der Differenz ΔD

$$\Delta D = \sqrt{(\Delta U_A)^2 + (\Delta U_B)^2}$$

$$\Delta D = \sqrt{(1.4V)^2 + (1.7V)^2} \approx 2.2V$$

Vergleich von D mit ΔD der Differenz

$$D = 1.9V < \Delta D \approx 2.2V \quad \blacktriangleright \text{ nicht signifikant!}$$



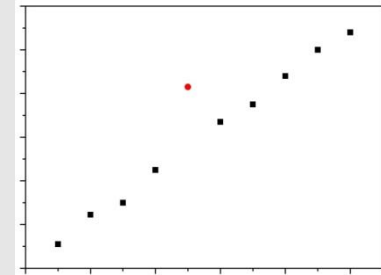
Der Unterschied kann zufällig sein -> nicht signifikant

Der Unterschied ist signifikant wenn es unwahrscheinlich ist, dass dies durch Zufall zustande kam.

Graphische Darstellung

wesentlicher Bestandteil einer Messung

- ▶ Veranschaulicht funktionale Zusammenhänge
- ▶ Erlaubt Kontrolle über mögliche Abweichungen (prinzipielle Abweichungen oder „Ausreißer“)



Für das Praktikum bitte beachten:

- ▶ Wahl von geeignetem Millimeterpapier (linear / log. / doppelt log.)
- ▶ Wahl eines geeigneten Maßstabs für die Achsen
- ▶ Beschriftung der Achsen
- ▶ Messwerte (mit Fehler) und den Graph der Funktion eintragen

Diagramme von Hand anfertigen, keine Computerausdrucke !!!

Arbeitsblatt Graphische Darstellung

1. Tragen Sie folgende Punkte $(x|y)$ in das Millimeterpapier ein:

A: $(5 | 150)$

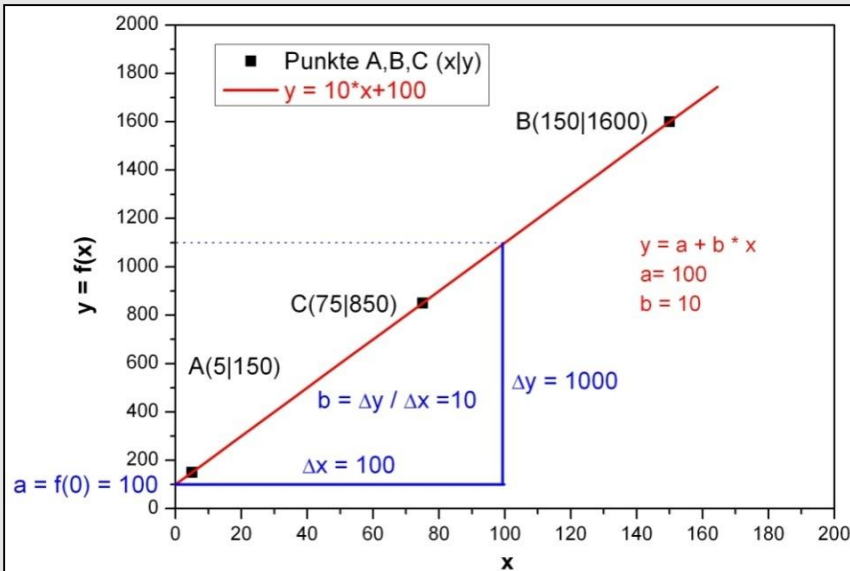
B: $(1,5 \times 10^2 | 0,16 \times 10^4)$

C: $(75 | 8,5 \times 10^2)$

Die zugehörige Funktion hat die Form

$$y = a \cdot x + b$$

Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch a und b .



2. Tragen Sie folgende Punkte in das doppelt-logarithmische Papier ein:

A: $(2 | 1,41)$

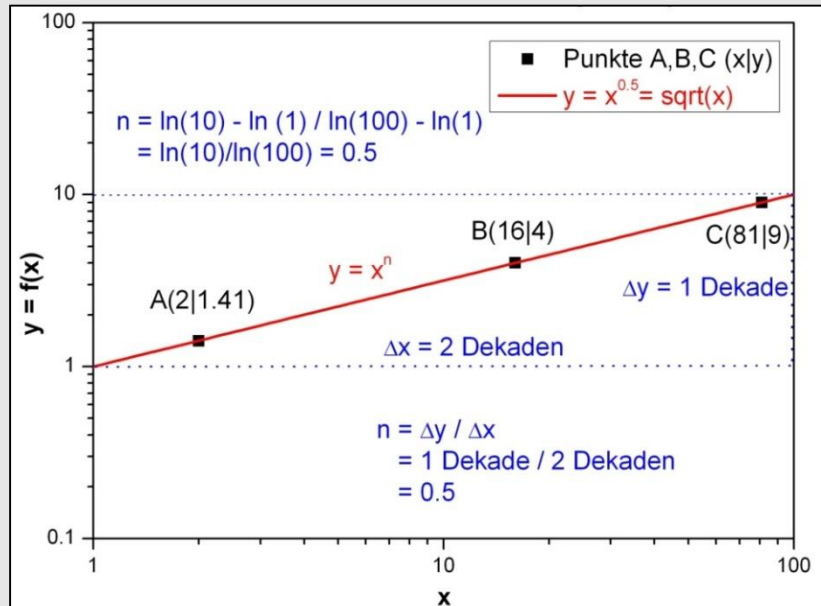
B: $(16 | 400 \times 10^{-2})$

C: $(0,81 \times 10^2 | 0,09 \times 10^2)$

Die zugehörige Funktion hat die Form

$$y = x^n$$

Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch n .



doppelt logarithmischer Plot:

Potenz-Funktionen $y = x^n$ ergeben eine Gerade mit der Steigung des Exponenten: $\ln(y) = n \cdot \ln(x)$

