

### 3. Einfache Kernmodelle

#### 3.1 Tröpfchenmodell

- Motivation:
- Kerne haben konst. Nukleondichte
  - Volumen  $\sim A$
- $\Rightarrow$  Behandlung als Flüssigkeitstropfen

#### Bindungsenergie B (Weizsäcker):

- Volumenbeitrag  $E_V$ : Jedes Nukleon liefert Beitrag ( $\approx 16$  MeV) zu B
$$E_V = a_V A$$
(berücksichtigt Sättigung, ansonsten wäre  $B \sim A(A-1)$ )
- Oberflächenbeitrag  $E_S$ : Nukleonen an Oberfläche weniger stark gebunden. Reduktion der Bindungsenergie um Beitrag der Oberflächennukleonen:
$$E_S = -a_S A^{2/3}$$
Oberfläche  $\sim R^2$  mit  $R \sim A^{1/3} \Rightarrow E_S \sim A^{2/3}$

- Coulomb-Abstoßung  $E_C$ : Berücksichtigt elektrische Abstoßung der Protonen ( $\sim Z(Z-1) \sim Z^2$ )
$$E_C = -a_C Z^2 A^{-1/3}$$
- Asymmetrieterm  $E_A$ : Bei kleinen Massenzahlen findet man, dass Kerne bei gleicher Zahl von Protonen und Neutronen stabil sind. Bei schweren Kernen werden mehr Neutronen eingebaut um Coulomb-Abstoßung zu kompensieren. Bevorzugter Einbau von Nukleonen verlangt wegen Pauli-Prinzip aber höheren Energieaufwand:
$$E_A = -a_{Asym} \frac{(N-Z)^2}{A}$$
- Paarungsterm  $E_p$ : Empirisch findet man, dass Kerne mit gerader Zahl von Protonen und Neutronen besonders stabil sind:

$$E_p = \frac{\delta}{\sqrt{A}} \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{gg-Kerne} \\ 0 \text{ MeV} & \text{ug-Kerne} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{uu-Kerne} \end{cases}$$

**Bethe-Weizsäcker Formel:**

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{Asym} \frac{(N-Z)^2}{A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

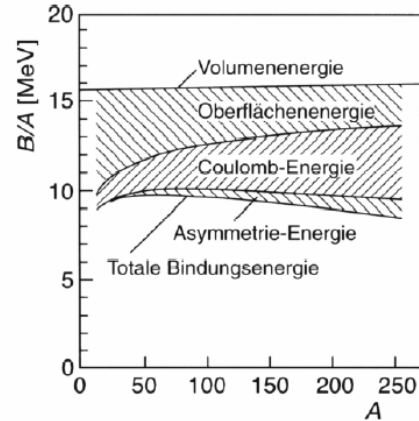
$$a_V \approx 15.6 \text{ MeV}$$

$$a_S \approx 17.2 \text{ MeV}$$

$$a_C \approx 0.7 \text{ MeV}$$

$$a_{Asym} \approx 22.5 \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{gg-Kerne} \\ 0 \text{ MeV} & \text{ug-Kerne} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{uu-Kerne} \end{cases}$$



Massen-Formel:  $m(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - B$

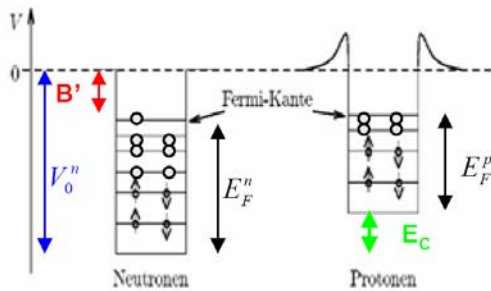


Erlaubt die Berechnung des Q-Wertes von radioaktiven Zerfällen / Spaltungs- und Fusions-Prozessen

**3.2 Fermi-Gas Modell**

Nukleonen als unabhängige Teilchen in einem effektiven Potential beschrieben:

⇒ **Fermi-Gas:** Nukleonen können sich frei innerhalb einer Kugel mit Radius  $R=1.2 A^{1/3} \text{ fm}$  frei bewegen.



