5. Schalenmodell

Einteilchen-Schalenmodell: Betrachtet werden die einzelnen Nukleonen im effektiven Potential aller übrigen Nukloenen. Es existieren diskrete Energienniveaus die entsprechend Pauli-Prinzip aufgefüllt werden.

Energieschalen = Energieniveaus die nahe beieinander liegen und von anderen Zuständen deutlich getrennt sind.

5.1 Magische Zahlen

Kerne mit bestimmten Protonen/Neutronen-Zahlen sind besonders stabil um kommen deshalb auch besonders häufig vor: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

$\rightarrow$Separation eines Nukleons benötigt besonders viel Energie

Doppelt magische Kerne sind sehr stabil:

$${}^{4}_{2}He_{2}\ ,\ {}^{16}_{8}O_{8}\ ,\ {}^{40}_{20}Ca_{20}\ ,\ {}^{48}_{20}Ca_{28}\ ,\ {}^{208}_{82}Pb_{126}$$

Magische Zahlen lassen sich mittels des Schalenmodells erklären, das von M.Göppert-Mayer(*), H.Jensen(*), Haxel und Suess maßgeblich entwickelt worden ist.

(*) Nobelpreis 1963

5.2 Eigenzustände im Kernpotential

Für kugelsymmetrisches Kernpotential kann Wellenfunktion in **Radial- $R_{nl}(r)$** und **Winkelanteil $Y_{lm}(\theta, \phi)$** zerlegt werden:

$$n\ell \quad \text{mit} \quad \begin{cases} n = 1,2,3,.... \\ \ell = s,p,d,.... \end{cases}$$

Radiale Quantenzahl, $n=n_r+1$
n_r Zahl der Bäuche in Radialfkt.

$$m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell \qquad \text{(2l+1) Zustände}$$

Partät $P(Y_{lm}(\theta, \phi)) = (-1)^l$

Energie des Zustandes ist unabhängig von Quantenzahl l und m:
Aufgrund der möglichen Spineinstellungen $\rightarrow$ 2(2l+1) fache Entartung

Potentialansätze

Motivation: Aufgrund kurzreichweitiger Kernkraft sollte das effektive Potential in etwa der Dichteverteilung der Nukleonen im Kern entsprechen.

a) 3-dimensionale harmonischer Oszillator:

entspricht näherungsweise dem Potential das man bei einer gaußförmigen Nukleonen-Verteilung im Falle leichter Kerne erwartet.

$$E_{Osz} = (N + \frac{3}{2})\,\hbar\omega$$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} N = N_x + N_y + N_z \\ N = 2(n-1) + \ell \quad (= 2n_r + \ell \quad wg.\, n = n_r + 1) \end{cases}$$

Zustände mit gleichem N aber unterschiedlichem n und l sind entartet.

Entartung für festes l: 2·(2l+1)

Entartung für festes N: (N+1)(N+2)

→ Erklärung der ersten magischen Zahlen: 2, 8, 20

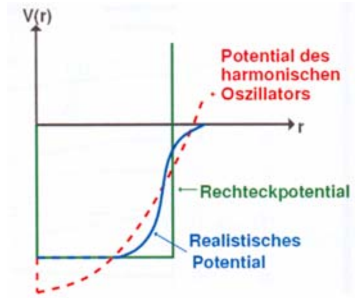
$N = 2(n-1) + \ell$

Harmonischer Osz.

nl	N	$2n+l-2$	m_l-Entartung	mit Spin	Zustände mit E_N	Zustände $E \leq E_N$	Woods-Saxon
$1s$	0	$2\cdot1+0-2$	1	2	2	2	2
$1p$	1	$2\cdot1+1-2$	3	6	6	8	8
$1d$	2	$2\cdot1+2-2$	5	10			18
$2s$		$2\cdot2+0-2$	1	2	12	20	20
$1f$	3	$2\cdot1+3-2$	7	14			34
$2p$		$2\cdot2+1-2$	3	6	20	40	40
$1g$	4	$2\cdot1+4-2$	9	18			
$2d$		$2\cdot2+2-2$	5	10			
$3s$		$2\cdot3+0-2$	1	2	30	70	
$1h$	5	$2\cdot1+5-2$	11	22			
$2f$		$2\cdot2+3-2$	7	14			
$3p$		$2\cdot3+1-2$	3	6	42	112	

b) Woods-Saxon Potential

$$V_{zentral}(r) = -\frac{V_0}{1+e^{(r-R)/a}}$$



Motivation:

In schweren Kernen wird Dichteverteilung der Nukleonen durch Fermi-Verteilung beschrieben $\rightarrow$ Woods-Saxon Potential berücksichtigt diese Dichteverteilung

Aufhebung der Entartung von Zuständen mit gleichem N und unterschiedlichem (n,l):

Woods-Saxon:	2, 8, 18, 20, 34, 40, 58	Nur die ersten magischen Zahlen korrekt beschrieben
Mag. Zahlen:	2, 8, 20, 28, 50, 82	

Keines der verwendeten Potentiale erklärt die magischen Zahlen völlig.

5.3 Spin-Bahn Kopplung

Die Kopplung des Nukleonspins mit dem Bahndrehimpuls führt zu einem zusätzlichem Potentialterm:

$$V(r) = V_{Zentral}(r) + V_{\ell s}(r)\frac{\langle \vec{\ell}\vec{s}\rangle}{\hbar^2}$$

Bem.:
- Spin-Bahn-Kopplung wird rein phänomenologisch eingeführt (s.a. Nukleon-Nukleon Kraft, Abschnitt 1)
- Energieaufspaltung $\Delta E_{ls} \approx O(E_n - E_{n-1})$

Betrachte man Gesamtdrehimpuls j

Mit $\vec{j}^2 = (\vec{\ell}+\vec{s})^2 = \vec{\ell}^2 + \vec{s}^2 + 2\vec{\ell}\vec{s}$

$$\vec{\ell}\vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2) \qquad \langle \vec{j}^2\rangle = \hbar^2 j(j+1)$$

folgt
$$\frac{\langle \vec{\ell}\vec{s}\rangle}{\hbar^2} = \frac{1}{2}\big(j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\big) = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{fuer } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{(\ell+1)}{2} & \text{fuer } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Energieaufspaltung zwischen beiden Niveaus

n,ℓ: $j = \ell - \frac{1}{2}$: $\quad -\frac{\ell+1}{2} V_{\ell s}(r)$

$j = \ell + \frac{1}{2}$: $\quad \frac{\ell}{2} V_{\ell s}(r)$

Experimentell: $V_{\ell s}(r) < 0$

$$\Delta E_{\ell s} = \frac{2\ell+1}{2} V_{\ell s}(r)$$

Wg. $V_{\ell s}(r) < 0$ umgekehrt wie bei Atomen

Bem.: Die Spin-Bahn-Aufspaltung $V_{ls}(r)$ wurde für jede Schale einzeln aus Kerndaten bestimmt

Gesamtdrehimpuls j wird zur Bezeichnung der Energieniveaus als zusätzlicher Index angegeben:

$1f$: $1f_{5/2}$, $1f_{7/2}$

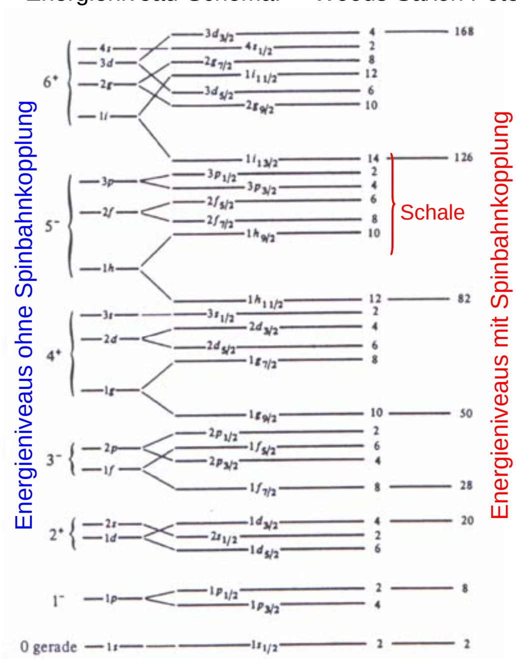
Entartung:

$1f: \quad \ell = 3 \rightarrow \quad 2(2\ell+1) = 14$

$1f_{7/2}: \quad j = \frac{7}{2} \rightarrow \quad 2j+1 = 8$

$1f_{7/2}: \quad j = \frac{5}{2} \rightarrow \quad 2j+1 = 6$

Energieniveau-Schema: Woods-Saxon Potential



Erklärt magische Zahlen

Besetzungsregeln:

Besetze niedrigste freie Niveaus

Sättige Spins ab $\rightarrow$ Paarungsterm

5.4 Vorhersagen des Schalenmodells

a. Magische Zahlen (abgeschlossene Schalen)

b. In vollständig besetztem j-Niveau koppeln alle magn. Momente m_j der Nukleonen zu Null: Abgeschlossene n/p Niveaus haben Gesamtdrehimpuls 0.

c. Für Kerne mit einem Nukleon außerhalb einer abgeschlossenen Unterschale: Spin und Partät des Kerns wird durch diese Nukleonen bestimmt.

   Beispiel: $^{17}_{8}O_9$ Grundzustand: n in $1d_{5/2}$ Schale $\rightarrow$ $J^P = \frac{5}{2}^+$

d. Fehlendes Nukleon (Loch) in einer sonst abgeschlossenen Schale bestimmt ebenfalls Spin und Parität des Kerns:

   Beispiel: $^{15}_{8}O_7$ Grundzustand: Loch in $1p_{1/2}$ Schale $\rightarrow$ $J^P = \frac{1}{2}^-$

e. Kern-Anregungszustände durch "Leucht-Nukleonen" gut beschrieben.

f. Kerne mit teilweise gefüllten j-Schalen schwierig: Es existieren mehrere Kopplungsmöglichkeiten deren Entartung durch Restwechselwirkungen aufgehoben werden.

   $\rightarrow$ Kopplungsregeln zur Vorhersage der Grundzustandseigenschaften:

   z.B. geradzahlig vorkommende Nukleonen koppeln zum Drehimpuls 0.
   $\rightarrow$ gg Kerne haben daher immer J=0.

5.5 Magnetische Momente

Im Schalenmodell besitzen die Nukleonen Spin und einen spezifischen Drehimpuls. Das magnetische Moment der Kerne kann als Summe der magnetischen Momente der Spins und der Bahndrehimpulse der Nukleonen aufgefasst werden:

$$\vec{\mu}_{Kern} = \mu_N \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^{A} (g_\ell \vec{\ell}_i + g_s \vec{s}_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_K = \text{Kernmagneton} = \dfrac{e\hbar}{2m_p} \\ g_\ell = \begin{cases} 1 & \text{Protonen} \\ 0 & \text{Neutronen} \end{cases} \\ g_s = \begin{cases} +5.58 & \text{Protonen} \\ -3.82 & \text{Neutronen} \end{cases} \end{array} \right.$$

Einfache quantitative Vorhersagen lassen sich für Ein-Nukleon/Ein-Loch Kerne machen: hier wird das magnetische Moment gerade durch Nukleon bzw. Loch bestimmt:

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s$$

$$g_j \mu_N \vec{j} = \mu_N (g_\ell \vec{\ell} + g_s \vec{s})$$

Zur Berechnung von g_j: $$g_j\left\langle \vec{j}^{\,2}\right\rangle = g_\ell\left\langle \vec{\ell}\vec{j}\right\rangle + g_s\left\langle \vec{\ell}\vec{s}\right\rangle$$

mit $$\vec{s} = \vec{j} - \vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad s(s+1) = j(j+1) - 2\left\langle \vec{\ell}\vec{j}\right\rangle + \ell(\ell+1)$$

$$\vec{\ell} = \vec{j} - \vec{s} \quad \Rightarrow \quad \ell(\ell+1) = j(j+1) - 2\left\langle \vec{s}\vec{j}\right\rangle + s(s+1)$$

folgt $$g_j = \frac{g_\ell\left\langle \vec{\ell}\vec{j}\right\rangle + g_s\left\langle \vec{\ell}\vec{s}\right\rangle}{\left\langle \vec{j}^{\,2}\right\rangle}$$

$$= g_\ell \frac{j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)}$$

Für den Kernspin j = l ± ½ ergibt sich dann

$$\boxed{\vec{\mu}_j = g_j \mu_N \vec{j} \qquad \text{mit} \qquad g_j = (g_\ell \pm \frac{g_s + g_\ell}{2\ell+1})}$$

Beispiele:

Kern	Zustand	J^P	Erwartung μ_j/μ_N	Experiment μ_j/μ_N
^{15}N	Proton in $1p_{1/2}$	$1/2^-$	-0.264	-0.283
^{15}O	Neutron in $1p_{1/2}$	$1/2^-$	+0.638	+0.719
^{17}O	Neutron in $1d_{5/2}$	$5/2^+$	-1.913	-1,894
^{17}F	Proton in $1d_{5/2}$	$5/2^+$	+4.722	+4.793

5.6 γ-Strahlung

Angeregte Kernzustände (1 Nukleon in angeregtem Energiezustand) zerfallen unter Aussendung von elektromagnetischer Strahlung.

Strahlung lässt sich als Reihenentwicklung verschiedener Multipolanteile mit charakteristischer Winkelverteilung beschreiben.

Multi-polarität	elektrisch			magnetisch		
	$E\ell$	$\lvert\Delta J\rvert$	ΔP	$M\ell$	$\lvert\Delta J\rvert$	ΔP
Dipol	E1	1	−	M1	1	+
Quadrupol	E2	2	+	M2	2	−
Oktupol	E3	3	−	M3	3	+
…	…	…	…	…	…	…

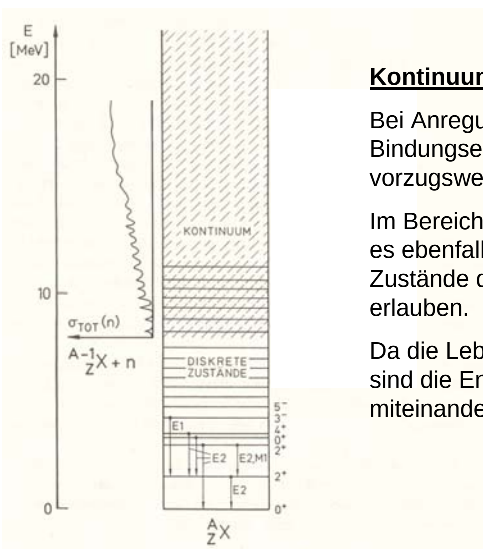
$\Delta P = (-1)^{\ell}$ $\quad\quad$ $\Delta P = (-1)^{\ell+1}$

Welche Multipolbeiträge für einen spezifischen Übergang möglich sind, ergibt sich aus den Erhaltungssätzen für Gesamtdrehimpuls und Parität.

Gesamtdrehimpulserhaltung: $\left|J_i - J_f\right| \leq \ell \leq J_i + J_f$

Übergangswahrscheinlichkeiten für erlaubte Dipolübergänge:

- Wahrscheinlichkeit umso größer je kleiner Multipolordnung
- Stärke von M_l Übergängen entspricht etwa der Stärke von E_{l+1} Übergängen
- Lebensdauer angeregter Kernzustände typ $10^{-9} – 10^{-15}$ s ($\Leftrightarrow$ Linienbreiten < 1 eV)



<u>Kontinuumszustände:</u>

Bei Anregungsenergien oberhalb der typ. Bindungsenergien (~8MeV) können Nukleonen – vorzugsweise Neutronen - emittiert werden.

Im Bereich oberhalb dieser Emissionsschwelle gibt es ebenfalls noch diskrete quasi-gebundene Zustände die Übergänge zu tieferen Niveaus erlauben.

Da die Lebensdauer dieser Zustände sehr kurz ist sind die Energieniveaus breit und überlappen miteinander $\rightarrow$ Ausbildung eines Kontinuums.

5.7 Kollektive Anregungen

Einteilchen-Schalenmodell in der Nähe abgeschlossener Schalen gut anwendbar. Angeregte Kernzustände werden als Anregung eines Nukleons beschrieben.

Bisher nicht betrachtet: Kollektive Anregungen der Nukleonen

Phänomenologisch:

Anregungen = Dichte- und Formfluktuationen um Gleichgewichtslage.

- Oberflächenschwingungen
- Deformationen des Kerns → führt zu Quadrupolmomenten
- Rotationen des deformierten Kerns

⇒ Kollektiv-Modelle

“Vereinigtes Kernmodell“:

Verbindet die Eigenschaften des Schalenmodells mit Eigenschaften kollektiver Modelle. *Siehe Literatur: Frauenfelder-Henley, Povh.*