Arbeitsblatt Graphische Darstellung

3. Tragen Sie folgende Punkte in das halb-logarithmische Papier ein:

A: $(30 | 0,896 \times 10^1)$

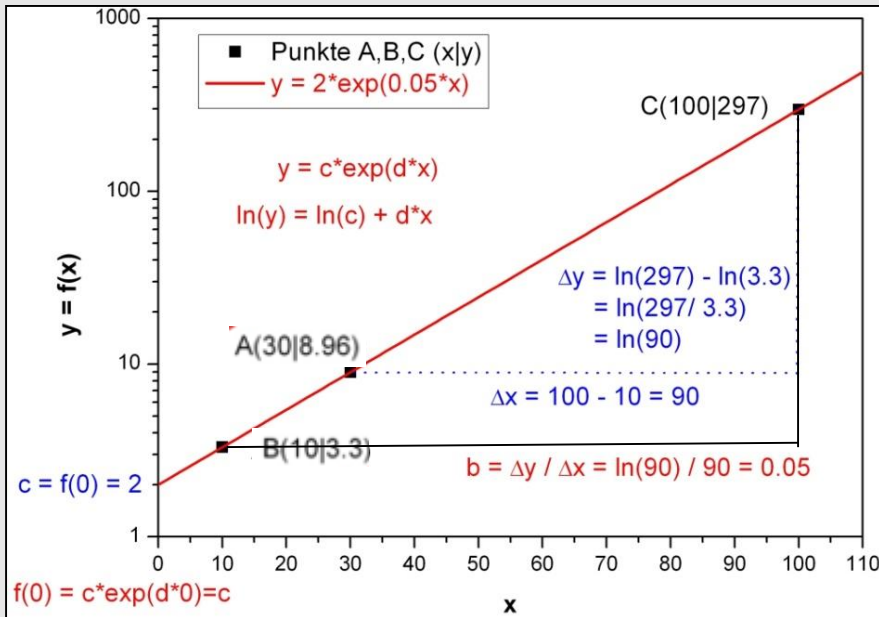
B: $(10 | 0,330 \times 10^1)$

C: $(10^2 | 0,297 \times 10^3)$

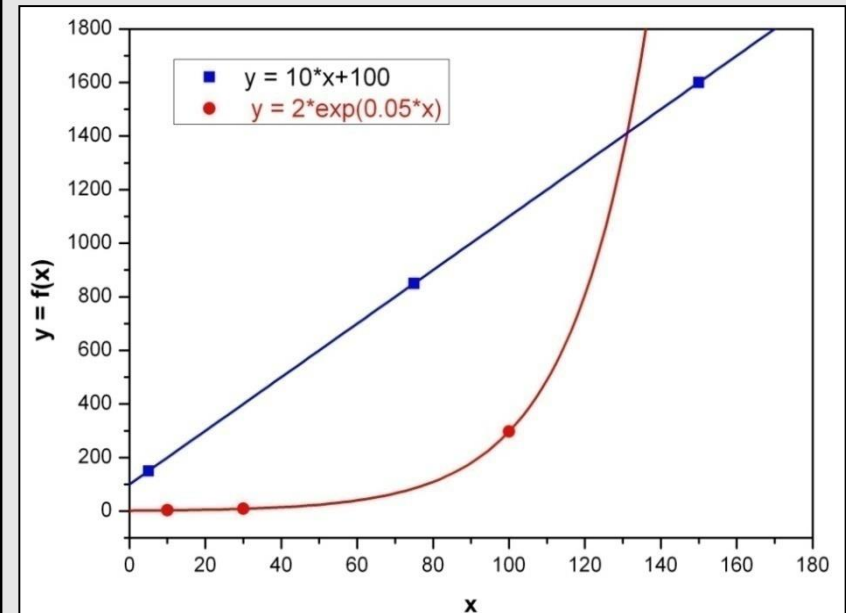
Die zugehörige Funktion hat die Form

$$y = c \cdot e^{d \cdot x}$$

Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch c und d .



4. Tragen Sie den Graph der Funktion aus 3. ebenfalls in das Millimeterpapier ein.



Halb-logarithmischer Plot:

Exponentialfunktionen $y = c \cdot \exp(d \cdot x)$ ergeben eine Gerade mit der Steigung d und y-Achsenabschnitt c : $\ln(y) = \ln(c) + d \cdot x$

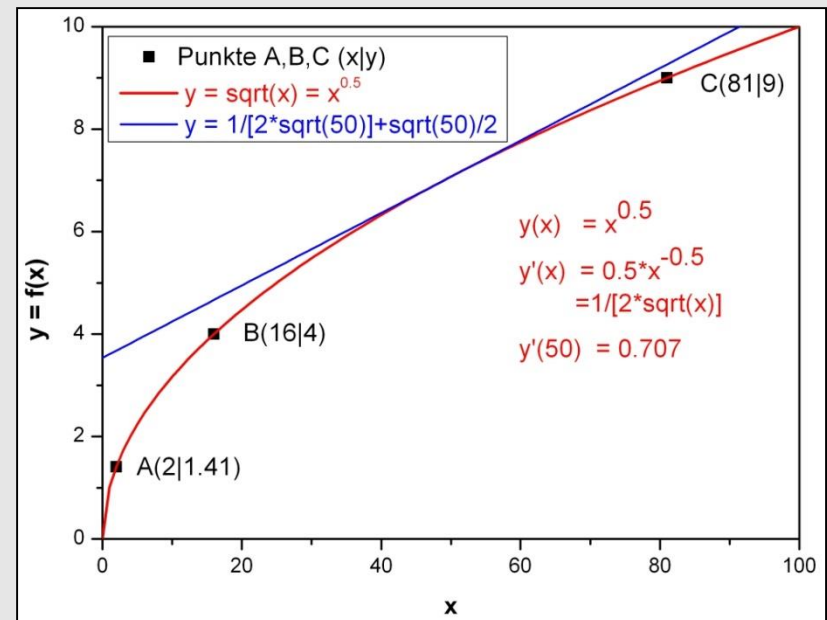
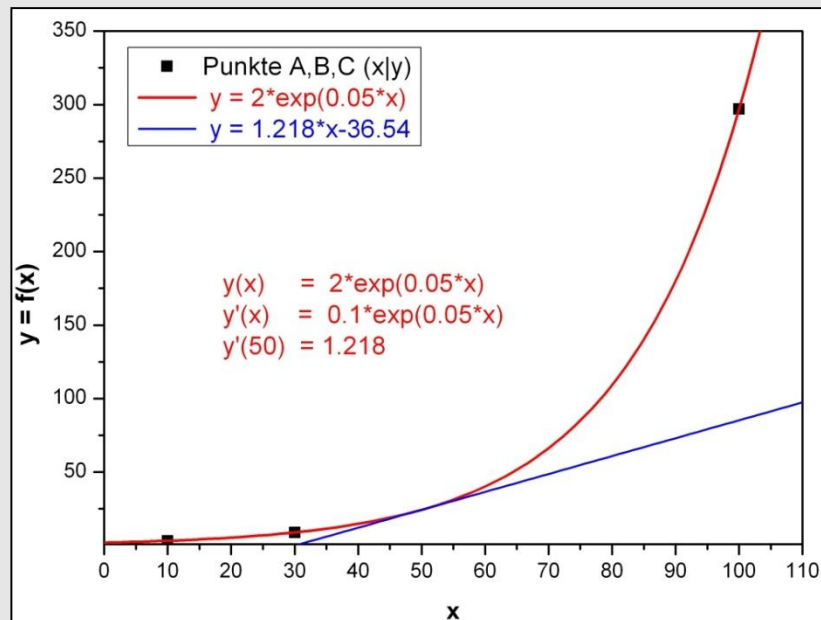
Arbeitsblatt Graphische Darstellung

5. Berechnen Sie die Steigungen der 3 Funktionen für $x = 50$.

(1) $y'(x=50) = 10$

(2) $y'(x=50) = 1.218$

(3) $y'(x=50) = 0.707$



Arbeitsblatt Graphische Darstellung

6. Zum Einführungsversuch (siehe Versuch 11 im Skript):

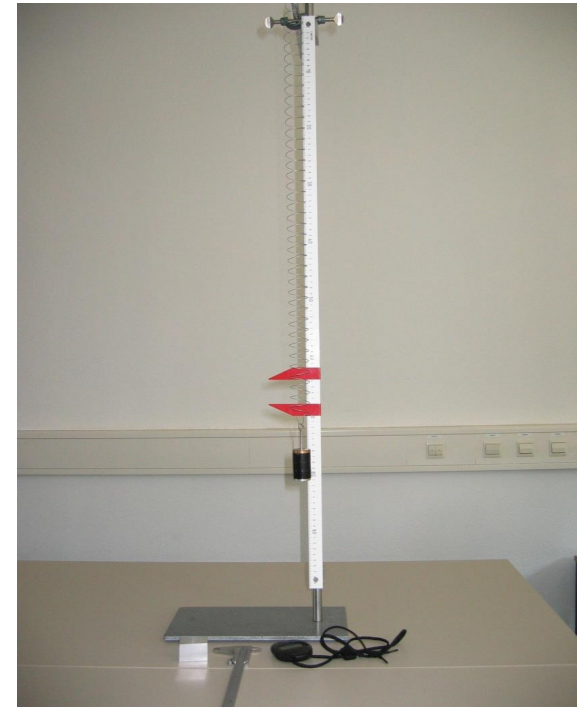
Gegeben sei eine Messreihe der Schwingungsdauer T und deren Fehler ΔT eines Federpendels als Funktion der Masse m :

Masse m [g]	Schwingungsdauer T [s]	Fehler ΔT [s]
50	1,02	0,04
100	1,30	0,04
150	1,53	0,04
200	1,71	0,04
250	1,90	0,04

Zur Bestimmung der Federkonstanten D wird die Gleichung $T^2 = (4\pi^2/D)m$ als Geradengleichung $y = ax + b$, mit $y = T^2$, $a = (4\pi^2/D)$ und $x = m$ interpretiert.

Berechnen Sie aus der vorliegenden Messreihe die entsprechenden Wertepaare $(y_i, \Delta y_i)$ und bestimmen Sie nach folgenden Methoden die Steigung a und deren Fehler Δa :

a) grafisch mit Hilfe einer Ausgleichs- und Fehlergeraden (siehe Kapitel VI im Abschnitt „Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung“ im Praktikumsskript),



Fehler $\Delta(T^2)$ von T^2 : Berechnung aus Fehlerfortpflanzung !

