

Versuch 243

Messung der Boltzmannkonstante

Teil II: Thermisches Rauschen



Abbildung 1: Versuchsaufbau.

I Messaufbau

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmsche Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert
- Rauscharmer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung (60 dB) und zuschaltbarem Bandpassfilter

- Dämpfungsglied 1/1000-fach (-60dB)
- Beheizbarer Widerstand 4 k Ω bei 0°C (Pt4000-Widerstand)
- Heizungsnetzteil mit integrierter Regelelektronik für den beheizbaren Widerstand
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP34401A
- PC mit Drucker

II Literatur

- Homepage des Praktikums (<http://www.physikpraktika.uni-hd.de>).

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Kinetische Theorie der Wärme, Brownsche Bewegung, Grundlagen der Elektrizitätslehre (Falls Sie die Versuche *Spannungsverstärkung* und *Wechselstromeigenschaften von RCL-Gliedern* noch nicht durchgeführt haben, sollten Sie sich den Grundlagenteil der jeweiligen Versuchsanleitung durchlesen).

Verständnisfragen:

1. Was bezeichnet man als thermisches Rauschen? Was ist die Ursache hierfür? Wie lässt sich das Widerstandsrauschen quantitativ beschreiben? Was beschreibt Δf in der Nyquist-Formel?
2. Warum verschwindet der Mittelwert der Rauschspannung einer thermischen Rauschquelle? Durch welche Größe kann die Rauschspannung quantifiziert werden? Berechnen Sie den Effektivwert einer Sinusspannung mit einer Amplitude von 1 V.
3. Was bezeichnet man als „weißes Rauschen“? Wie würden Sie demzufolge die Begriffe „rosa Rauschen“ bzw. „1/f-Rauschen“ interpretieren?

4. Berechnen Sie aus der Nyquist-Formel (4) die Rauschdichte

$$\frac{U_r}{\sqrt{\Delta f}}$$

für einen $1 \text{ k}\Omega$ Widerstand bei Zimmertemperatur (300 K). Bestimmen Sie hieraus die Rauschspannung bei einer Messbandbreite von 20 kHz und einer Bandbreite von 1 MHz.

Der im Praktikumsversuch verwendete Verstärker enthält den Operationsverstärker OPA637. Im Datenblatt dieses Operationsverstärkers liest man: **VERY LOW NOISE: 4,5 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$** . Was besagt diese Angabe? Vergleichen Sie diese Rauschdichte mit der eines $1 \text{ k}\Omega$ Widerstands bei Zimmertemperatur (300 K).

5. Begründen Sie die Aussage: Rauschreduzierung ist durch Mittelwertbildung, Kühlung und Verkleinerung der Bandbreite möglich. Um wieviel verringert sich das Rauschen eines Verstärkers, wenn dieser mit flüssigem Stickstoff gekühlt wird (im Vergleich zu Zimmertemperatur 300 K)?
6. Wie groß ist die Rauschspannung eines $5,87 \text{ M}\Omega$ Widerstands bei einer Messbandbreite von 1 MHz und bei einer Temperatur von 0 K?
7. Über einem ohmschen Widerstand liegt nach der Nyquist-Formel (4) eine Rauschspannung U_r an. Gilt dies auch für einen rein kapazitiven bzw. induktiven Widerstand?
8. Beschreiben Sie den Messaufbau. Welche Aufgabe hat der Verstärker, das Bandfilter, das Dämpfungsglied? Warum werden für die Stromversorgung des Verstärkers Batterien verwendet und nicht ein Netzteil? Wie lässt sich der Frequenzgang des Verstärkers mit nachgeschaltetem Bandfilter bestimmen; wie das Eigenrauschen des Verstärkers?

IV Aufgaben

- Messen Sie die Rauschspannung von sechs verschiedenen Widerständen bei Zimmertemperatur sowie das Eigenrauschen des Verstärkers.
- Bestimmen Sie den Frequenzgang der Messelektronik.
- Messen Sie die Rauschspannung eines Widerstands als Funktion der Temperatur.

V Motivation

Der zweite Teil des Versuchs „*Bestimmung der Boltzmannkonstante*“ verfolgt im wesentlichen zwei Ziele. Zum einen werden Sie mit einer weiteren, sehr präzisen Messmethode die Boltzmannkonstante bestimmen und zum anderen sollen Sie sich mit den physikalischen Ursachen des Rauschens auseinandersetzen.

Die Genauigkeit mit der Sie eine elektrische Größe messen können, wird letztendlich durch das Rauschen begrenzt. Wenn Sie die Ursachen des Rauschens kennen, können Sie den Versuchsaufbau so optimieren, dass das Signal/Rauschverhältnis möglichst groß wird. Dies ist z.B. durch die Verwendung von rauscharmen Verstärkern, durch Mittelwertbildung, durch Kühlung oder durch die Begrenzung der Messbandbreite möglich. Im weiteren Verlauf Ihres Studiums werden Sie sicherlich noch weitere Methoden und Instrumente kennen lernen, mit denen sich äußerst rauscharme Messungen durchführen lassen können (z.B. Lockin-Verstärker).

Obwohl in den meisten Fällen das Rauschen störend auf eine Messung wirkt und daher unerwünscht ist, gibt es aber durchaus auch Anwendungen in Wissenschaft und Messtechnik, bei denen das Rauschen gezielt eingesetzt bzw. ausgenutzt wird. Ein Beispiel ist das Rauschthermometer, mit dem sich ein Temperaturbereich von $\approx 1 \text{ mK}$ bis einigen 1000 K abdecken lässt.

