a) Zustandsdichte für 1-Teilchenendzustand

Herleitung s.a. Frauenfelder&Henley

Gestreutes Teilchen im Impulsbereich $\in [|\vec{p}_1|, |\vec{p}_1| + dp_1]$

(entspricht Kugelschale mit Radius p_1)

Zahl der Zustände: $dN_1 = \frac{V 4\pi p_1^2 dp_1}{(2\pi\hbar)^3}$

Zustandsdichte: $\boxed{\rho_1 = \frac{dN_1}{dE} = \frac{4\pi V p_1 E_1}{(2\pi\hbar)^3}}$ $\left(wg. \quad E^2 = p^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dp} = \frac{p}{E} \right)$

b) Zustandsdichte für 2-Teilchenendzustand (Teilchen 1 und 2)

$$\rho_2 = \frac{dN_2}{\underbrace{dE}_{E = E_1 + E_2}} = \frac{dN_1}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3 p_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) p_1} \frac{d}{dp_1} \int p_1^2 dp_1 d\Omega$$

Im CMS: $dE = p_1 dp_1 \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}$

Wg. Impulserhaltung haben 1 und 2-Teilchenenzustand die gleiche Zahl von Zuständen $dN_2 = dN_1$

$$\boxed{\rho_2 = \frac{dN_2}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2 p_1}{(E_1 + E_2)} \int d\Omega_1}$$

c) Zustandsdichte für n-Teilchenendzustand

$$\boxed{\rho_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \cdots \int d^3 p_{n-1}}$$

(kompliziert)

$\hbar = 1$

Zusätzlich muss natürlich die 4er Impulserhaltung berücksichtigt werden:

δ-Funktion: $\delta^4(P - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)) \qquad P = \sum_{initial} p_a$

5.4 WQ für 2-Teilchenreaktion

$$\underbrace{a+b}_{i} \rightarrow \underbrace{c+d}_{f} \qquad \sigma = \frac{W}{\beta_i}$$

β_i Relativgeschw. zw. a + b

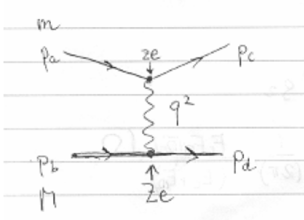
$$W = 2\pi |M_{fi}|^2 \rho_2 = \int 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E_c E_d}{E_c + E_d} |\vec{p}_c| d\Omega_c$$

<u>Im CMS</u> $|\vec{p}_c| = |\vec{p}_d| = |\vec{p}_f|$ und $\beta_{c,d} = \dfrac{|\vec{p}_{c,d}|}{E_{c,d}}$

$$\frac{E_c E_d}{E_c + E_d} |\vec{p}_c| = \frac{|\vec{p}_c|^2}{\frac{E_c + E_d}{E_c E_d} |\vec{p}_c|} = \frac{|\vec{p}_c|^2}{(\beta_c + \beta_d)} = \frac{|\vec{p}_c|^2}{\beta_f}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\vec{p}_f|^2}{\beta_i \beta_f}}$$

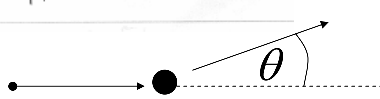
Bsp.: Rutherford-Streuung



Betrachte Streuung eines leichten Teilchens (Spin 0) mit Ladung ze an einem schweren, ruhendem Streuzentrum (spinlos) mit Masse M (Ladung Ze)

$$M_{fi} = (ze) \frac{1}{q^2} (Ze)$$

(M_{fi} wird in Kapitel V diskutiert)



$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} (4\pi)^2 (\frac{zZ\alpha}{q^2})^2 \frac{|\vec{p}_f|^2}{\beta_i \beta_f}}$$

a) Bestimmung von q^2 (Kinematik)

M groß → Rückstoß vernachlässigbar.

$$\rightarrow \begin{cases} E_a = E_c \\ |\vec{p}_a| = |\vec{p}_c| = |\vec{p}_f| \\ \beta_i = \beta_f \end{cases}$$