Masse	T	Fehler T	T^2	Fehler T^2
[Gramm]	[Sekunden]	[Sekunden]	[s ²]	[s ²]
50	1,02	0,04	1,0404	0,0816
100	1,3	0,04	1,69	0,104
150	1,53	0,04	2,3409	0,1224
200	1,71	0,04	2,9241	0,1368
250	1,9	0,04	3,61	0,152

x_i

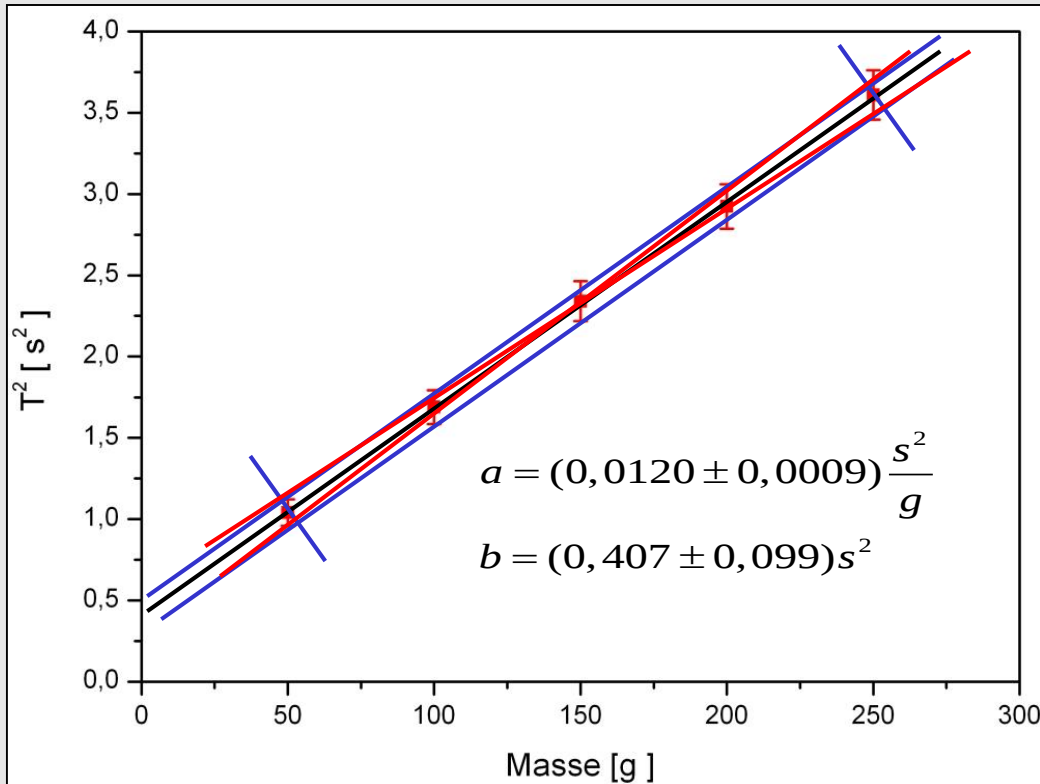
y_i

Δy_i

**Einführungsversuch:
Berechnung der
Federkonstante D aus der Steigung;
der Fehler ΔD ist ebenfalls anhand der
Fehlerfortpflanzung zu berechnen !**

Ausgleichsgerade: graphisch

$y = a \cdot x + b$ Gesucht: Steigung a sowie den Achsenabschnitt b und deren Fehler



Zeichnung der Ausgleichsgeraden

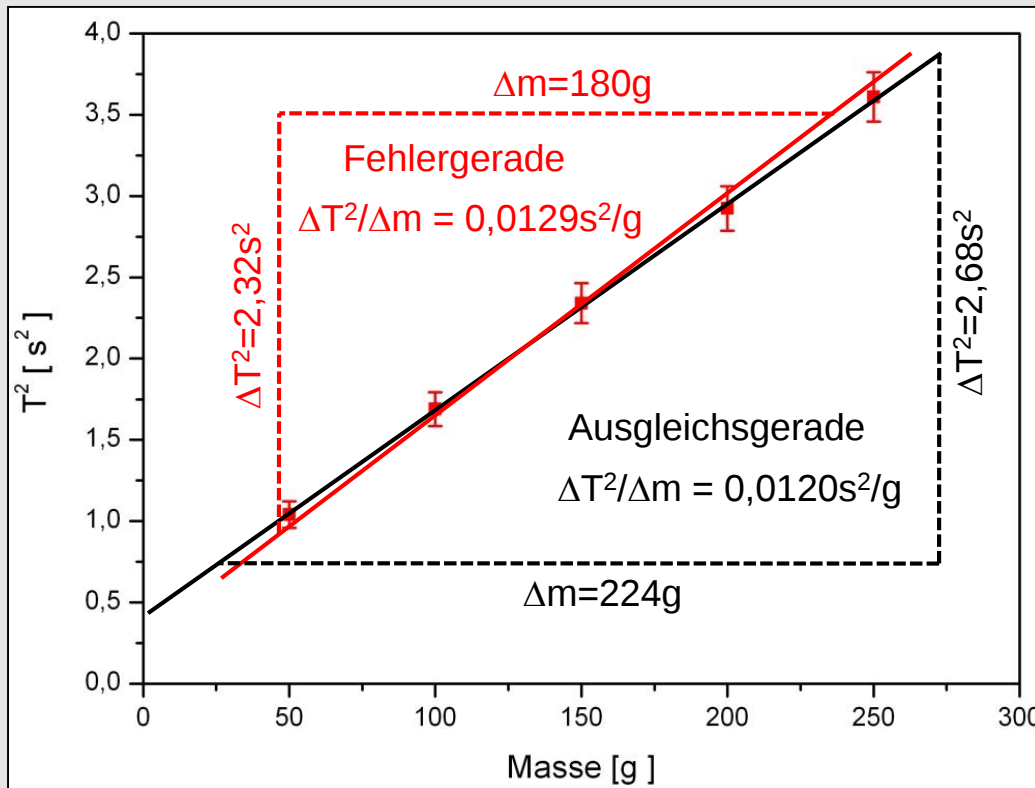
Eintragen von 2 weiteren parallelen nach oben bzw. unten verschobenen Geraden: ca. 70% der Messpunkte innerhalb der Geraden (1σ Abweichung)

Fertigstellen des "Streubereichsrechtecks"

Die Diagonalen in diesem Rechteck liefern in etwa den Fehler der Steigung sowie des Achsenabschnitts

Ausgleichsgerade: graphisch

Im Praktikum auch erlaubt: Min/Max- Abschätzung



Zeichnen der Ausgleichsgerade

Zeichnen der Fehlergerade

Berechnung der Steigungen

Berechnung des Fehlers:

$$\Delta a = a_{\text{Fehler}} - a_{\text{Ausgleich}}$$

Ergebnis:

$$a = (0,0120 \pm 0,0009) \frac{\text{s}^2}{\text{g}}$$



Fehlerabschätzungen -> Augenmaß ausreichend

Eine exakte Fehlerrechnung ist mit einer Hilfe linearer Regression möglich !