VI Grundlagen

Thermisches Rauschen tritt bei allen elektrischen Leitern auf, sofern sie eine Temperatur von über 0 K besitzen. Die Ursache ist die Brownsche Bewegung der Ladungsträger. Ähnlich wie bei den Latex-Partikeln im Versuchsteil 1, *Brownsche Bewegung*, führen auch die Ladungsträger im Leiter eine zufällige „Zick-Zack-Bewegung“ durch. Selbst wenn an einem Leiter (z.B. einem ohmschen Widerstand) keine äußere Spannung anliegt, führt die thermische Bewegung der Ladungsträger zu einem statistisch variierenden elektrischen Potenzial im Leiter. Misst man mit einem sehr empfindlichen Oszilloskop die Spannung über einen Widerstand, so beobachtet man z.B. einen Verlauf wie er in Abbildung 2 dargestellt ist. Die Rauschspannung U_r schwankt statistisch um einen Mittelwert $\langle U_r \rangle$. Liegt am Widerstand keine äußere Spannung an, so gilt:

$$\langle U_r \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r(t) dt = 0. \quad (2)$$

Der verschwindende Mittelwert ist auch sofort einzusehen, da die thermische Bewegung der Ladungsträger ungerichtet ist. Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird der Ladungsschwerpunkt der Ladungsträger einmal mehr auf der einen Seite des Widerstands liegen, zu einer anderen Zeit mehr auf der anderen Seite. Im Mittel liegt aber eine Gleichverteilung der Ladungsschwerpunkt vor, so dass der zeitliche Spannungsmittelwert verschwindet. Um dennoch die Rauschspannung quantifizieren zu können, muss man den Effektivwert (engl. *root mean square* oder einfach *rms*) der Rauschspannung messen. Dieser entspricht der Wurzel des quadratischen Mittelwerts (vergleichen Sie die Analogie zum mittleren Verschiebungsquadrat beim Versuch „Brownsche Bewegung“):

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_r^2(t) dt}. \quad (3)$$

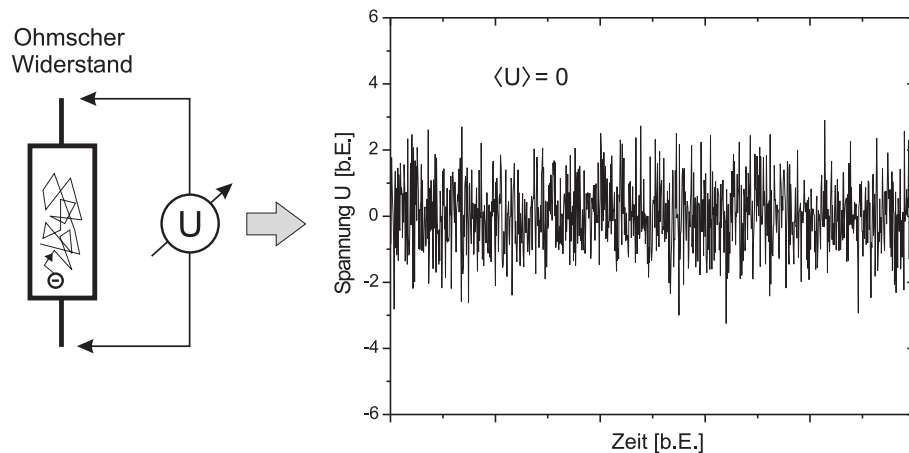


Abbildung 2: Links: Aufgrund der unregelmäßigen thermischen Bewegung der Ladungsträger in einem Leiter (ohmscher Widerstand), liegt an diesem eine fluktuierende Spannung (Rauschspannung) an. Rechts: Rauschspannung über einem ohmschen Widerstand als Funktion der Zeit. Der zeitliche Mittelwert $\langle U_r \rangle$ verschwindet.

Untersucht man das Frequenzspektrum einer thermischen Rauschquelle so stellt man fest, dass **alle** Frequenzanteile bis in den THz-Bereich, in gleichen Maßen

vorhanden sind. Ähnlich wie bei weißem Licht, bei dem alle Frequenzanteile von rot bis blau gleichstark vertreten sind, sind auch im Spektrum einer thermischen Rauschquelle, alle Frequenzen gleichermaßen vertreten. Aus diesem Grund wird das thermische Rauschen in Anlehnung an die Optik auch als weißes Rauschen bezeichnet. Andere Bezeichnungen sind Johnson-Rauschen, Nyquist-Rauschen¹ oder einfach nur Widerstandsrauschen.

Der quadratische Effektivwert der Rauschspannung $\langle U_r^2 \rangle$ hängt nach Harry Nyquist nur von der Temperatur T , dem ohmschen Widerstand R und der Bandbreite Δf ab:

$$\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\Delta f \quad \text{Nyquist-Beziehung,} \quad (4)$$

wobei k die Boltzmannkonstante darstellt.

Die Bandbreite Δf bezieht sich auf die Bandbreite der Messelektronik (Spannungsmessgerät, Verstärker, Filter), mit dem die Rauschspannung detektiert wird. Ein Effektivwert-Voltmeter kann nicht den Effektivwert von Wechsellspannungen mit beliebig hoher Frequenz messen, sondern besitzt eine endliche Messbandbreite Δf . Das gleiche gilt für einen Verstärker (siehe Versuch *Spannungsverstärkung*). Frequenzen außerhalb der Bandbreite, können entweder gar nicht oder nur mit einem großen Fehler gemessen werden. Da das Rauschen frequenzunabhängig ist („weißes“ Spektrum) tragen alle Frequenzen gleichermaßen zur Rauschspannung bei. Somit ist verständlich: Je größer der messbare Frequenzbereich Δf der Messelektronik, desto größer ist nach Gleichung (4) die gemessene Rauschspannung.