- Verschiedene Potentialtöpfe für Neutronen und Protonen
- Wg. Coulomb-Energie haben Potentiale verschiedene Form und Tiefe
- Im Unendlichen sind Potentiale gleich

- Potentiale enthalten eine endliche Zahl von Energiezuständen die je mit max. 2 Nukleonen besetzt werden können ( $\uparrow\downarrow$ ).
- **Entartetes Fermi-Gas:** Kern-Temperatur so niedrig, dass Nukleonen alle im niedrigsten Energiezustand. Besetzung bis Energie  $E_F$ .

Jedes Nukleon besetzt im 6-dim. Phasenraum eine Phasenraumzelle  $\sim (2\pi\hbar)^3$

$\Rightarrow$  Zahl möglicher Energiezustände für Nukleon mit  $p \in [p, p+dp]$ :

$$dn = \frac{V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (V = \text{Kernvolumen})$$

$\Rightarrow$  Zahl der Zustände mit Impulsen  $p$  bis zum Maximalwert  $p_F$ :

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad \text{bzw. } \times 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \text{max. Zahl der Neutronen} \\ Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \text{max. Zahl der Protonen} \end{array} \right.$$

Benutzt man  $R = 1.2 A^{1/3}$  fm folgt für das Kernvolumen  $V = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A$

Für symmetrische Kerne  $Z=N=A/2$  folgt für den max. Impuls der Nukleonen

$$p_F^p = p_F^n = \frac{\hbar}{R_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}$$

Fermi-Energie  $E_F$  bis zu der die Zustände besetzt sind:  $E_F = \frac{p_F^2}{2m_{p,n}} \approx 33 \text{ MeV}$   
Nicht relativistisch

Mit der typischen Bindungsenergie von Nukleonen ( $B' \approx 8 \text{ MeV}$ ) ergibt sich die Tiefe des Potentialtopfs

$$V_0 = E_F + B' \approx 33 + 8 = 41 \text{ MeV}$$

(unabhängig von Massenzahl  $A$ )

Kinetische Energie der Nukleonen ist mit der Tiefe des Potentialtopfs vergleichbar: Kerne sind also relativ schwach gebundene Systeme.

$$\text{Mittlere kin. Energie/Nukleon} \quad \langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{kin} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \approx 20 \text{ MeV}$$

### Volumenenergie und Asymmetrieterm im Fermi-Modell

Gesamte kin. Energie  $E_{kin}(N,Z) = \frac{3}{10m} (N(p_F^n)^2 + Z(p_F^p)^2)$   
 mit  $(p_F^n)^2 \sim N^{2/3}$  und  $(p_F^p)^2 \sim Z^{2/3}$  folgt

$$E_{kin}(N,Z) = \frac{3}{10m} \frac{1}{R_0^2} \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \left( \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$

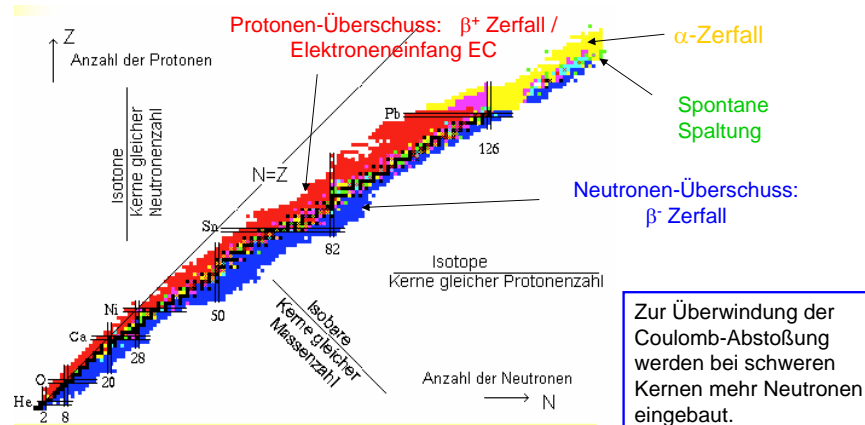
Entwicklung um Minimum bei N=Z:

$$E_{kin}(N,Z) = \frac{3}{10m} \frac{1}{R_0^2} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left( A + \frac{5(N-Z)^2}{9A} + \dots \right)$$