Ausgleichsgerade: Lineare Regression

Gegeben: N Paare von Messwerten (x_i, y_i) mit linearer Abhängigkeit $y = a \cdot x + b$
 x_i -Werte fehlerfrei, y_i -Werte mit Standardabweichung σ_i

„Prinzip der kleinsten Quadrate“ (C.F. Gauß, 1795)

$$\chi^2 = \sum_i \left[\frac{\Delta y_i}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_i \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2 \quad \text{sei minimal}$$

b) mittels linearer Regression (siehe Kapitel VII im Abschnitt „Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung“ im Praktikumsskript).

$$a = \frac{1}{\xi} \left(\sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{y_i}{\Delta y_i^2} \right) \quad \Delta a^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \quad \xi = \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \right)^2$$
$$b = \frac{1}{\xi} \left(\sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2} \sum_i \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} \right) \quad \Delta b^2 = \frac{1}{\xi} \sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}$$

Steigung $a = 0.0128 \text{ s}^2/\text{g}$

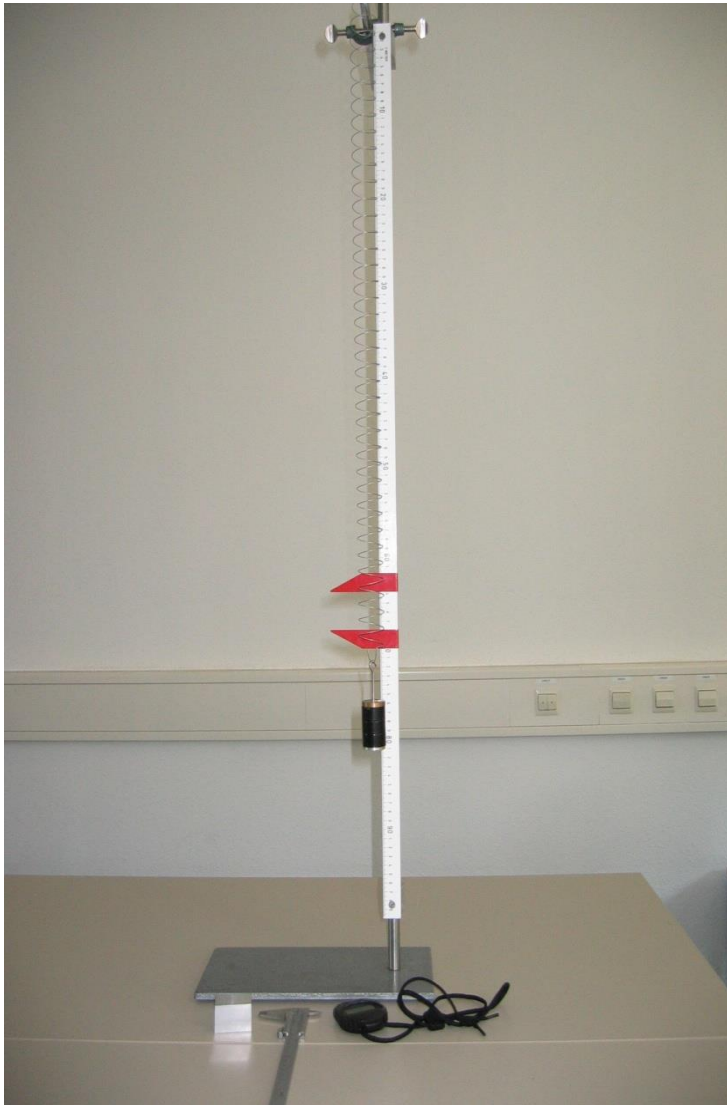
Fehler $\Delta a = 0.0007 \text{ s}^2/\text{g}$

y-Achsenabschnitt $b = 0.41 \text{ s}^2$

Fehler $\Delta b = 0.01 \text{ s}^2$

Lineare Regression

Einführungsversuch Federpendel



Aufgabe:

Bestimmung der Erdbeschleunigung
mit einem Federpendel

~~Durchführung und Auswertung.~~

~~Gemeinsam mit den Betreuern an den ersten
Tagen~~

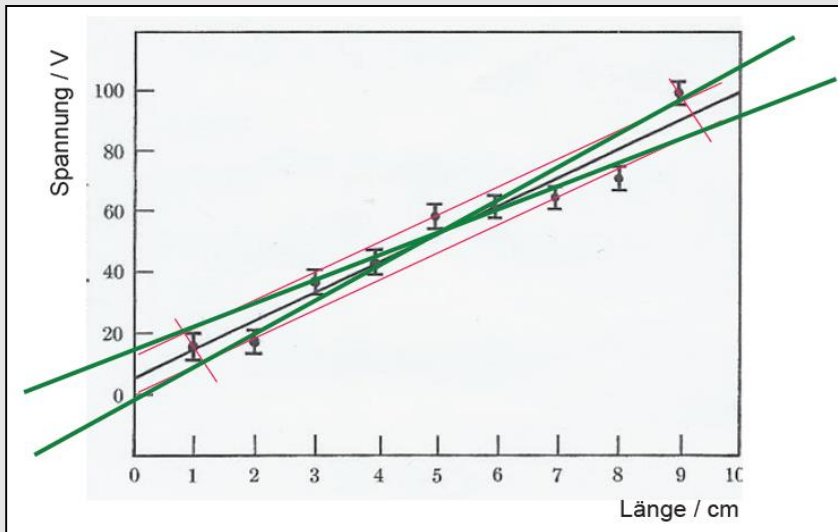
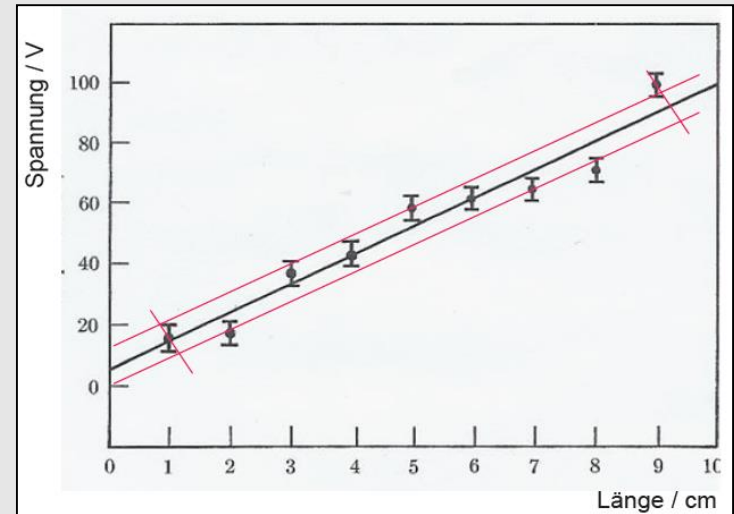
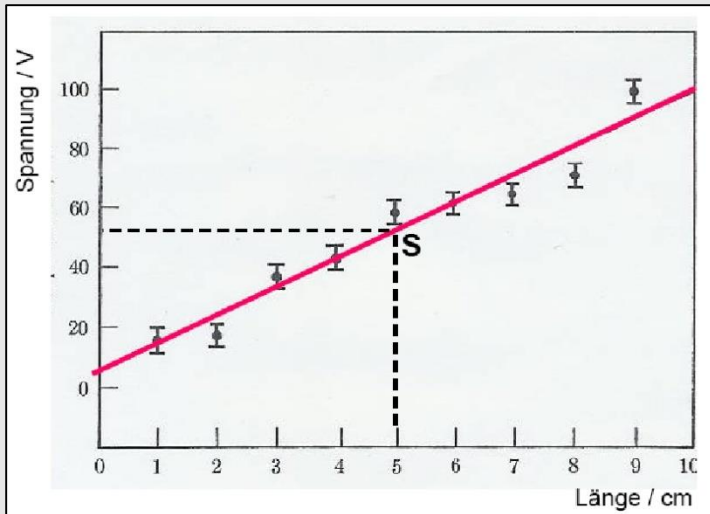
Ziel:

Einführung in das
physikalische Experimentieren,
Protokollführung,
Fehlerabschätzung
und grafische Darstellung

Zusätzliches Material

Ausgleichsgerade „von Hand“

$y = a \cdot x + b$ Gesucht: Steigung a sowie den Achsenabschnitt b und deren Fehler



Zeichnung der Ausgleichsgeraden
(geht bei gleichen Standardabweichungen durch Schwerpunkt S der Daten)

Eintragen von 2 weiteren parallelen nach oben bzw. unten verschobenen Geraden:
ca. 70% der Messpunkte innerhalb der Geraden

Fertigstellen des “Streubereichsrechtecks”.

Die Diagonalen in diesem Rechteck liefern in etwa den Fehler der Steigung sowie des Achsenabschnitts.

