4. Isospin

4.1 Historisch: Isospin-Konzept für Hadronen

Für Nukleonen p und n findet man:

(1) Masse nahe beieinander

m_p= 938.3 MeV m_n= 939.6 MeV

(2) Kernkraft (starke WW) invariant unter $p \leftrightarrow n$

p und n können bezüglich der starken WW als die beiden Isospin-Zustände eines Teilchens (Nukleon) mit Isospin I=1/2 aufgefasst werden:

$$|p\rangle = \left|\underset{I}{\tfrac{1}{2}} \; \underset{I_3}{+\tfrac{1}{2}}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |n\rangle = \left|\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Die elektr. Ladung der Teilchen wird durch $Q = \frac{1}{2} + I_3 = \frac{\tilde{B}}{2} + I_3$ gegeben

Analog können Pionen als die 3 Zustände eines Teilchens mit I=1 aufgefasst werden:

$$\begin{array}{rcl} & & I \quad I_3 \\ |\pi^+\rangle &=& |1 + 1\rangle \\ |\pi^0\rangle &=& |1 \quad 0\rangle \\ |\pi^+\rangle &=& |1 - 1\rangle \end{array} \qquad Q = \frac{\tilde{B}}{2} + I_3 = 0 + I_3$$

- Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Isospin-Transformationen: Isospin ist in der starken WW erhalten, sowohl **I** als auch **I_3**. Isospin ist wie Spin eine additive Quantenzahl.
- Isospin I in elektromagnetischen Übergängen verletzt: Dritte Komponente I_3 (beschreibt Ladungserhaltung) ist zwar in e.m. Übergängen erhalten, trotzdem ist der Isospin keine “gute” Symmetrie der em. WW.

$$\begin{array}{lcl} & \Delta^+ & \rightarrow p\gamma \\ I & 1 & \rightarrow \tfrac{1}{2} \\ I_3 & \tfrac{1}{2} & \rightarrow \tfrac{1}{2} \end{array}$$

- In schwacher WW sind I und I_3 nicht erhalten: $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

Anwendung der Isospinerhaltung in starker WW

$$\begin{array}{lccccccc}
 & p & + & p & \to & \boxed{d} & + & \pi^{+} \\
I & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & 0 & & 1 \\
I_3 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & 0 & & 1 \\
I & & 1 & & & & 1 & \\
I_3 & & 1 & & & & 1 &
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d = |np\rangle \\ I(d) = 0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{lccccccc}
 & p & + & n & \to & d & + & \pi^{0} \\
I & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & 0 & & 1 \\
I_3 & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & 0 & & 0 \\
I & & 0,1 & & & & 1 & \\
I_3 & & 0 & & & & 0 &
\end{array}$$

nicht erlaubt

1/2×1/2	1 +1	1 0	0 0	1 −1
+1/2 +1/2	1			
+1/2 −1/2		1/2	1/2	
−1/2 +1/2		1/2	−1/2	
−1/2 −1/2				1

$$pn: \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\;-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle + \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\rangle} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{\sigma(pp \to d\pi^{+})}{\sigma(pn \to d\pi^{0})} = \frac{1}{1/2} = 2}$$

Etwas langsamer:

$$pn: \quad \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2}\;-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,0\rangle$$

$$\left|M_{fi}(np \to \overset{|1,0\rangle}{d} + \pi^{0})\right|^{2} \sim \left|\langle 1,0\|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{-1}{2}\right\rangle\right|^{2}$$

$$= \left|\langle 1,0\|\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle\right]\right|^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2} = \frac{1}{2}$$

4.2 Isospin für Quarks

Nukleonen und Pionen bestehen aus den leichten u und d Quarks.

Es liegt also nahe das Isospin-Konzept auf die beiden Quarks zu übertragen, wobei auch hier die Symmetrie nur dann exakt wäre wenn man die elektrische Ladung ignorieren würde und die Quarks gleiche Masse hätten.

Heute würde man wahrscheinlich besser von “u-ness” / “d-ness” sprechen.

	I	I_3		I	I_3
$\vert u\rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\vert \bar{u}\rangle$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\vert d\rangle$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\vert -\bar{d}\rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$C\vert\pi^{\pm}\rangle = -\vert\pi^{\mp}\rangle$

Elektrische Ladung

$$Q = \frac{\tilde{B}}{2} + I_3$$

Baryonenzahl
Quarks=1/3

Gell-Mann Nishijima Formel:
gilt auch für Baryonen / Mesonen

Der Isospin von s, c, b, t Quarks ist Null.

Pionen als zusammengesetzte Quarkszustände $q\bar{q}$

$$I=1 \begin{cases} I_3 & \\ 1 & \vert\pi^{+}\rangle = -u\bar{d} \\ 0 & \vert\pi^{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} - d\bar{d}\right) \\ -1 & \vert\pi^{+}\rangle = +d\bar{u} \end{cases}$$

I=1 Triplett.

Gibt es auch ein I=0 Singlett ?