## 4. Kernzerfälle

### 4.1 Kernzerfälle

Stabile Kerne (schwarz) beschränken sich auf schmales Band in N-Z Ebene.



Kerne mit Z,N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (**magische Zahlen**) sind sehr stabil und kommen besonders häufig vor.

Für die Kernmasse (Bethe-Weizsäcker Formel) findet man für konstantes  $A=Z+N$  ein Minimum  $Z_{\min}$ :

$$\frac{\partial M(A = \text{const.}, Z)}{\partial Z} = 0 \Rightarrow Z_{\min} \approx \frac{A}{1.972 + 0.015A^{1/3}}$$

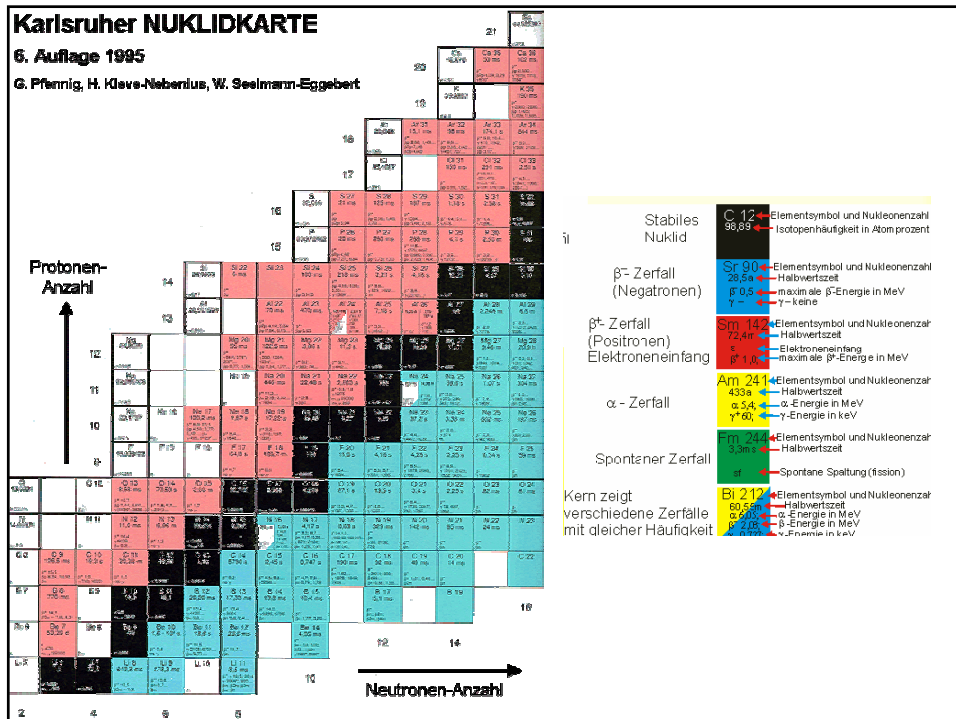
Kerne mit  $Z \approx Z_{\min}$  sind stabil. Alle übrigen Kerne sind instabil und zerfallen spontan:

i. Isobare mit deutlichem Neutronen-Überschuss  $\Rightarrow \beta^-$  Zerfall  ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} X_{N-1} + e^- + \bar{\nu}$

ii. Isobare mit deutlichem Protonen-Überschuss  $\Rightarrow \beta^+$  Zerfall od. Elektronen-Einfang (EC)  
 ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1} + e^+ + \nu$   
 ${}^A_Z X_N + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1} + \nu$

iii. Mit zunehmender Massenzahl werden Kerne instabil und zerfallen in 2 od. mehr Tochterkerne, wobei einer der Tochterkerne häufig ein  ${}^4_2\text{He}$  Kern ist:  $\Rightarrow \alpha$  Zerfall  
 ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} X_{N-2} + {}^4_2\text{He}_2$