Lineare Regression mit χ^2 -Fit

$$\chi^2 = \sum_i \left[\frac{\Delta y_i}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_i \left[\frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{\sigma_i^2} \right]$$

χ^2 sei minimal (Beispielrechnung für $\sigma_i = \sigma \ \forall i$)*

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_i [y_i - ax_i - b] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_i x_i [y_i - ax_i - b] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_i y_i = \sum_i b + \sum_i ax_i = bN + a \sum_i x_i$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i bx_i + \sum_i ax_i^2 = b \sum_i x_i + a \sum_i x_i^2$$

* Allgemeiner Fall: siehe Praktikumsanleitung

Aufstellen der Funktion
 $\chi^2(a,b)$

Partielles Ableiten:

nach a & Nullsetzen

nach b & Nullsetzen

Gleichungssystem
umformen

Lineare Regression mit χ^2 -Fit

Auflösen nach a und b :

Achsenabschnitt

Steigung

Varianz

$$\sum_i y_i = \sum_i b + \sum_i a x_i = bN + a \sum_i x_i$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i b x_i + \sum_i a x_i^2 = b \sum_i x_i + a \sum_i x_i^2$$

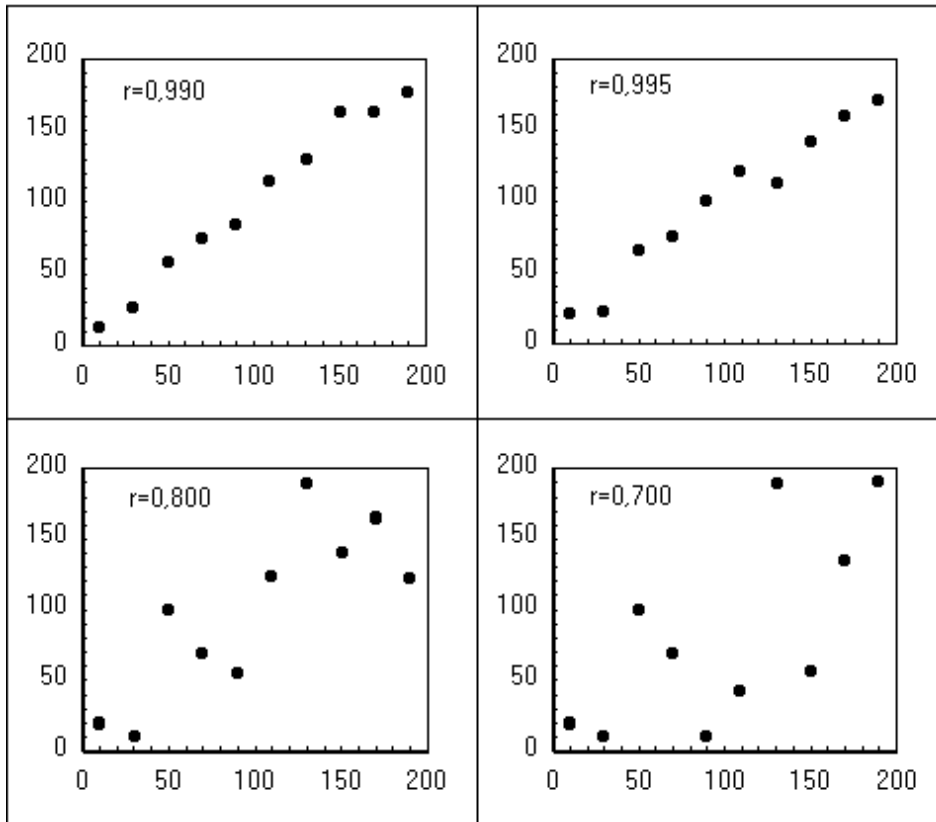
$$b = \frac{1}{\Delta} \left[\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i \right]$$

$$a = \frac{1}{\Delta} \left[N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i \right]$$

$$\text{mit } \Delta = N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2$$

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_i [y_i - a x_i - b]^2$$

Korrelationskoeffizient (nach Pearson)



$$\rho(x, y) := \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var } x} \cdot \sqrt{\text{Var } y}}$$
$$r_{xy} := \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

dimensionsloses Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen. Bei einem Wert von +1 (bzw. -1) besteht ein vollständig positiver (bzw. negativer) linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Merkmalen. Wenn der Korrelationskoeffizient den Wert 0 aufweist, hängen die beiden Merkmale überhaupt nicht linear voneinander ab.



Quadrat des Korrelationskoeffizienten r^2 : Bestimmtheitsmaß

Es gibt an, wie viel Prozent der Varianz, d. h. an Unterschieden der einen Variable durch die Unterschiede der anderen Variable erklärt werden können.

Beispiel: Bei $r=0,3$ bzw. $0,8$ werden **9%** bzw. **64%** der gesamten auftretenden Varianz im Hinblick auf einen statistischen Zusammenhang erklärt.

Regressionsanalyse

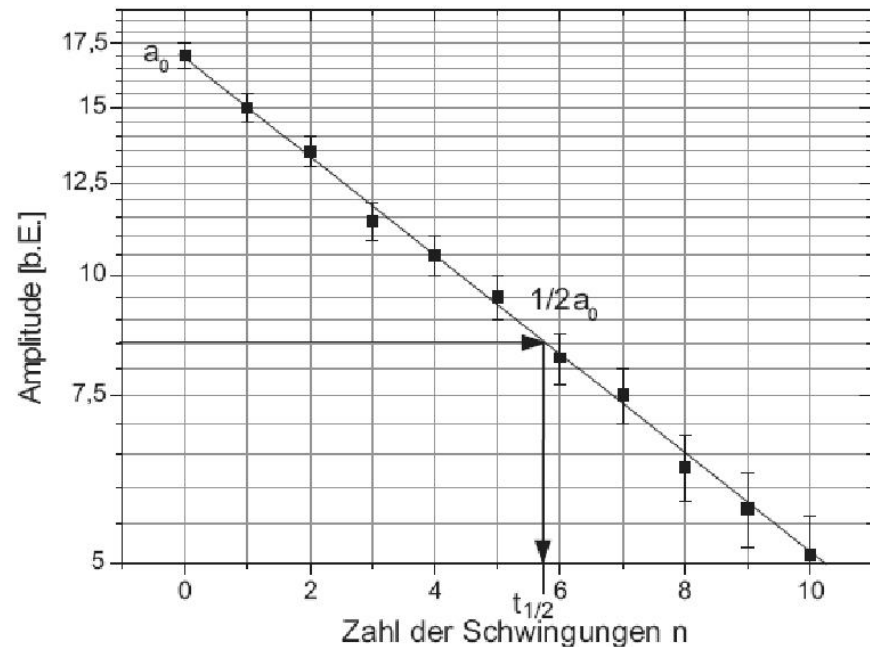
Per Hand bzw. mit Taschenrechner mit überschaubarem Aufwand durchführbar bei linearen Funktionen mit wenigen Stichproben.

Beispiel:

Linearisierung von Funktionen

$$y = a e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

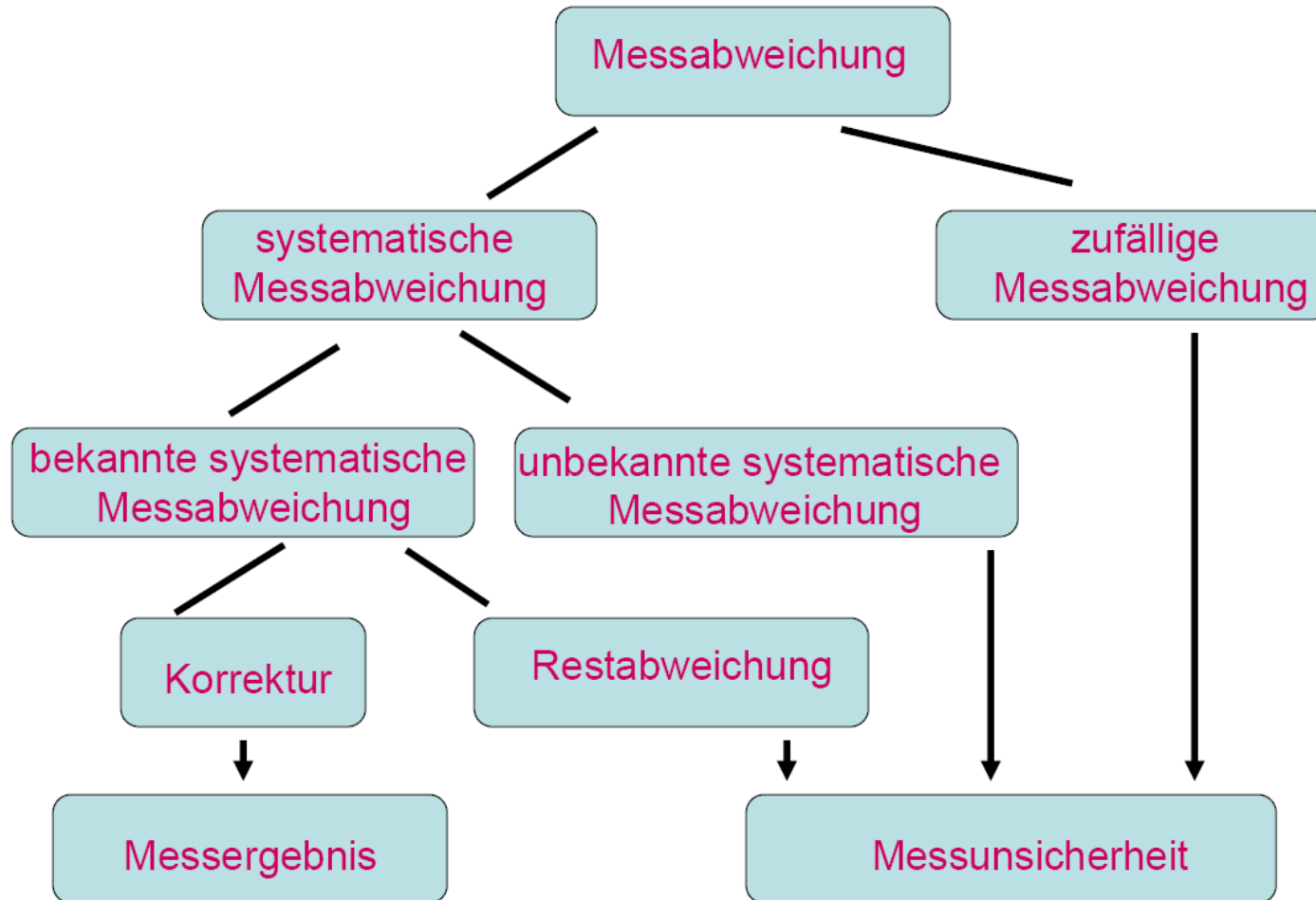


„multiple“ Regression:

Für komplexere Funktionen mit mehreren Variablen (alle mit Fehler behaftet) ist es sinnvoll geeignete Statistik Software verwenden (z.B. Mathematica, Maple, Origin, SPSS, Stata, SAS, ...).