Messprinzip

Die Bestimmung der Boltzmannkonstante nach Gleichung (4), ist vom Prinzip her denkbar einfach: Wir müssen nur den Effektivwert der Rauschspannung eines Widerstands R bei der Temperatur T messen, diesen quadrieren $\langle U_r^2 \rangle$ und die Messbandbreite Δf bestimmen. Abbildung 3a) verdeutlicht den Messaufbau. So einfach das Prinzip, desto komplizierter ist die Realisierung

¹Benannt nach John Bertrand Johnson und Harry Nyquist. Das thermische Rauschen wurde erstmals 1918 von Walter Schottky beschrieben und von Johnson 1927 experimentell bestätigt. Ebenfalls 1927 hat Harry Nyquist eine Theorie zum thermischen Rauschen entwickelt (Nyquist-Formel).

dieser Messung, denn die auftretenden Rauschspannungen sind extrem klein. Bei Zimmertemperatur ($\approx 300\text{ K}$) beträgt die Rauschspannung eines $5\text{ k}\Omega$ Widerstands bei einer Messbandbreite von 50 kHz nur

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{4 \cdot k \cdot 300\text{ K} \cdot 5\text{ k}\Omega \cdot 50\text{ kHz}} \approx 2\text{ }\mu\text{V}. \quad (5)$$

Solch kleine Spannungen können ohne einen zusätzlichen Verstärker nicht gemessen werden. Aus diesem Grund verwenden wir im Versuch einen Verstärker, der die Rauschspannung um das **1000-fache** (60 dB) verstärkt. Die Rauschspannung im obigen Beispiel erhöht sich dadurch von $2\text{ }\mu\text{V}$ auf 2 mV . Das ist mit einem guten Voltmeter problemlos messbar.

Allerdings ist zu beachten, dass der Verstärker selbst eine Rauschquelle darstellt. Ein Verstärker besteht letztendlich auch nur aus Bauteilen wie Halbleitern und Widerständen die selbst ein Rauschsignal erzeugen. Neben der verstärkten Rauschspannung $\sqrt{\langle U_R^2 \rangle}$ des Widerstands misst man daher einen zusätzlichen Rauschanteil $\sqrt{\langle U_V^2 \rangle}$ der vom Verstärker stammt. Für die insgesamt gemessene Rauschspannung $\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle}$ gilt:

$$\sqrt{\langle U_{R+V}^2 \rangle} = \sqrt{\langle (U_R + U_V)^2 \rangle} = \sqrt{\langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2\langle U_R \rangle \langle U_V \rangle}. \quad (6)$$

Da die einfachen Mittelwerte nach Gleichung (2) verschwinden, folgt schließlich

$$\langle U_{R+V}^2 \rangle = \langle U_R^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle. \quad (7)$$

Die gemessene quadratische Spannung setzt sich demnach additiv aus den Effektivwerten des verstärkten Widerstandsrauschen und dem Verstärkerrauschen zusammen. Das Verstärkerrauschen lässt sich durch eine „Nullmessung“ bestimmen und später von den gemessenen Werten abziehen.

Um die Bandbreite einzuschränken, wird im Versuch ein zusätzlicher Bandfilter verwendet. Jetzt fragen sie sich sicherlich: „Warum einen zusätzlichen Filter? Prinzipiell ist doch kein zusätzlicher Bandfilter notwendig, da der Verstärker und auch das Messgerät selbst eine begrenzte Bandbreite besitzen?“ Das wir doch einen verwenden, hat zwei Gründe: Zum einen ist die Bandbreite des Voltmeters und des Verstärkers bei hohen Frequenzen nicht sehr „scharf“ begrenzt, so dass wir den Frequenzbereich mit einem steil abfallenden Tiefpassfilter nach oben einschränken. Zum anderen können auch Störsignale, wie vor allem das 50 Hz Netzbrummen² und dessen Harmonische in den Verstärker einkoppeln

²Aus diesem Grund erfolgt auch die Stromversorgung des Verstärkers durch ein Batterie-netzteil und nicht durch eine netzgebundene Stromversorgung.