Obwohl He sehr leicht ist, sind die Nukleonen bereits sehr stark gebunden: doppelt magischer Kern

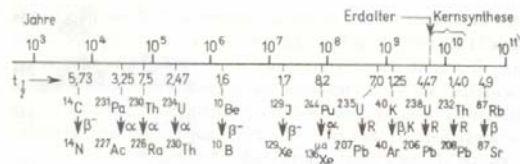


## b) Lebensdauer und Zerfallsrate

Radioaktives Zerfallsgesetz:  $N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$   
 $\lambda =$  Zerfallskonstante  $= 1/\tau$   
 $\tau =$  Lebensdauer,  $T_{1/2} = \ln 2 \tau =$  Halbw.zeit

Aktivität / Zerfallsrate:  $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)$   
 $[A] = 1 \text{ Bq} = 1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ s}^{-1}$   
 $1 \text{ Ci (Curie)} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$  ältere Einheit

Radioaktive Datierungsmethode



## C14 Methode (Datierung archäologischer Objekte)

$^{14}\text{C}$  entsteht durch kosmische Strahlung in der Atmosphäre:  $n + ^{14}\text{N} \rightarrow ^{14}\text{C} + p$

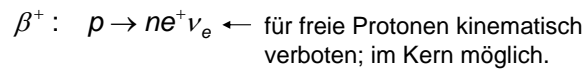
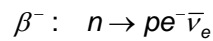
Bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts war das natürliche Verhältnis von  $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} \approx 1.5 \cdot 10^{-12}$

$^{14}\text{C}$  wird in organisches Material im natürlichem Verhältnis eingebaut und zerfällt nach Absterben des Organismus mit  $T_{1/2} = 5730 \text{ a}$  durch  $\beta$  Zerfall.

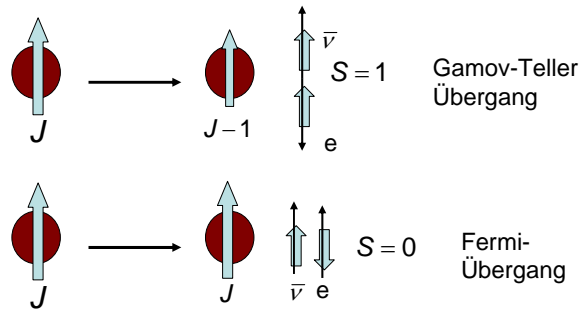
Aus der  $^{14}\text{C}$  Aktivität der Probe kann bei bekanntem Kohlenstoffgehalt auf den  $^{14}\text{C}$  Anteil und damit auch auf das Alter der Probe geschlossen werden.

## 4.2 $\beta$ -Zerfall

Prototyp-Reaktionen



$\beta$  Zerfall von Kernen



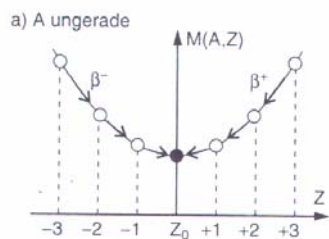
### a) Q-Wert von $\beta$ -Zerfällen

Kernmasse für Isobare  $A=N+Z=\text{konst.}$  nach Massenformel:

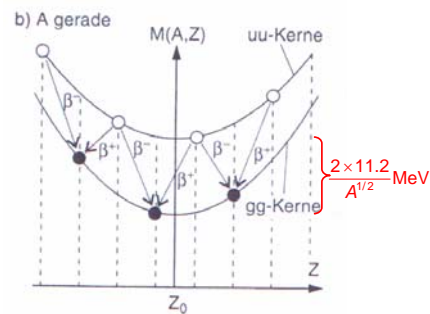
$$m(A, Z) = Nm_n + Zm_p - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{Asym}} \frac{(Z-N)^2}{A} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

$$= \alpha A - \beta Z + \gamma Z^2 - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & \text{gg-Kerne} \\ 0 \text{ MeV} & \text{ug-Kerne} \\ -11.2 \text{ MeV} & \text{uu-Kerne} \end{cases}$$

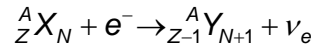


ug/gu Kerne: in der Regel nur ein stabiles Isobar

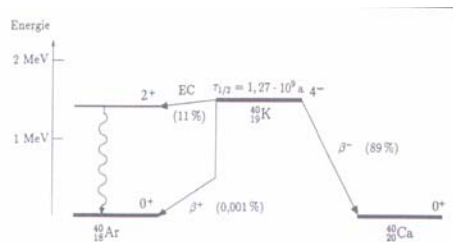


Für  $Z > 7$ : keine stabile uu Kerne, mindestens 2 stabile gg Kerne

**Elektronen-Einfang (EC)**



Für Elektronen mit hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern:  
vor allem bei schweren Kernen, vorwiegend 1s Elektronen



EC konkurriert mit  $\beta^+$  Zerfall:  
EC ist aber energetisch günstiger

- EC:  $Q = m(A,Z) + m_e - m(A,Z-1)$
- $\beta^+$ :  $Q = m(A,Z) - m_e - m(A,Z-1)$

Beim Elektroneneinfang steht ein Mehr an kinetischer Energie zur Verfügung (kann deshalb noch zu Energieniveaus stattfinden für die kein  $\beta$  Zerfall stattfinden kann):  $\Delta E_{kin} \approx 2m_e$

**c)  $\beta$  Spektrum**

Zerfallsrate nach "Fermi's Goldener Regel":  $\Gamma = 2\pi \cdot |M_{fi}|^2 \rho(E_0)$

$\rho(E_0)$  = 3-Teilchen-Phasenraum

$E_0$  = freierwerdende Energie

**1) Kinematik**

$$\begin{aligned} \vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{P} &= 0 \\ E_e + E_\nu + E_{kin} &= E_0 \end{aligned}$$

Für  $E_0 \sim 1$  MeV (z.B. für  $n \rightarrow p e \nu$ ):

$$|\vec{P}| \ll m_p: E_{kin} = \frac{\vec{P}^2}{2m_p} \approx 0 \quad \text{d.h.} \quad E_0 = E_e + E_\nu$$

Nach Kap. II gilt für  $\rho(E_0)$ :

$$\begin{aligned} \rho(E_0) &= \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE_0} \left( \int p_e^2 dp_e d\Omega_e \int p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu \right) \\ &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE_0} \left( \int p_e^2 dp_e \int p_\nu^2 dp_\nu \right) \end{aligned}$$



**2) Differentielle Zerfallsbreite**  $d\Gamma(p_e)$  fuer  $p_e \in [p_e, p_e + dp_e]$

$$\frac{d\Gamma}{dp_e} = 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 \frac{d}{dE_0} \int p_v^2 dp_v$$

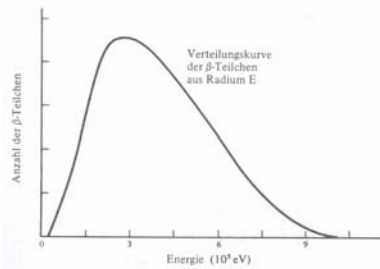
mit

$$(1) p_v^2 = E_v^2 = (E_0 - E_e)^2$$

$$(2) dp_v = dE_v = dE_0 \quad (\text{für konst. } E_e)$$

$$\frac{d\Gamma}{dp_e} = 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 (E_0 - E_e)^2$$