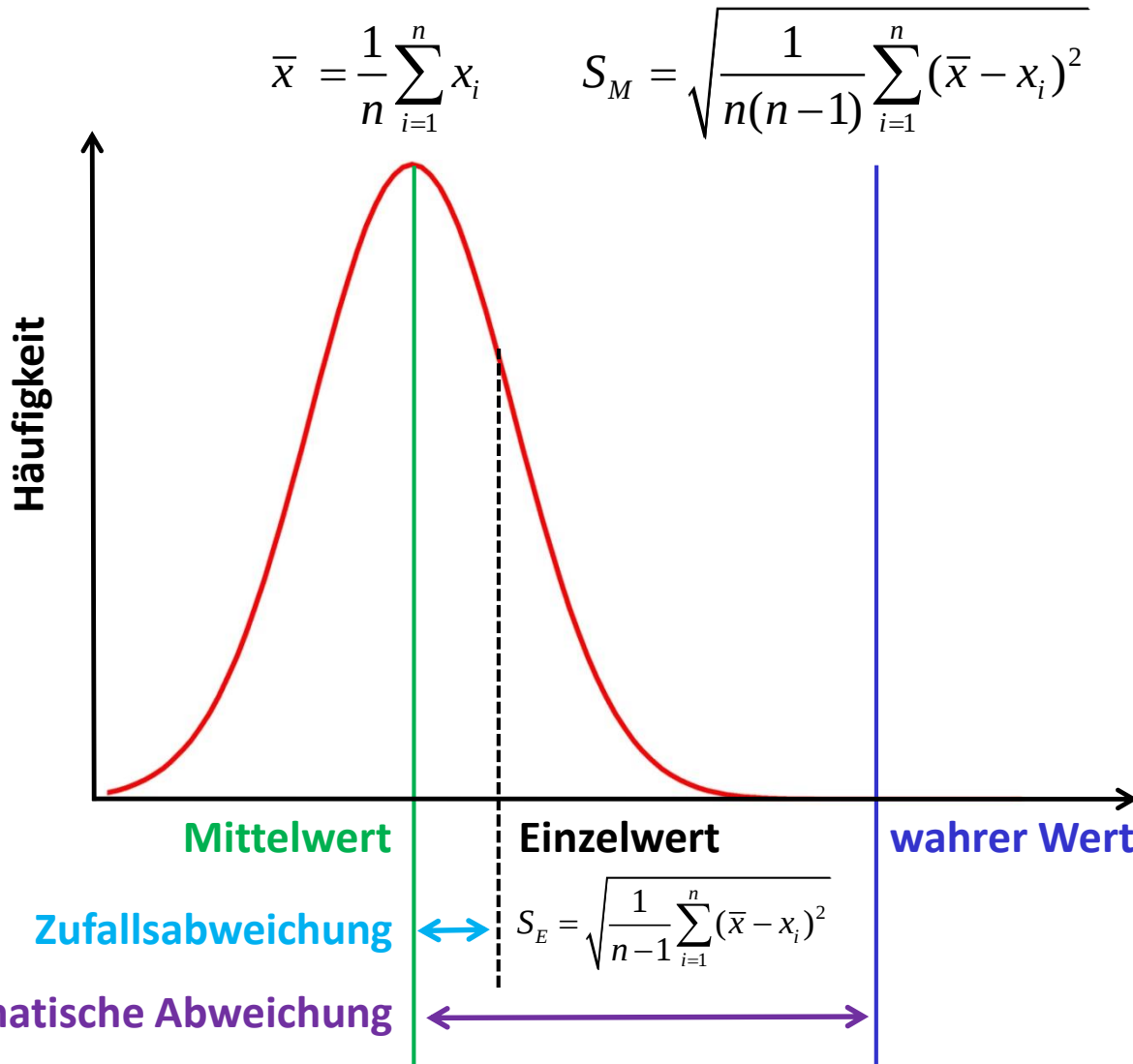


Prinzipielle Vorgehensweise



nach M.Hemla, OZ 41 (1995) 1156

Zusammenfassung



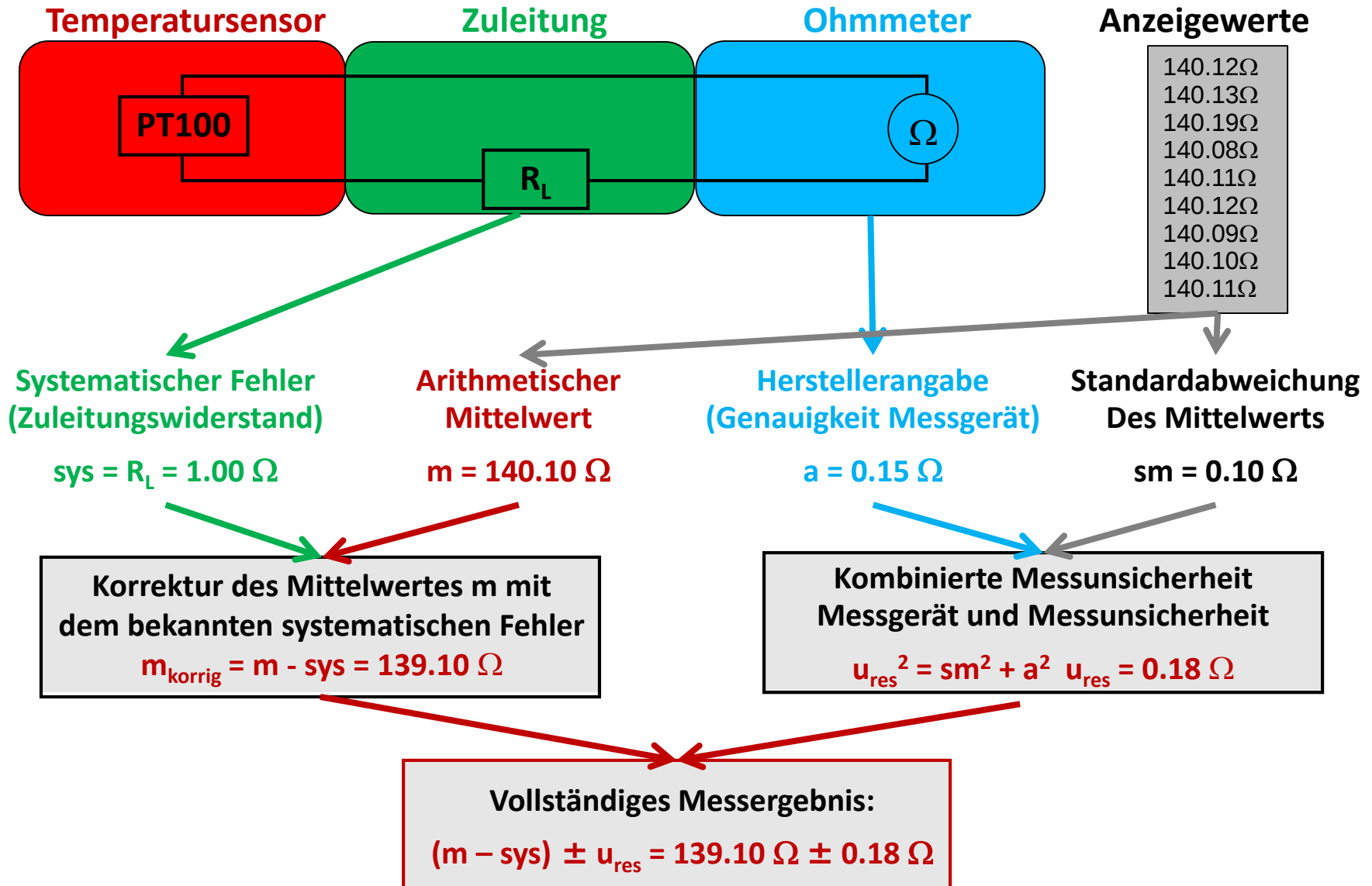
Messergebnis:

$$x = \bar{x} \pm k \cdot u$$

$$u = \sqrt{(\sigma_M)^2 + (\sigma_{\text{Sys}})^2}$$

k=1 für
68% Konfidenz
und hinreichende
Anzahl n von
Einzelmessungen

Beispiel Temperaturmessung mit PT100

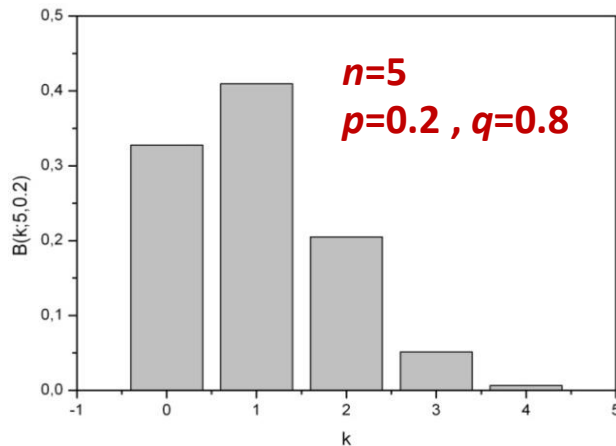


Binomial-Verteilung

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Diagramm zur Binomial-Verteilung:

- $\binom{n}{k}$: Anzahl der Möglichkeiten (Permutationen)
- p^k : Trefferwahrscheinlichkeit
- $(1-p)^{n-k}$: Ausfallwahrscheinlichkeit



Normierung: $\sum_{k=0}^{\infty} B(k; n, p) = 1$

Mittelwert: $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot B(k; n, p) = np$

Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = np(1-p)$

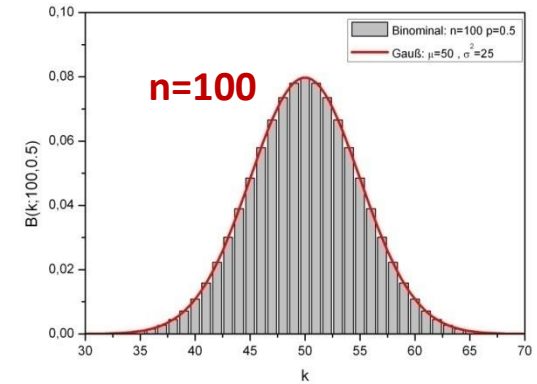
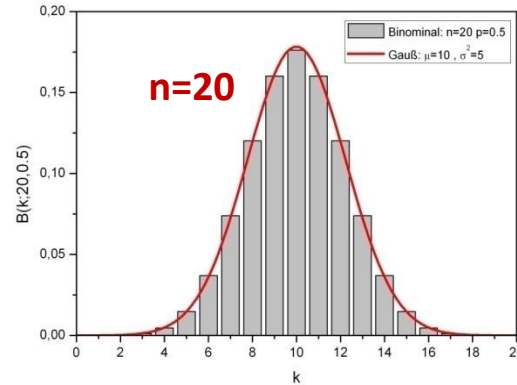
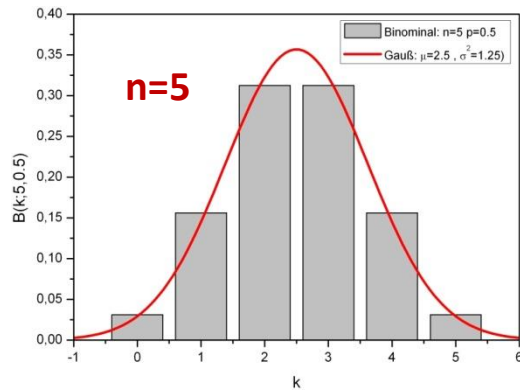
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$



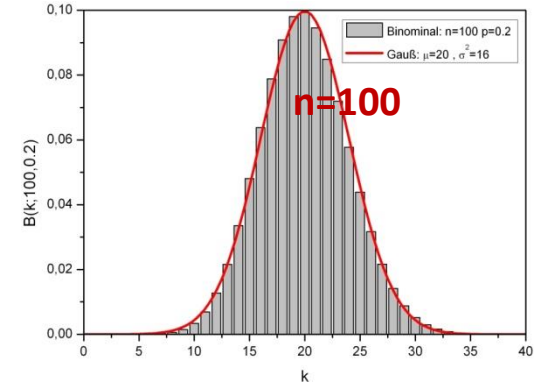
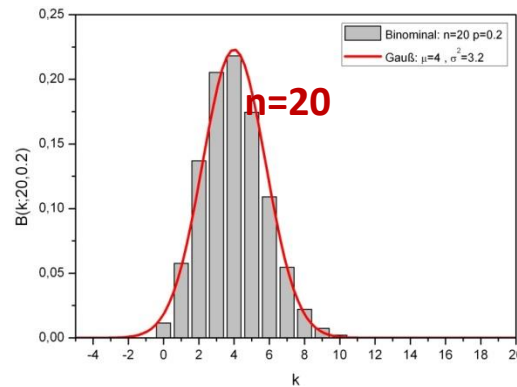
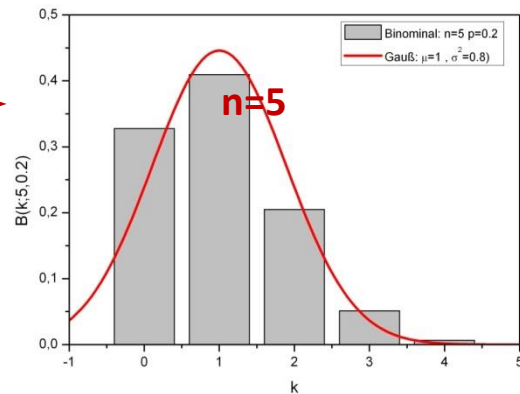
Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis genau k -mal bei n voneinander unabhängigen Versuchen eintritt, wobei p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses, und $(1-p)$ die Wahrscheinlichkeit für das nicht Eintreten des Ereignisses darstellt.