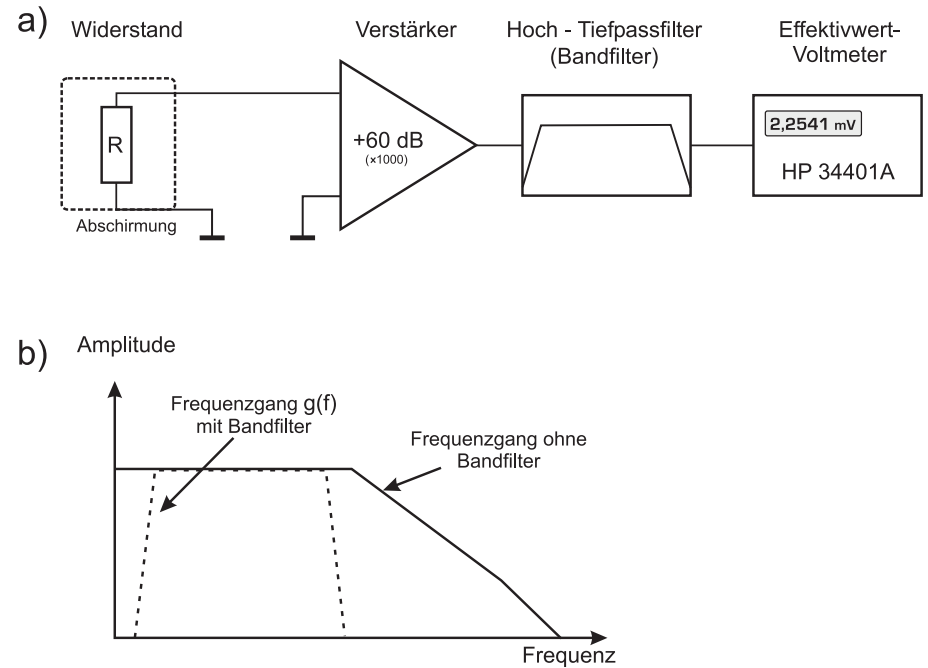


Abbildung 3: a) Messaufbau: Da die Rauschspannung über einem ohmschen Widerstand (Größenordnung $\text{k}\Omega$) bei Zimmertemperatur sehr klein ist, wird diese mit einem rauscharmen Verstärker verstärkt. Die Messbandbreite wird durch den nachfolgenden Bandfilter begrenzt und die verstärkte Rauschspannung mit einem Voltmeter gemessen. b) Schematische Darstellung des Frequenzgangs der Messelektronik. Die gestrichelte Linie zeigt den Frequenzgang mit einem zusätzlichen Bandfilter, die durchgezogene Linie ohne den Filter.

und würden die Messungen verfälschen. Um diese niederfrequenten Störungen zu eliminieren, verwenden wir zusätzlich noch einen Hochpassfilter. Die Hintereinanderschaltung solch eines Hoch- und Tiefpassfilters ergibt einen Bandfilter, dessen Charakteristik in Abbildung 3b) dargestellt ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie wir aus dem verstärkten und gefiltertem Signal die Boltzmannkonstante bestimmen können. Dazu müssen wir den Frequenzgang der Messelektronik, d.h. des Verstärkers mit nachgeschaltetem Bandfilter kennen. Der Frequenzgang $g(f)$ eines Messsystems ist allgemein definiert als das Verhältnis des Ausgangssignals $U_{aus}(f)$ zum Eingangssignal $U_{ein}(f)$ bei der Frequenz f :

$$g(f) = \frac{U_{aus}}{U_{ein}} \Big|_f. \tag{8}$$

Die Eingangsspannung des Messsystems entspricht der Rauschspannung U_r des Widerstands; die Ausgangsspannung der Spannung am Ausgang des Bandfilters. Für den quadratischen Effektivwert der Ausgangsspannung im Frequenzbereich df folgt dann aus der Nyquist- Beziehung:

$$d\langle U_{aus}^2 \rangle = g(f)^2 d\langle U_r^2 \rangle = 4kTR g(f)^2 df. \tag{9}$$

Integrieren wir über alle Frequenzen, so erhalten wir:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTR \int_0^\infty g(f)^2 df \equiv 4kTRB. \tag{10}$$

Allerdings kommt durch den Verstärker noch ein zusätzlicher Rauschanteil U_V hinzu. Nach Gleichung (7) addiert sich der quadratische Effektivwert des Verstärkerrauschens linear zum verstärkten Widerstandsrauschen. Für das Ausgangssignal folgt daher:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTRB + \langle U_V^2 \rangle. \tag{11}$$

Hieraus folgt für die Boltzmannkonstante:

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4TRB}. \tag{12}$$

Die Größe

$$B = \int_0^\infty g(f)^2 df, \tag{13}$$

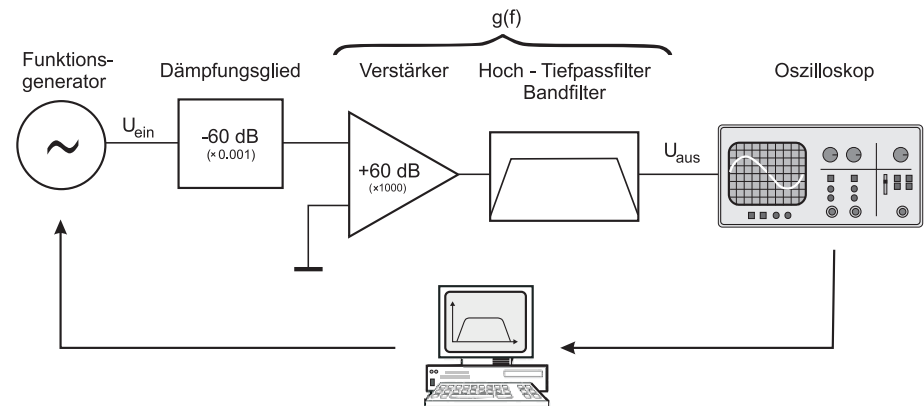


Abbildung 4: Messaufbau zur Messung des Frequenzgangs.

wird als äquivalente Rauschbandbreite des Messsystems bezeichnet. Da $g(f)$ nicht bekannt ist, muss der Frequenzgang experimentell bestimmt werden und das Integral numerisch ausgewertet werden.

Messung des Frequenzgangs $g(f)$

Zur Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und Bandfilters steht ein Funktionsgenerator und ein Oszilloskop zur Verfügung. Das Messprinzip ist in Abbildung 4 dargestellt. Der Funktionsgenerator dient als Signalquelle und liefert ein Sinussignal mit einstellbarer Frequenz und Amplitude. Zwischen Funktionsgenerator und dem Verstärker ist zusätzlich ein Dämpfungsglied geschaltet, welches das Signal des Funktionsgenerators um das 1000-fache (Dämpfung $D=10^{-3}$) abschwächt. Ohne dieses würde der Verstärker wegen der sehr hohen Verstärkung in Sättigung gehen und das Signal verzerren. Nach dem Verstärker folgt das Bandfilter, dessen Ausgangsspannung mit einem Oszilloskop gemessen wird.

