3. Drehgruppe

3.1 Rotationen

Analog zu Translationen kann auch die endl. Drehung um einen Winkel θ als wiederholte Anwendung einer infinitessimalen Drehung aufgefasst werden:

Infinitessimale Drehung um z-Achse: $$U(\delta\varphi) = 1 + \frac{i}{\hbar} J_z \delta\varphi$$

Endliche Drehung um z-Achse: $$U(\Delta\varphi) = \lim_{n\to\infty} (1 + iJ_z \frac{\Delta\varphi}{n})^n = \exp(iJ_z \Delta\varphi)$$

Vertauschung der Rotation um verschiedene Achsen führt zu verschiedenen Ergebnissen. Drehimpulsoperatoren vertauschen nicht:

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$$

Die 3 Drehimpulsoperatoren werden als Generatoren der Drehgruppe bezeichnet.

3.2 Invarianz unter Rotation (z.B. um z-Achse)

Gesamtdrehimpuls J^2 und J_z sind Erhaltungsgrößen

$$[J^2, H] = 0$$
$$[J_z, H] = 0$$

J^2 und J_z können gleichzeitig gemessen werden

$$[J^2, J_z] = 0$$

Man findet (2j+1) Zustände |j,m> des Systems die Eigenzustände zu J^2 und J_z sind:

$$\left| j,m \right\rangle \text{ mit } m = -j, -j+1, \ldots, +j \qquad \text{Multiplett}$$
$$J^2 \left| j,m \right\rangle = j(j+1) \left| j,m \right\rangle$$
$$J_z \left| j,m \right\rangle = m \left| j,m \right\rangle$$

Die Zustände |j,m> können durch die Schiebeoperatoren in einander überführt werden

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y$$
$$J_\pm \left| j,m \right\rangle = C_\pm(j,m) \left| j,m \pm 1 \right\rangle$$

Multiplett |j, m> bildet eine Basis der (2j+1) dimensionalen Repräsentation der Drehgruppe.

Die explizite Darstellung der Drehimpulsoperatoren hängt von der gewählten Repräsentation und dem Wert des Drehimpulses ab.

Rotationsmatrizzen

Rotation der Zustände | j, m > um y-Achse: Der Zustand |j,m> wird dabei in eine Linearkombination der 2j+1 Zustände transformiert:

$$\exp(i\theta J_y)\left| j,m \right\rangle = \sum_{m'} d^j_{m'm} \left| j,m' \right\rangle$$

$d^j_{m'm}$ werden als Rotationsmatrizzen bezeichnet (tabelliert, z.B. PDG)

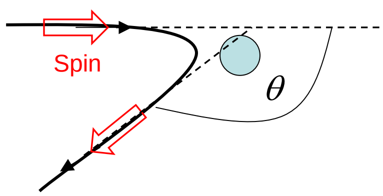
$$d^{1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^{j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{j}_{m,m'} = d^{j}_{-m,-m'} \qquad d^{1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/clebrpp.pdf

Bsp.: Elektronstreuung (Spin ½) an spinlosem Streuzentrum



ohne Spinflip

$$M_{fi} \sim d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\theta) \sim \cos\frac{\theta}{2} \qquad |M_{fi}|^2 \sim \cos^2\frac{\theta}{2}$$

Drehimpulserhaltung unterdrückt
Streuung in Rückwärtsrichtung

mit Spinflip

$$M_{fi} \sim d^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\theta) \sim \sin\frac{\theta}{2} \qquad |M_{fi}|^2 \sim \sin^2\frac{\theta}{2}$$

In diesem Beispiel ist Drehimpuls erhalten, aber die Quantisierungsachse wird gedreht.

3.3 Spin ½ und SU(2)

Zustand eines Teilchens mit (innerem Drehimpuls) Spin s wird analog mit |s, s_z > bezeichnet.

Für nicht-relativistische Spin ½ Teilchen kann Spinzustand durch 2-dim. Spaltenvektoren dargestellt werden:

$$|\uparrow\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In dieser Darstellung werden die Drehimpulsoperatoren durch die Pauli-Matrizzen gegeben:

$$S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$$

Zur Erinnerung: σ_i gehorchen den Vertauschungsrelationen des Drehimpulses

Fundamentale Darstellung der Drehgruppe

- Aufgrund der Eigenschaften der Generatoren ($UU^+=1$, $\det U=1$, Dimension 2) wird die Drehgruppe als spezielle unitäre Gruppe SU(2) bezeichnet.

$\Rightarrow$ Man kann den Begriff der "Drehung" nicht nur auf Orts/Spinraum sondern auch auf andere "Isospin" Räume anwenden.