Zentraler Grenzwertsatz

p=0.5 ➔



p=0.2 ➔



Konvergenz der Binomialverteilung an die Normalverteilung (Gauß) für $n \rightarrow \infty$

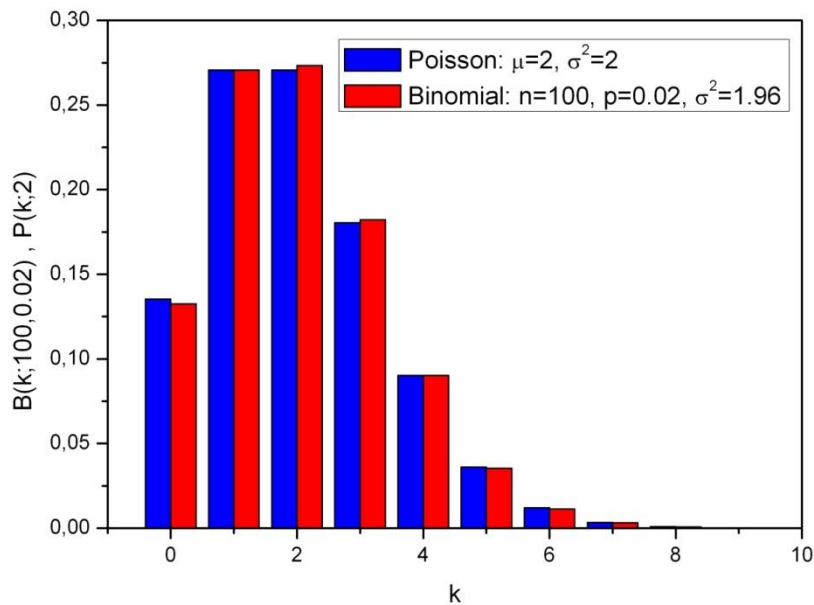
$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Poisson-Verteilung

Eine asymptotisch asymmetrische Binomialverteilung, deren Erwartungswert np für große n und kleine p gegen eine von n unabhängige Konstante λ konvergiert, kann durch die Poisson-Verteilung angenähert werden.

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$



Normierung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1$$

Mittelwert:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k; \mu) = \mu$$

Varianz:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$

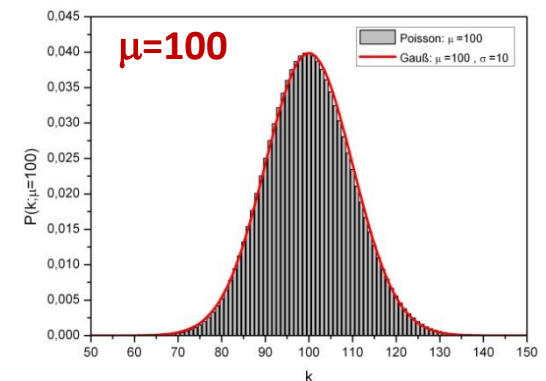
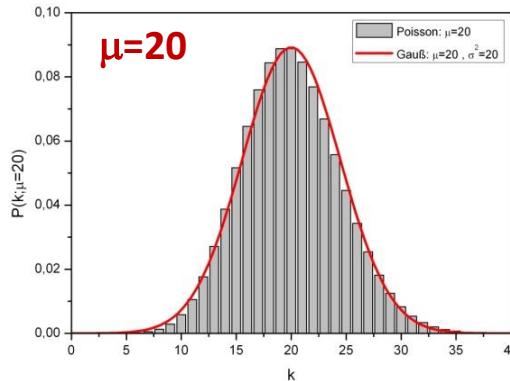
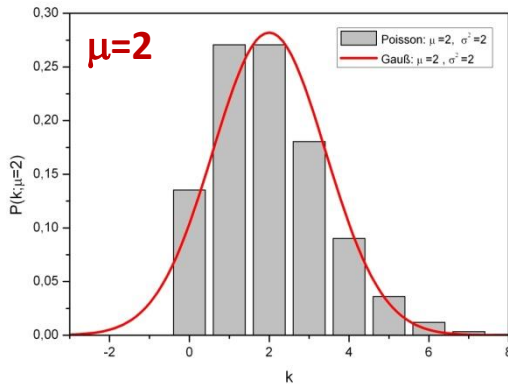


Die Poisson-Verteilung ist also die Grenzverteilung der Binomialverteilung für große n und kleine p . Die Verteilung wird durch einen Parameter μ (Erwartungswert) beschrieben. $P(k; \mu) = \lim_{(k; n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0)} ; np \rightarrow \lambda$

Poisson-Verteilung & „Wurzel N Gesetz“

Für einen großen Mittelwert μ ($\mu > 30$) lässt sich die Poisson-Verteilung in guter Näherung durch eine Gaußverteilung approximieren.

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}} \quad \text{mit} \quad \sigma = \sqrt{\mu}$$



$G(\mu, k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert μ ergeben würde, wobei das Resultat k einer einzigen Messung gegeben ist. Näherungswert für die Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{k}$

Beispiel (z.B. Zählrate beim radioaktiver Zerfall):

Interpretation einer Messung als Schätzung des Mittelwerts: $N=4711$ „counts“

Schätzung der Standardabweichung (absoluter Fehler): $\sqrt{N}$

Relativer Fehler : $\sqrt{N} / N = 1/\sqrt{N}$

Messunsicherheiten

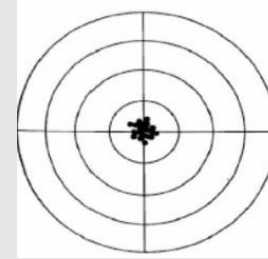
Zufällige oder Statistische Fehler

- ▶ Wiederholung von Messungen (unter gleichen Bedingungen): **einzelne Messwerte werden sich voneinander unterscheiden.**
- ▶ Statistische Fehler streuen „links“ und „rechts“ um den wahren Wert (in vielen Fällen sogar symmetrisch um den wahren Wert).
- ▶ Zufällige Abweichungen sind unvermeidlich und nicht exakt erfassbar.
- ▶ sind statistischer Analyse zugänglich:
Die Größe zufälliger Messabweichungen kann mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsaussagen bestimmt werden.

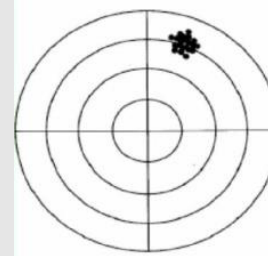


Durch Mehrfachmessungen können statistische Fehler prinzipiell beliebig klein gehalten werden !

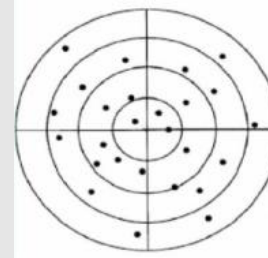
Beispiel syst. und stat. Fehler: Position eines Sterns



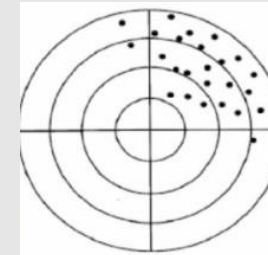
Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: groß



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: groß

Messunsicherheiten

Beispiele für zufällige Messabweichungen:

- ▶ Abweichungen beim Ablesen (Parallaxe)
- ▶ Reaktionsvermögen (z.B. bei Zeitmessung)
- ▶ Unsicherheit der Skaleninterpolation
- ▶ variable Umgebungsbedingungen (Druck, Temperatur, ...)
- ▶ statistischer Charakter der Messgröße (Rauschen, Radioaktivität,...)



Experiment zur Bestimmung des Schwerpunktes von Bierdosen
(Experimental Physik I, WS 2007/08)

Literatur

P.R. Bevington

Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences

McGraw-Hill, New York, 1969, Lib Congress 69-16942

C.B. Lang & N. Pucker

Mathematische Methoden in der Physik

Spektrum, Akad. Verlag, Heidelberg, 1998, ISBN 3-8274-0225-5

W. Gränicher

Messung beendet was nun?

Teubner Verlag, Stuttgart, 1996, ISBN 3-519-13659-7

Praktikumsanleitung!

“Wir wollen richtige Fehler” , J.Stiewe in der Praktikumsanleitung