Der Funktionsgenerator und das Oszilloskop werden von einem Rechner angesteuert, so dass die Frequenzgangmessung automatisiert durchgeführt werden kann. Der Computer stellt am Funktionsgenerator ein Sinussignal mit der Frequenz f und mit einer konstanten Effektivspannung $\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}$ ein und misst mit dem Oszilloskop die Ausgangsspannung $\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$ hinter dem Bandfilter. Diese Messung wird für mehrere Frequenzen innerhalb des interessierenden Fre-

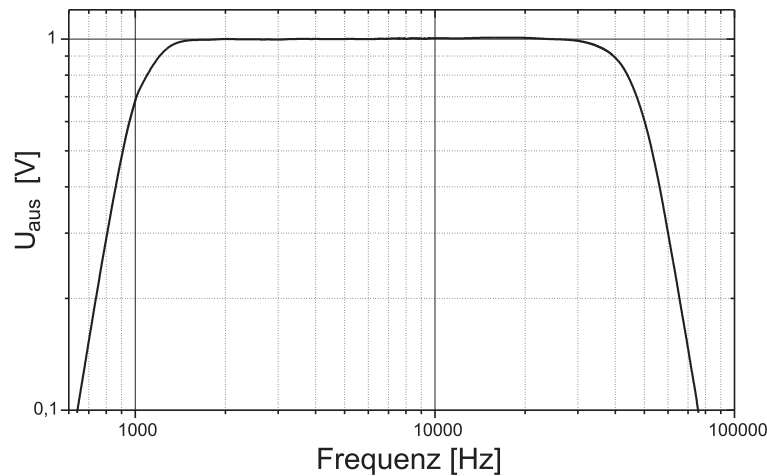


Abbildung 5: Frequenzgang des Verstärkers mit nachgeschaltetem Bandfilter.

quenzbereichs nacheinander wiederholt und die Ausgangsspannung $\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$ als Funktion der Frequenz grafisch dargestellt. In Abbildung 6 ist solch eine Messung dargestellt. Für den Frequenzgang des Verstärkers und des Bandfilters folgt dann:

$$g(f) = \frac{1}{D} \frac{\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}} \quad (14)$$

Die Messdaten $\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$ können gespeichert werden, so dass Sie mit diesen später den Frequenzgang und damit das Integral in Gleichung (13) numerisch berechnen können.

Versuchsübersicht

Der Versuch setzt sich aus zwei Teilaufgaben zusammen.

- Im ersten Teil werden Sie die Rauschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands messen. Dazu stehen verschiedene Widerstände, die in einem

abgeschirmten Gehäuse montiert sind, zur Verfügung. Es handelt sich dabei um gewöhnliche Metallfilmwiderstände. Wenn Sie möchten, können Sie die Rückseite des Gehäuses öffnen und sich diese anschauen. In einer weiteren Messung bestimmen Sie die äquivalente Rauschbandbreite des Messsystems. Dazu müssen Sie zunächst den Frequenzgang $g(f)$ messen und aus diesen Daten das Integral in Gleichung (13) numerisch berechnen. Eine Tabellenkalkulation ist auf dem Messrechner installiert. Aus den Messdaten ist die Boltzmannkonstante zu berechnen.

- Nach der Nyquist- Formel, hängt das Widerstandsrauschen auch von der Temperatur der Rauschquelle ab. Dies sollen Sie im zweiten Versuchsteil experimentell überprüfen. Hierfür steht ein elektrisch beheizbarer Widerstand zur Verfügung. Die Temperatur kann mit Hilfe einer Heizungsregelung zwischen 50°C und 250°C in Schritten von 50°C variiert werden. Da ein Widerstand eine Temperaturabhängigkeit besitzt, ändert sich beim Aufheizen auch der Widerstandswert. Daher muss bei diesem Versuchsteil sowohl der Widerstand als auch dessen Temperatur bestimmt werden. Nun ist es gar nicht so einfach die Temperatur des Widerstands mit einem externen Temperaturfühler mit hoher Präzision zu messen. Aus diesem Grund verwenden wir als „Rauschwiderstand“ ein Widerstandsthermometer (Platinwiderstandsthermometer Pt4000). Dabei handelt es sich um einen ohmschen Widerstand, dessen Widerstand nahezu linear mit der Temperatur ansteigt. Die genaue Temperaturabhängigkeit ist sehr genau bekannt. Es ist daher ausreichend, nur den Widerstand zu messen. Die dazu korrespondierende Temperatur kann aus dem Widerstandswert berechnet werden:

Die Temperaturabhängigkeit eines Pt-Widerstands lässt sich mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2), \quad (15)$$

mit

- R_0 : Widerstand bei 0°C (für ein Pt4000-Thermometer gilt $R_0 = 4000 \Omega$)
- A : $3,908 \times 10^{-3} [^\circ\text{C}^{-1}]$
- B : $-5,775 \times 10^{-7} [^\circ\text{C}^{-2}]$.

Damit kann aus dem gemessenen Widerstand R die Temperatur berechnet werden. Aus Gleichung (15) ergibt sich:

$$T(R) = \frac{-R_0 A + \sqrt{R_0^2 A^2 - 4R_0 B(R_0 - R)}}{2R_0 B}. \quad (16)$$

Aus diesen Messungen ist wieder die Boltzmannkonstante zu berechnen. Ferner können Sie durch Interpolation auf die Temperatur, bei der die Rauschspannung verschwindet, den absoluten Temperaturnullpunkt bestimmen.