3.4 Drehimpulskopplung für zusammengesetzte Systeme

System aus 2 Teilchen mit Drehimpulsen J_1 und J_2 kann durch folgende Basis dargestellt werden:

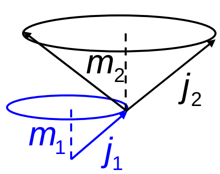
$$\left| j_1, m_1, j_2, m_2 \right\rangle = \left| j_1, m_1 \right\rangle \left| j_2, m_2 \right\rangle$$

Für den 2-Teilchenzustand existieren natürlich auch Eigenzustände zum Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

Zustände |J, M > mit

$$J^2 \left| J, M \right\rangle = J(J+1) \left| J, M \right\rangle$$
$$J_z \left| J, M \right\rangle = M \left| J, M \right\rangle$$

Regeln der Drehimpulskopplung führen zu folgenden möglichen Eigenwerten



$$M = m_1 + m_2$$
$$J = \left| j_1 - j_2 \right|, \left| j_1 - j_2 \right| + 1, \ldots, j_1 + j_2$$

Clebsch-Gordan Koeffizienten

Die beiden Basen $|j_1\, m_1\rangle|\, j_2\, m_2\rangle$ und $|J\, M\rangle$ lassen sich durch einander ausdrücken

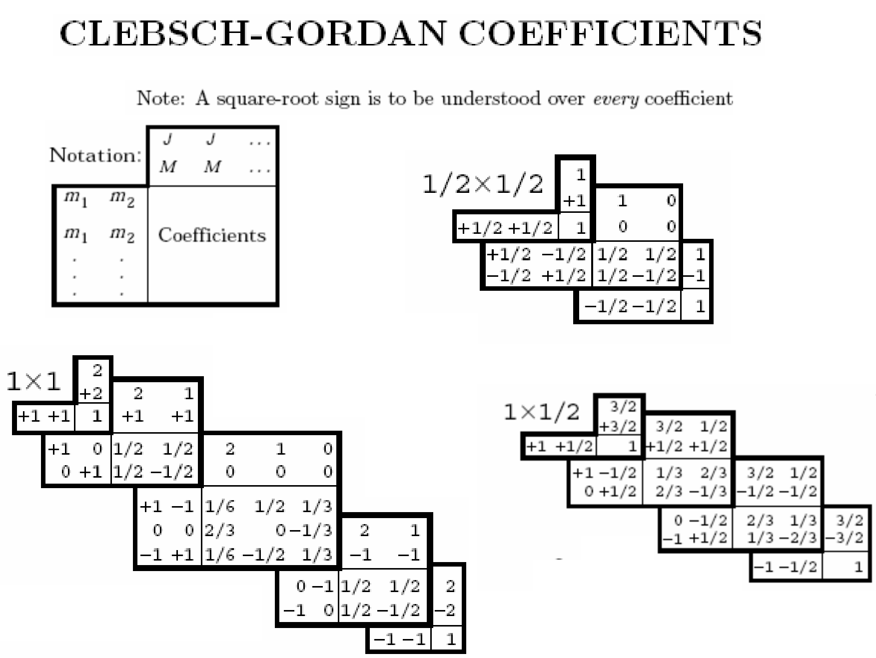
$$|J\,M\rangle = \sum_{m_1,m_2} C_{j_1 j_2}(m_1, m_2, J, M)\,|j_1\,m_1\rangle|j_2\,m_2\rangle$$

$$|j_1\,m_1\rangle|j_2\,m_2\rangle = \sum_{J} C_{j_1 j_2}(m_1, m_2, J, M)\,|J\,M\rangle$$

Clebsch-Gordan Koeffizienten

⇩

tabelliert



CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			

$1/2\times1/2$

m_1	m_2	J=1, M=+1	J=1, M=0	J=0, M=0	J=1, M=−1
+1/2	+1/2	1			
+1/2	−1/2		1/2	1/2	
−1/2	+1/2		1/2	−1/2	
−1/2	−1/2				1

1×1

m_1	m_2	2, +2	2, +1	1, +1	2, 0	1, 0	0, 0	2, −1	1, −1	2, −2
+1	+1	1								
+1	0		1/2	1/2						
0	+1		1/2	−1/2						
+1	−1				1/6	1/2	1/3			
0	0				2/3	0	−1/3			
−1	+1				1/6	−1/2	1/3			
0	−1							1/2	1/2	
−1	0							1/2	−1/2	
−1	−1									1

$1\times1/2$

m_1	m_2	3/2, +3/2	3/2, +1/2	1/2, +1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2	3/2, −3/2
+1	+1/2	1					
+1	−1/2		1/3	2/3			
0	+1/2		2/3	−1/3			
0	−1/2				2/3	1/3	
−1	+1/2				1/3	−2/3	
−1	−1/2						1

http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/clebrpp.pdf

Bsp.: Spinzustände von Positronium (e^+e^-)

$\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle$

$\left|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle$

$$J=1\quad\begin{cases} J_z=1 & |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \\ J_z=0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle+|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right) \\ J_z=-1 & |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \end{cases}$$

Symmetrisches Triplett:

Otho-Positronium

$$J=0\qquad J_z=0\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle-|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right)$$

Aymmetrisches Singulett:

Para-Positronium

1/2×1/2		1			
		+1	1	0	
+1/2	+1/2	1	0	0	
+1/2	−1/2		1/2	1/2	1
−1/2	+1/2		1/2	−1/2	−1
−1/2	−1/2				1