IV Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrie = Invarianz von Zuständen od. physikal. Gesetzen unter Symmetrietransformationen

Bsp.:
- Bewegungsgl. im Zentralfeld invariant unter Rotation
- Relativistische Bewegungsgl. unter Lorentztransf.
- Schrödingergl. invariant unter Phasentansf. $\psi \rightarrow \psi' = e^{iQ\alpha}\psi$

1. Noether Theorem **(E. Noether, 1917)**

Formulier und bewiesen für kontinuierliche Gruppen

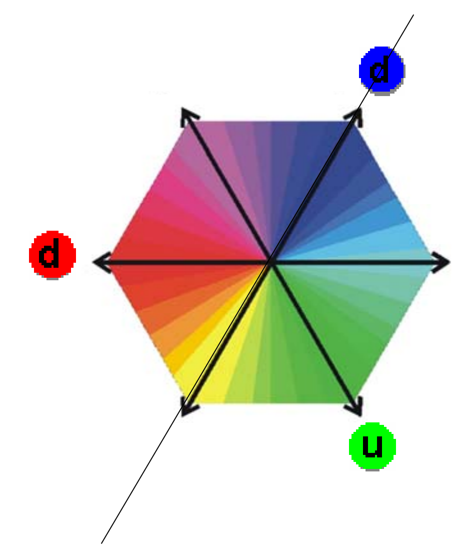
> Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße
>
> Zu jeder Erhaltungsgröße existiert eine Symmetrietransformation

(a) Raum-Zeit Symmetrien:
Zeitl. Invarianz $\rightarrow$ Energieerhaltung
Räumliche Inv $\rightarrow$ Impulserhaltung
Rotationsinv. $\rightarrow$ Drehimpulserhalt.

(b) Innere Symmetrien:
Phasentransf. $\rightarrow$ Ladungserhaltung
1-dim $\rightarrow$ Generalisierte Ladung
2-dim $\rightarrow$ generalisierter Spin
3-dim $\rightarrow$ Farbe

Beispiel: Drehung im Farbraum

$\longrightarrow$ Erhaltung der Farbladung



Beispiel: Baryonen und Leptonzahl

$$q(x) \rightarrow e^{i\omega/3} q(x)$$
$$\ell(x) \rightarrow e^{i\lambda} \ell(x)$$

(Globale Phasentransformation der Quark und Leptonfelder)

$\rightarrow$ Baryonzahl/Leptonzahlerhalt.

2. Erhaltungssätze und Transformationen in QM

Betrachte System das durch den zeitunabh. Hamiliton-Operator H beschrieben wird:

$$i\frac{d}{dt}\psi = H\psi$$

Erwartungswert einer Observablen (hermitescher Operator) für Zustand ψ

$$\langle O \rangle = \int \psi^* O \psi \; d^3x$$

Für die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes findet man:

$$\frac{d}{dt}\langle O \rangle = \int \psi^* (HO - OH)\psi \; d^3x = \langle [H,O] \rangle$$

(falls O nicht explizit zeitabhängig ist)

d.h. Observable ist eine Erhaltungsgröße des Systems falls

$$[H,O] = 0$$

(in diesem Fall gibt es erhaltene Quantenzahlen)

Symmetrietransformation U

(a) U ist diskrete (nicht-kontinuierliche) Transformation

Bsp. Paritätstransformation $P\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$

Im allg. gilt für solche Transformationen $U^2=1$ ($U=U^+$ ist hermitesch): dann ist U eine Observable mit einem Erwartungswert (Quantenzahl).

Invarianz unter U führt zu einem multiplikativen Erhaltungssatz in dem das Produkt der Quantenzahlen invariant ist.

(b) U ist eine kontinuierliche Transformation

Man kann die Transformation beliebig klein machen, so dass sie nur wenig von 1 verschieden ist.

Bsp.: Räumliche Translation $\psi'(x) = U\psi(x) = \psi(x+\Delta x)$

o Infinitessimale Translation

$$\psi'(x) = \psi(x+\delta x)(1+\delta x\frac{d}{dx})\psi(x)$$

$$\psi'(x) = (1+i\delta x p_x)\psi(x)$$

$p_x = -i\frac{d}{dx}$

o Endliche Translation

$$\psi(x+\Delta x) = \lim_{n\to\infty}(1+i\frac{\Delta x}{n}p_x)^n \; \psi(x)$$
$$= \exp(i\frac{\Delta x}{n}p_x)\;\psi(x)$$

Kontinuierliche Transformationen: $U = \exp(i\varepsilon F)$

Operator F nennt man Generator der Gruppe. I.a. ist U nicht hermitesch und deshalb selbst keine Observable. Dann ist F die Erhaltungsgröße.

Invarianz unter kontinuierlichen Transformationen führt zu einem additiven Erhaltungssatz (additive Quantenzahlen)