VII Durchführung

Schalten Sie gleich zu Beginn des Versuchs das Batterienetzteil, das Effektivwert-Multimeter und den Verstärker ein. Der Verstärker muss **mindestens 15 Minuten** „warmlaufen“. Andernfalls tritt während der Messung eine störende Drift auf. **Achtung: Der Verstärker und das Filter sind äußerst empfindliche Instrumente, die bei falscher Verkabelung zerstört werden können. Bitten Sie daher vor Inbetriebnahme den Assistenten, den Versuchsaufbau zu überprüfen.**

1. Vorversuch: Qualitative Untersuchung des Rauschspektrums eines ohmschen Widerstands

Stecken Sie das Gehäuse mit den umschaltbaren Widerständen direkt auf den Verstärkereingang und wählen Sie den kleinsten Widerstandwert. Den Verstärkerausgang schließen Sie an Kanal 1 des Oszilloskops an. Beobachten Sie mit dem Oszilloskop die Rauschspannung für unterschiedliche Widerstandswerte. Schalten Sie anschließend auf den Spektrumanalysator um. Das Spektrum liefert die Information, wie stark welche Frequenzanteile im Rauschsignal vorhanden sind.

Es empfiehlt sich folgende Einstellungen zu wählen:

- Freq. scale: LOG
- Frequency Range: 0,6 MHz
- Coupling: AC
- Volts/Div.: 5 mV
- Schalten Sie im Menu `Options` → `FFT Options` die Option `Average` ein

Die Bedeutung dieser Einstellungen wird der Assistent mit Ihnen besprechen. Da das thermische Rauschen ein weißes Rauschen ist, sind alle Frequenzen gleich stark vertreten, so dass Sie einen waagrechten Verlauf des Spektrums beobachten sollten. Variieren Sie den Widerstandswert und beobachten Sie die Änderung des Spektrums.

Wenn Sie nun den Frequenzbereich des Spektrumanalysators auf 3 MHz erhöhen, sehen Sie wie der Frequenzgang bei höheren Frequenzen abfällt. Was ist die Ursache hierfür? Schalten Sie nun den Bandfilter dazu, indem Sie den Ausgang des Verstärkers mit dem Eingang des Filters verkabeln und den Filterausgang an das Oszilloskop anschließen. Welche Auswirkungen hat das Filter auf das Spektrum? Drucken Sie das Spektrum zur Dokumentation aus.

2. Messung der Rauschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands

- Stecken Sie das Gehäuse mit den Widerständen **direkt**, d.h. ohne ein zusätzliches Kabel zu benutzen, auf die Eingangsbuchse des Verstärkers. Den Ausgang des Verstärkers verbinden Sie mit einem **möglichst kurzen** Kabel mit dem Eingang des Bandfilters und dessen Ausgang mit dem Voltmeter. Schalten Sie den Rechner ein und starten Sie vom Desktop aus das Programm `Effektivwert`. Dieses Programm liest fortwährend die Messwerte des Voltmeters aus und stellt diese in zwei Diagrammen dar. Das obere Diagramm zeigt die einzelnen Messwerte als Funktion der Zeit, bzw. als Funktion der Messnummer. Zusätzlich wird noch der Mittelwert berechnet und im unteren Diagramm als Funktion der Zeit aufgetragen. Der aktuelle Messwert sowie Standardabweichung werden ebenfalls angezeigt. Um das Programm zu starten, müssen Sie auf den Pfeil in der linken oberen Ecke klicken.
- Messen Sie die Rauschspannung für sechs Widerstände im Bereich von 5 k Ω bis 30 k Ω in Schritten von 5 k Ω . Bei jeder Messung sollten Sie etwa 100 Einzelmessungen aufnehmen und hiervon den Mittelwert und die Standardabweichung notieren. Der Fehler der Widerstände ist kleiner als 0,5%. Die Messgenauigkeit des Voltmeters können Sie dem ausliegenden Datenblatt entnehmen. Notieren Sie die Zimmertemperatur.
- Um das Eigenrauschen des Verstärkers zu bestimmen, müssen Sie die Rauschspannung bei einem kurzgeschlossenen Verstärkereingang messen (d.h. für einen Widerstand von 0 Ω). Entfernen Sie dazu Widerstandsbox und stecken Sie auf den Verstärkereingang einen Kurzschlußstecker.

Ein passender Adapter liegt am Messplatz aus. Führen Sie die Messung der Rauschspannung analog zu der Messung mit den Widerständen durch, d.h. Mittelwert notieren.

3. Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Bandfilters

Bauen Sie die Schaltung gemäß Abbildung 4 auf. Stecken Sie das Dämpfungsglied (Abschwächung $D = 0,001 \pm 0,2\%$) direkt, ohne ein Kabel zu benutzen auf die Eingangsbuchse des Verstärkers. Achten Sie auf die richtige Verschaltung: Der **Ausgang** des Dämpfungsglieds muss mit dem Verstärkereingang verbunden werden und der Ausgang des Bandfilters muss an **Kanal 1** des Oszilloskops angeschlossen werden. Starten Sie die Oszilloskopsoftware vom Desktop aus. Falls Sie mit dem Programm noch nicht gearbeitet haben, wird Sie der Betreuer in die Bedienung einweisen. Stellen Sie am Funktionsgenerator ein Sinussignal mit einer Frequenz von 100 Hz und einer Amplitude von **0,2 V_{rms}** ein. Diese Spannung entspricht der Größe $\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}$ in Gleichung (14). Starten Sie als nächstes den *Circuit-Analyser*. Damit der Frequenzgang über den gesamten Bereich gut zu erkennen ist, sollten Sie folgende Einstellungen wählen:

- Vertical Scale: 5 dB/div
- V-Range: 0,15 V
- Frequency Range: 1 MHz
- Frequency Start: 100 Hz
- Stellen Sie für die Frequenzschritte 20% ein (Menupunkt **Options** → **Frequency Step Size**)
- Wählen Sie aus dem Menupunkt **Options**, die Option **Automatic Voltage Scale** und folgen Sie den Hinweisen des erscheinenden Fensters.