$\beta$  Spektrum führte zur Neutrino Hypothese von Pauli (1930)



**3) Totale Zerfallsbreite  $\Gamma$  bzw. Lebensdauer  $\tau$**

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \int (E_0 - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - m_e^2} dE_e$$

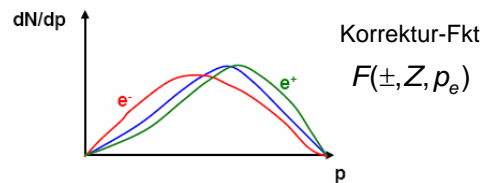
$$\sim \int (E_0 - E_e)^2 E_e^2 dE_e = \frac{E_0^5}{30}$$

$$\Gamma \sim \frac{E_0^5}{30} \quad \text{vergleiche auch Myon-Zerfall} \quad \Gamma \sim m_\mu^5$$

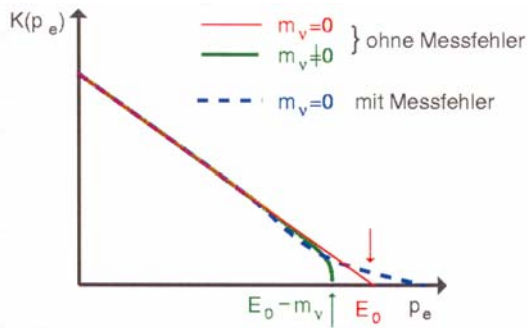
**4) Curie-Plot**

Komplikation: Coulomb-Korrektur

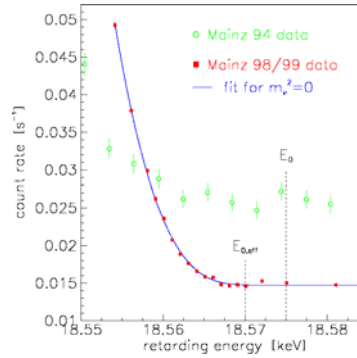
$$\left( \frac{d\Gamma}{p_e^2 dp_e} \right)^{1/2} \sim (E_0 - E_e)$$



$$K(p_e) = \left( \frac{d\Gamma}{F(\pm, Z, p_e) p_e^2 dp_e} \right)^{1/2} \sim (E_0 - E_e)$$



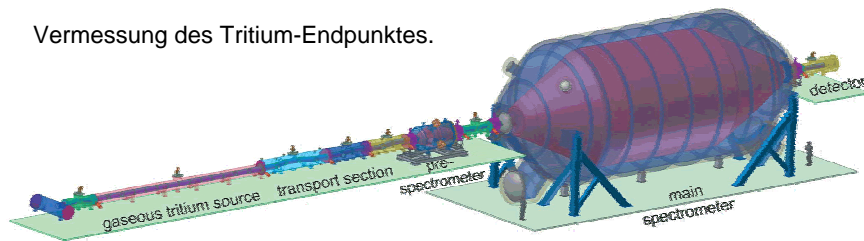
Mainz Experiment:  
Tritium  $\beta$  Zerfall



$m_\nu < 2.2 \text{ eV}/c^2$  (95% Confidence Level)

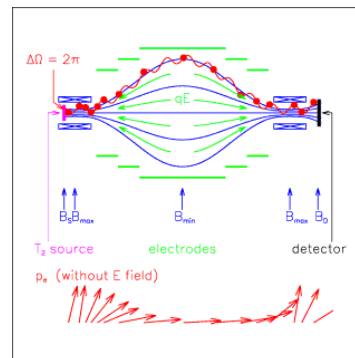
### KATRIN = Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment

Vermessung des Tritium-Endpunktes.



**Spektrometer:**  
Magnetic Adiabatic Collimation  
combined with an Electrostatic Filter

Neutrino-massen-Sensitivität: 0.2 eV



25.11.2005

