

Der Unterschied zwischen beiden Fällen ist die

Paarungsenergie:

(i) $u_g \rightarrow g_g$: es wird zusätzliche Energie frei

(ii) $g_g \rightarrow u_g$: die entsprechende Paarungsenergie wird benötigt.

Zur Energiegewinnung in Reaktoren kommen beide Prozesse zur Anwendung: Im Mittel wird ~ 200 MeV/Spaltung freigesetzt.

Bei Spaltung werden etwa 2,5 Neutronen freigesetzt:

Falls die Masse des Urans hoch genug ist (kritische Masse)

können diese wieder absorbiert werden und es kommt zu einer unkontrollierbaren Kettenreaktion:

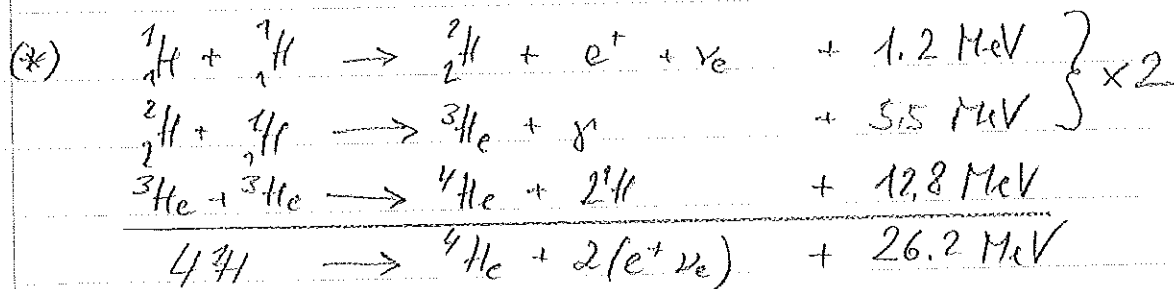
$$M_{\text{krit}}(^{235}\text{U}) = 49 \text{ kg} \quad (23 \text{ kg falls } n \text{ durch Wasser reflektiert werden)}$$

s. v. Fig. 7.7

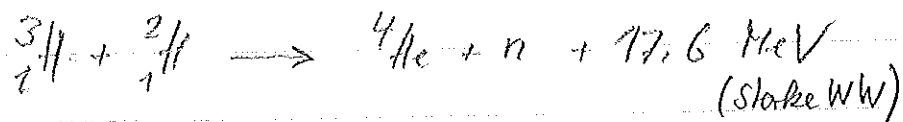
e.) Fusionsreaktion

Für Kerne mit $A \lesssim 56$ wird bei Fusion ^{von} 2 Kernen Energie frei.

→ Wasserstoff fusionsreaktion in Sonne (pp-Zyklus)



Die Reaktion (*) nutzt die schwache Reaktion $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ hat deshalb einen sehr kleinen Wirkungsquerschnitt. Für Fusionsreaktionen auf der Erde nutzt man deshalb andere Prozesse:



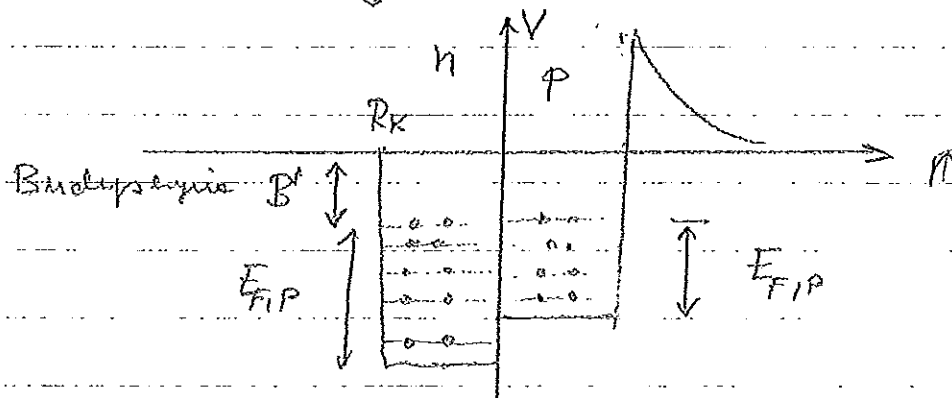
7.3 Fermi-Gas Modell des Kerns

Kern hat eine Reihe von Eigenschaften, die besser durch ein Modell unabhängiger Teilchen in einem „effektiven Potential“ als durch das Modell starker miteinander WW Nucleonen in einem Tröpfchen-Modell beschrieben werden.

Einfachster Ansatz:

Behandlung des Kerns als Fermi-Gas, Nucleonen können sich frei innerhalb einer Kugel mit Radius $R_K = R_0 \cdot A^{1/3}$ bewegen.

- Protonen und Neutronen sind Fermionen und unterliegen der Pauli-Regel.
- Die Situation wird für n (nur starke WW) und p (auch elektrische Abstoßung) durch 2 Potentialtöpfe beschrieben.



Die Temperatur des Fermion-Gases wird so niedrig angenommen, daß alle Fermionen die niedrigsten Energiezustände bis zu einer max. Energie (E_F) besetzen: „entartetes Fermi-Gas“

Um diese Fermi-Energie zu berechnen, muß man die Zahl der Zustände mit der Zahl der Nucleonen berücksichtigen. Die Zahl der Zustände ergibt sich aus dem Gehir-Phasenraum:

Zahl der Zustände für Nukleonen mit $p \in [p, p+dp]$

$$dn = \frac{V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (\text{s. Kap 2})$$

Zahl der Zustände $\overset{n}{\downarrow}$ mit $p < p_{\max} = p_F = \sqrt{2mE_F}$:

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \Rightarrow \text{Zahl } n, p: \left\{ \begin{array}{l} N, Z = \frac{V (p_F)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \end{array} \right.$$

x 2 \uparrow

Mit $R_K = R_0 \cdot A^{1/3}$ folgt für $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \cdot A$.