Notieren Sie alle Einstellungen sowie die Eingangsspannung $\sqrt{\langle U_{ein}^2 \rangle}$ und die Abschwächung D des Dämpfungsglieds in Ihr Protokollheft. Starten Sie die Frequenzgangmessung und speichern Sie die Messdaten nach Beendigung der Messung unter **C:\Messungen** unter einem wiederfindbarem Dateinamen ab (Menupunkt **File** → **Save Data...**).

4. Messung der Rauschspannung als Funktion der Temperatur

- Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Rauschspannung des beheizbaren Widerstands, dessen Widerstandswert als auch dessen Temperatur bestimmen. Da die Temperaturabhängigkeit des Widerstands nach Gleichung (16) bekannt ist, kann die Temperatur des Widerstands aus dem Widerstandswert berechnet werden. Es reicht demnach aus, nur den Widerstand und die Rauschspannung zu messen. Beide Messungen sind mit dem Multimeter möglich. Allerdings nicht gleichzeitig. Sie müssen daher zuerst den beheizbaren Widerstand an das Multimeter anschließen und den Widerstandswert messen und anschließend den Widerstand an den Verstärker anschließen und mit dem Multimeter die Rauschspannung messen. Bei beiden Messungen werden die Daten wieder mit dem Rechner ausgelesen und grafisch dargestellt.
- **Lesen Sie bevor Sie mit diesem Teilversuch beginnen, den folgenden Abschnitt vollständig durch. Sollten Sie aufgrund einer Fehlbedienung diesen Versuchsteil wiederholen müssen, kann es sehr lange dauern, bis sich der beheizbare Widerstand wieder abgekühlt hat.**

Heizungsregelung noch nicht einschalten! Stellen Sie die Temperatur der Heizungsregelung auf 50°C ein und schalten Sie den Heizstromschalter an der Frontplatte auf die Stellung *Aus*. **Schalten Sie das Gerät erst jetzt ein.** Der Netzschalter befindet sich auf der Rückseite hinten rechts. Schließen Sie den beheizbaren Widerstand an das Multimeter an und öffnen Sie das Programm **Widerstand** vom Desktop aus. Das Programm stellt die Messwerte in zwei Diagrammen dar. Im oberen Diagramm wird der gemessene Widerstandswert als Funktion der Zeit bzw., der Messnummer dargestellt. Aus diesen Widerstandswerten wird gemäß Gleichung (16) die dazugehörige Temperatur berechnet und im unteren Diagramm grafisch dargestellt. Starten Sie das Programm durch einen Klick auf den Pfeil in der linken oberen Ecke. Warten Sie eine kurze Zeit ab und schalten Sie dann den Schalter für den Heizstrom an der Heizungsregelung ein. Die Temperatur des Widerstand steigt nun auf ungefähr 50°C an. Wenn die eingestellte Temperatur erreicht ist, empfiehlt es sich, das Programm zu stoppen und **erneut zu starten**. Dadurch werden die bisher aufgenommenen Daten gelöscht und die neuen Daten mit einer besseren Auflösung angezeigt. Beobachten Sie den Temperaturverlauf. Warten Sie so lange ab, bis die Temperatur über mehrere Minuten eine Stabilität von besser als 0,2°C aufweist. Stoppen Sie dann das Programm und notieren Sie den

Widerstandswert und die Temperatur.

Als nächstes müssen Sie die Rauschspannung des Widerstands messen. Dazu müssen Sie den geheizten Widerstand mit einem möglichst **kurzen Kabel** an den Verstärkereingang anschließen und den Ausgang des Bandfilters mit dem Multimeter verbinden. Führen Sie diesen Umbau möglichst schnell durch, da in der Zwischenzeit die Temperatur des Widerstands, trotz der Heizungsregelung, etwas „wegdriften“ kann. Starten Sie zur Messung der Rauschspannung das Programm **Effektivwert** und messen Sie genauso wie in Aufgabe 2 den Effektivwert der Rauschspannung (d.h. den Mittelwert und die Standardabweichung von etwa 100 Einzelmessungen notieren).

Bauen Sie den Versuchsaufbau wieder so um, dass Sie mit dem Multimeter den Widerstandswert messen können. D.h. den beheizbaren Widerstand wieder direkt an das Multimeter anschließen. Messen Sie noch einmal bei der eingestellten Temperatur mit der Programm **Widerstand** den Widerstand und die genaue Temperatur und vergleichen Sie diese mit den zuvor gemessenen Werten. Aus den Abweichungen sind die Fehler für den Widerstand und die Temperatur abzuschätzen (Driftfehler).

Erhöhen Sie nun die Temperatur an der Heizungsregelung auf den nächsten Wert, d.h. 100°C und wiederholen Sie die Messungen genauso wie zuvor.

- Führen Sie die Messungen für alle Temperaturen bis 250°C durch.
- Schalten Sie nach Beendigung der Messung die Heizungsregelung aus. Stellen Sie den Temperaturwahlschalter zurück auf 50°C ein und den Heizstromschalter auf die Position *Aus*. Schalten Sie auch das Batterienetzteil aus, so dass die Ladung der Akkumulatoren aufgefrischt werden kann.

Beginnen Sie gleich nach der Versuchsdurchführung mit der Auswertung Ihrer Messdaten. Die Berechnung des Frequenzgangs und der äquivalenten Rauschbandbreite sollten Sie auf jeden Fall noch während des Praktikumsversuchs durchführen.