<u>4er Impulsübertrag q^2:</u>

$$\begin{aligned} q^2 &= (E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 \\ &= 0 - \vec{q}^{\,2} \\ &= 2 |\vec{p}_f|^2 (\cos\theta - 1) \\ &= -4 |\vec{p}_f|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

b) Winkelverteilung

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{(2\pi)^2}(4\pi)^2\left(\frac{zZ\alpha}{q^2}\right)^2\frac{|\vec{p}_f|^2}{\beta_i\beta_f}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4E_a{}^2(zZ\alpha)^2}{q^4} = \frac{E_a{}^2(zZ\alpha)^2}{4|\vec{p}_f|^4\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

$$\beta_i = \beta_f = \frac{|\vec{p}_f|}{E_a}$$

$$q^2 = -4|\vec{p}_f|^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Bzw. für nicht relativistischen Fall

$$E_{kin} = \frac{1}{2}|\vec{p}|\beta \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{(zZ\alpha)^2}{16E_{kin}^2\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

Bekannte Rutherford Streuformel

5.5) Lorentz invarianter Phasenraumfaktor

(*s.a. D.Perkins und PDG: Kinematics*)

Weder Fermi's Goldene Regel noch Phasenraumfakator sind in obiger Form lorentzinvariant.

Lorentzinvariante Darstellung:

$$\left\{\begin{array}{l} W = 2\pi\cdot\dfrac{|M_{fi}|^2}{\prod_{initial}2E_i}\rho_n \\[2ex] \rho_n = \dfrac{d}{dE_{total}}\dfrac{\int d^3p_1\int d^3p_2\cdots\int d^3p_n}{(2\pi)^{3(n-1)}\prod_{final}2E_f}\end{array}\right.$$

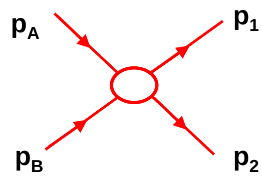
Zur Berechnung differentieller WQ / Zerfallsbreiten wird statt ρ der **differentielle n-Teilchen Phasenraumfaktor** verwendet:

$$\boxed{d\Phi_n(P,\underbrace{p_1,p_2,\ldots,p_n}_{\text{Endzustand}}) = \delta^4(P-(p_1+p_2+\ldots+p_n))\prod_{final}\frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2E_f}}$$

http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/kinemarpp.pdf

a) Differentieller Wirkungsquerschnitt (WQ)

$$A + B \rightarrow 1 + 2$$



$$d\sigma = \frac{|M_{fi}|^2}{(\beta_a + \beta_b) 2E_a 2E_b} (2\pi)^4 d\Phi_2(p_a + p_b, p_1, p_2)$$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \cdot |M_{fi}|^2 d\Omega$$

Im CM System:

$$\vec{p}_a = -\vec{p}_b = \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}_f$$

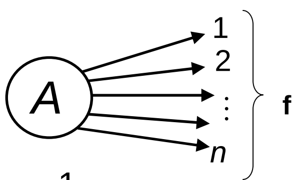
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \cdot |M_{fi}|^2 = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{s} \cdot |M_{fi}|^2}$$

bei Vernachlässigung der Massen

Reine Kinematik !

b) Differentielle Zerfallsbreite

http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/kinemarpp.pdf



$$d\Gamma_f = \frac{|M_{fi}|^2}{2E_A} \cdot (2\pi)^4 d\Phi_n(p_A, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \qquad \Gamma = \sum \Gamma_f$$

Für 2-Teilchenzerfall:

$$A \rightarrow 1 + 2$$

$$d\Gamma_f(A \rightarrow 1+2) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{|M_{fi}|^2}{2M_A} \frac{|\vec{p}_f|}{4M_A} d\Omega$$

$$\boxed{d\Gamma_i(A \rightarrow 1+2) = \frac{|\vec{p}_f|}{32\pi^2 M_A^2} |M_{fi}|^2 d\Omega}$$

Für spinloses Teilchen A ist Zerfall isotrop $\rightarrow$ Intergration

$$\boxed{\Gamma_f = \frac{|M_{fi}|^2}{8\pi} \frac{|\vec{p}_f|}{M_A^2}}$$