$I=0$ ⇦ ja η

	I	I_3		I	I_3
$\vert u\rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\vert \bar{u}\rangle$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\vert d\rangle$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\vert -\bar{d}\rangle$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

a) Verallgemeinerung für 6 Quark Flavour

- (u, d) Isospin SU(2)
- (u, d, s) Flavour SU(3)
- …..
- (u, d, s, c, b, t) Flavour SU(6)

Komplizierte Symmetrieoperationen im Flavour-Raum

⇒

Erhaltungsgrößen in starker WW		
Isospin	I	+/- ½ nur für u,d
Strangeness	S	S= -1 für s-Quarks
Charm	C	C=+1 für c-Quarks
Beauty	B	B= -1 für b-Quarks
Topness	T	T=+1 für t-Quarks

Gell-Mann Nishijima Beziehung

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3$$

Hyperladung $Y = \tilde{B} + S + C + B + T$

(gilt auch für Hadronen)

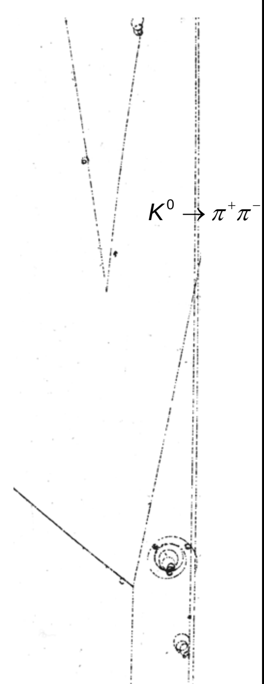
b) Anmerkungen zur Strangeness

- Historisch wurde die Strangeness nicht als Quarkeigenschaft sondern als zusätzliche Quantenzahl sogenannter V-Teilchen ($V = \Lambda, \Sigma, K$) eingeführt, die in starker WW erhalten ist.
- V-Teilchen werden in starker Wechselwirkung mit großem WQ erzeugt (Bsp.: $p\pi^- \rightarrow \Lambda^0 K^0$) zerfallen dann aber sehr langsam schwach ($\tau \sim 10^{-10}$s typ. für schwache WW).

  Strangeness wurde als neue Quantenzahl eingeführt. S ist in starker und e.m. WW erhalten, aber in schwacher WW verletzt.

  Per Definition: $S(K^+) = +1$

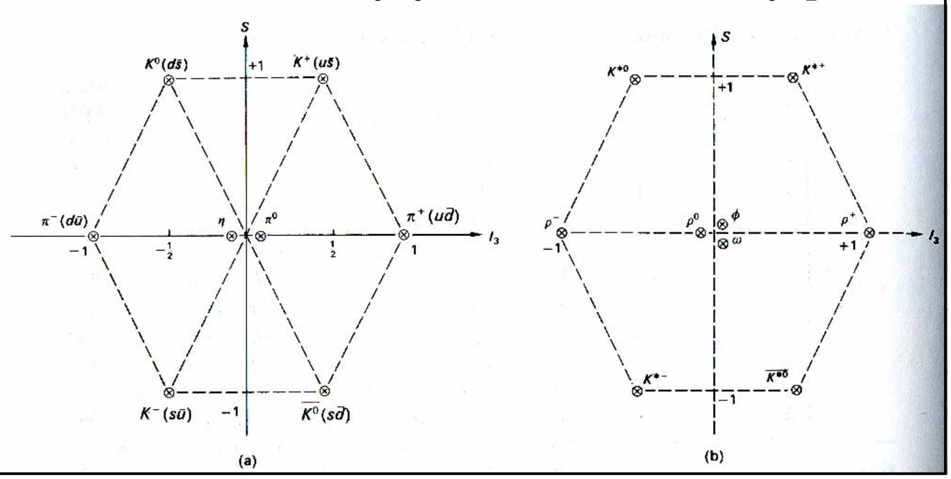
	p	π-	$\rightarrow$	Λ_0	K_0
I	½	1		0	½
I_3	½	-1		0	-½
S	0	0		-1	+1



c) Baryonen und Mesonen: “Statisches Quarkmodell”

Isospin, Strangeness (Charm, …) sowie Spin der Teilchen erlauben die Einordnung von Hadronen und Mesonen in ein Symmetrie(Ordnungs)schema.