VIII Auswertung

1. Fassen Sie Ihre Beobachtungen des Vorversuchs zusammen.

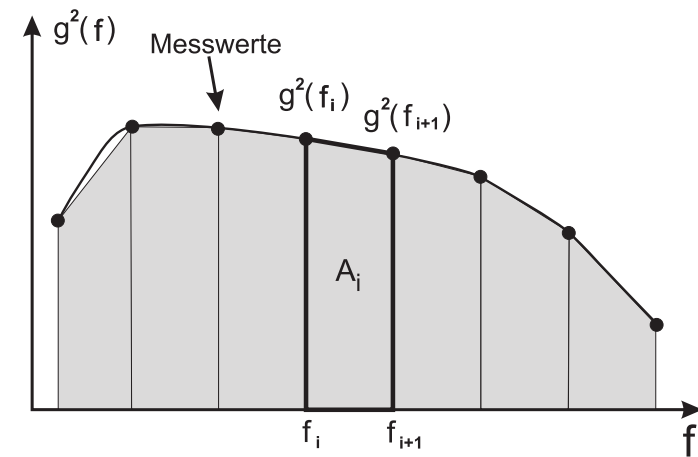


Abbildung 6: Numerische Integration nach der Trapezregel.

2. Es ist sinnvoll zuerst mit der Auswertung des Frequenzgangs (Aufgabe 3) zu beginnen. Tragen Sie den gemessenen Frequenzgang in ein doppelloarithmisches Diagramm ein und berechnen Sie aus den Messdaten die äquivalente Rauschbandbreite.

Hinweis zur numerischen Integration bei der Berechnung der äquivalenten Rauschbandbreite B:

Aus dem gemessenen Frequenzgang $g(f)$ ist das Integral

$$B = \int_0^{\infty} g(f)^2 df, \quad (17)$$

zu berechnen. Da $g(f)$ nicht analytisch bekannt ist, müssen Sie die Integration numerisch, z.B. nach dem Trapezverfahren, durchführen. Das Integrationsprinzip ist in Abbildung 6 dargestellt. Die Fläche zwischen der Kurve und der Abszisse wird durch mehrere Trapeze approximiert. Seien $g(f_i)^2$ und $g(f_{i+1})^2$ die Messwerte bei den Frequenzen f_i und f_{i+1} . Für die Fläche A_i des i-ten Trapez gilt dann:

$$A_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{2} \left(g(f_{i+1})^2 + g(f_i)^2 \right). \quad (18)$$

Die Gesamtfläche und somit das Integral entspricht dann der Summe der Flächen aller Trapeze:

$$\int_0^\infty g(f)^2 df \approx \sum A_i. \tag{19}$$

Die Berechnung der Summe lässt sich mit einer Tabellenkalkulation (z.B. *Excel*) sehr einfach durchführen. Eine separate Anleitung liegt am Praktikumsplatz aus bzw. kann von der Homepage des Praktikums heruntergeladen werden.

Die Bestimmung des Fehlers der äquivalenten Rauschbandbreite ist nicht trivial. Zum einen hängt die Genauigkeit von der Anzahl der Messwerte und damit von der Anzahl der approximierten Trapezflächen ab. Zum anderen auch von der Genauigkeit des verwendeten Oszilloskops und des Funktionsgenerators. Verschiedene Vergleichsmessungen mit kleineren Frequenzschritten und mit anderen Instrumenten haben gezeigt, dass die äquivalente Rauschbandbreite um etwa 2% variieren kann. Nehmen Sie daher diesen Wert als grobe Abschätzung an.

$R [\Omega]$	$\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$	$m \equiv (\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle) / (4TB)$	Δm
0			
5000			
10000			
15000			
20000			
25000			
30000			

Tabelle 1:

3. Die Boltzmannkonstante kann aus Gleichung (12) bestimmt werden. Wenn Sie die Größe

$$m \equiv (\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle) / (4TB) \tag{20}$$

als Funktion des Widerstands in ein Diagramm eintragen, so ergibt sich eine Gerade mit einer Steigung, die gerade der Boltzmannkonstante entspricht. Berechnen Sie zunächst folgende Größen gemäß Tabelle 1.

$\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$ entspricht den mit dem Voltmeter gemessenen Effektivwert, $\sqrt{\langle U_V^2 \rangle}$ steht für das Verstärkerrauschen, d.h. den Effektivwert den Sie am kurzgeschlossenen Verstärkereingang (d.h. $R = 0 \Omega$) gemessen haben und Δm bezeichnet den Fehler des Ausdrucks der dritten Spalte.

Stellen Sie die Größe m als Funktion des Widerstands grafisch dar und bestimmen Sie aus der Geradensteigung die Boltzmannkonstante. Wenn Sie möchten können Sie dies auch mit *Excel* durchführen und an die Messwerte eine Gerade anfitzen. Eine separate Anleitung hierfür liegt am Versuchsplatz aus.

$R [\Omega]$	$T [^\circ C]$	$\sqrt{\langle U_{aus}^2 \rangle}$	$n \equiv (\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle) / (4RB)$	Δn

Tabelle 2:

4. Berechnen Sie zunächst die in Tabelle 2 zusammengestellten Größen.

Tragen Sie n als Funktion der Temperatur auf und bestimmen Sie erneut aus der Geradensteigung die Boltzmannkonstante. Interpolieren Sie auf die Temperatur, bei der die Rauschspannung verschwindet und bestimmen Sie hieraus den absoluten Temperaturnullpunkt. Die Auswertung mit *Excel* erfolgt genauso, wie bei der zuvor durchgeführten Aufgabe.

5. Fassen Sie Ihre Messergebnisse zusammen und vergleichen Sie diese mit den Literaturwerten.