Pseudo-Skalare Mesonen $J = 0$ Vektor-Mesonen $J = 1$



Baryonen:

Isospin I = ½ : n, p (S=0)

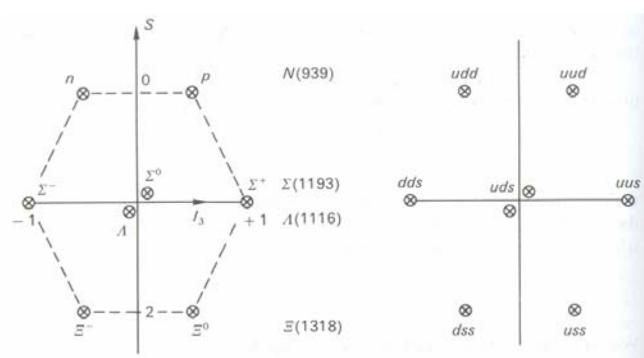
: Ξ (S=2)

Isospin I = 1 : Σ (S=1)

Isospin I = 0 : Λ (S=1)

Isospin I=3/2: Δ (S=0)

$J^P = \frac{1}{2}^+$



5. Zusammenfassung: Additive Quantenzahlen

4er Impuls
Drehimpuls
Ladung
Baryonenzahl
Leptonenzahl

In allen WW erhalten

Quark-Flavour:
Isospin I_3
Strangeness
Charm, Beauty, Topness

In starker (auch I) und e.m.(*) WW erhalten;
in schwacher WW verletzt

*) I_3 ist zwar nicht explizit in e.m. Zerfällen verletzt. I_3 ist aber keine Symmetrie der e.m. WW: Isospinkonzept ignoriert Ladungen. Isospin I ist explizit in em Übergängen verletzt.

Bemerkung:
- Flavour Symmetrien sind keine exakten Symmetrien (verschiedene Quarkmassen)
- Farbsymmetrie (s. QCD) ist eine exakte Symmetrie

6. Diskrete Transformationen: C, P, T

P = Punktspiegelung am Ursprung → Quantenzahl: Parität

T = Zeitumkehr

C = Teilchen-Antiteilchen Konjugation → C- Parität

$O^2 = 1$ (hermitesche Operatoren)

Zugeordnete Quantenzahlen sind multiplikativ

6.1 Raumspiegelung, Parität

Wegen $P^2 = 1$ kann der Eigenwert eines Systems nur Werte ± 1 annehmen:

Beispiel: E.M. Übergänge im Atom (paritätserhaltend)

$$\psi(r,\varphi,\theta) = R(r)\,\mathrm{Y}^{\ell m}(\varphi,\theta)$$
$$P\,\mathrm{Y}^{\ell m}(\varphi,\theta) = \mathrm{Y}^{\ell m}(\pi+\varphi,\pi-\theta)$$
$$= (-1)^{\ell}\,\mathrm{Y}^{\ell m}(\varphi,\theta)$$

Da e.m. Dipolübergänge der Auswahlregel $\Delta\ell = \pm 1$ gehorchen, folgt aus der Multiplikativität der Parität der Paritätswert des Photons $\eta_P(\gamma) = -1$

Bei zusammengesetzten Systemen aus Teilchen (1) und (2) beträgt die Gesamtparität des Zustandes:

$$\eta_P = \eta_1\eta_2(-1)^{\ell}$$

$\eta_{1,2}$ Eigenparität der Teilchen

l = relativer Bahndrehimpuls

Eigenparität

Nukleonen (n, p) : $\eta_P = +1$ (Konvention)

Anti-Nukleonen : $\eta_P = -1$ (aus Dirac-Gl.)

π-Mesonen : $\eta_P = -1$

Leptonen (Anti) : $\eta_P = +1\ (-1)$

Da Spin und Parität eines Teilchens gleichzeitig beobachtbare Quantenzahlen sind (Drehung und Spiegelung vertauschen) werden die Teilchen analog zu Zuständen in Atom/Kernphysik häufig mit J^P bezeichnet:

$\pi^{\pm}, \pi^0$: $J^P = 0^-$

ρ : $J^P = 1^-$

6.2 Teilchen-Antiteilchen-Konjugation

a) Wirkung des C Operators:

$$C|\text{Teilchen}\rangle = \eta_C|\text{Anti - Teilchen}\rangle$$

$$C|e^-\rangle = \eta_C|e^+\rangle$$

$$C|\pi^-\rangle = \eta_C|\pi^+\rangle$$

Wegen $C^2|e^-\rangle = |e^-\rangle$ folgt $\eta_C^2 = 1$

Konvention $\eta_C(\text{Fermion/Anti} - \text{Fermion}) = +1$

b) C-Eigenzustände $C|\gamma\rangle = (-1)|\gamma\rangle$ Felder wechseln Vorzeichen

$$C|n\gamma\rangle = (-1)^n|\gamma\rangle$$

insbesondere $C|\pi^0\rangle = (-1)^2|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$

wg. $\pi^0 \to \gamma\gamma$

6.3 Effekt von C, P, T auf physikalische Größen

Größe	P	C	T
$\vec{r}$	$-\vec{r}$	$\vec{r}$	$\vec{r}$
$\vec{p}$	$-\vec{p}$	$\vec{p}$	$-\vec{p}$
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Axial Vektor	$\vec{L}$	$\vec{L}$	$-\vec{L}$
$\vec{\sigma}$ Spin	$\vec{\sigma}$	$\vec{\sigma}$	$-\vec{\sigma}$
$\vec{\sigma}\vec{p}$ Polarisation	$-\vec{\sigma}\vec{p}$	$\vec{\sigma}\vec{p}$	$\vec{\sigma}\vec{p}$