Für symmetrische Kerne $Z = N = \frac{A}{2}$ folgt dann für p_F :

$$\frac{n}{p_F} = \frac{p}{p_F} = \frac{\hbar}{R_0} \cdot \left(\frac{p_F}{\hbar} \right)^{2/3} \approx 250 \text{ MeV} \left. \vphantom{\frac{n}{p_F}} \right\} \text{Erinnung an Unschärfe! absolut!}$$

bzw $E_F = \frac{p_F^2}{2m_{n,p}} \approx 33 \text{ MeV}$

Bem: Nukleonen bewegen sich also mit relativ großem Impuls frei im Kern: Berechnete Fermi-Impuls wird durch quasi-elastische e-Kern-Streuung am Nukleonen bestätigt.

Mit der mittleren Bindungsenergie eines Nukleons $B' \approx 8 \text{ MeV}$ ergibt sich für die Tiefe V_0 des Potentials topflos:

$$V_0 = E_F + B' \approx 33 + 8 \text{ MeV} = 41 \text{ MeV}$$

Kernische Energie der Nukleonen ist also mit Potentialtopftiefe vergleichbar (relativ schwache Bindung der Nukleonen).

7.4 Schalenmodell des Kernes

Es existieren Evidenzen für eine Schalenstruktur des Kernes:

- (i) Kernspektroskopie zeigt Anregungszustände des Kernes, die unter β Aussendung zerfallen
- (ii) Nuklide mit bestimmten Zahlen (2, 8, 20, 28, 50, 82) von Protonen und Neutronen sind besonders stabil: Magische Zahlen. (Für Kerne mit magischer Neutronenzahl ist sehr viel Energi notwendig ein n auszulösen, liegt die Zahl $\neq 17$ gerade 1 oberhalb einer mag. Zahl ist der Energi aufwand hingegen klein).

Um die Schalenstruktur zu verstehen, muß die Schrödinger-Gleichung gelöst werden wobei man verschiedene Ansätze eines radial-symmetrischen Potentials machen kann.

Für radial symmetr. Potentiale kann Wellenfunkt in Radialteil $R_{nl}(r)$ und in Winkelanteil $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ zerlegt werden.

Potentialansätze:

Aufgrund der kurz-reichweitigen Kernkraft sollte Potential in etwa der Dichteverteilung der Nukleonen folgen:

- (i) Kustipotential
- (ii) Wood-Saxon-Potential (folgt der Dichte):

$$V = -V_0 \left(1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \right)^{-1}$$

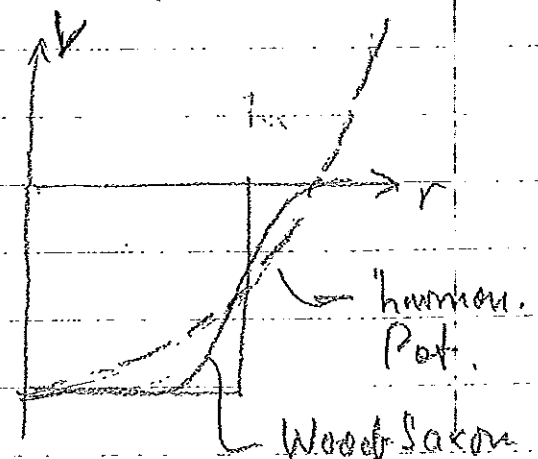


Fig 7.9

Am einfachsten zu berechnen: 3-dim harmon. Potential

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad \text{mit } \hbar \omega_0 \approx 41 \text{ MeV A}^{-1/3}$$

$$\rightarrow E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega_0 \quad \text{mit } N = 2(n-1) + l$$

(n = Zahl der Knoten in Radialkt.,
= 1, 2, 3, ...)

Entartung des 3-dim. ham. Oszillators (s. Literatur);

$$g(N) = \frac{1}{2} (N+1)(N+2) \quad (\text{Zustände})$$

wobei jeder Zustand mit je 2 p od n besetzt werden kann.

$$\rightarrow \text{„Schalen“: } 2, 8, 20, 40, 70, 112$$

≠ magische Zahlen ☹️

Auch der Ansatz eines Kasten- od. Woods-Saxon Potential löst das Problem nicht.

$$\text{Schalen (W.S. Pot.): } 2, 8, 18, 20, 34, \dots$$

Modell erklärt nur die ersten „mag. Zahlen“!

Bisher wurde allerdings die Nukleonspin sowie die Spin-Bahnkopplung für die Energieniveaus nicht berücksichtigt.

Führt man zusätzlich zum „sterben“ Kernpot. $V_{st}(r)$ noch Spin-Bahnkoppl.

Anteil zum Potential ein:

$$V(r) = V_{st}(r) + V_{es}(r) \frac{\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle}{\hbar^2}$$

führt dies zu einer Aufspaltung der ansonsten entarteten Niveaus: $j = l \pm 1/2$.

Experimentell fand man, dass es sich bei V_{es} um ein sehr starkes attraktives Potential handelt.

→ Energieaufspaltung:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{l} j = l - 1/2 \\ j = l + 1/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\frac{l+1}{2} V_{es}(r) \\ \frac{l}{2} V_{es}(r) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} j = l - 1/2 \\ j = l + 1/2 \end{array}} \right\} \frac{2l+1}{2} V_{es}(r)$$

Das Schichtenmodell mit adäquater Spin-Balett-Kopplung (Haxel, Jensen*, Suess, Goeppert-Mayer*, 1949) beschreibt sowohl die mag. Zahlen als auch Drehimpulse, Anregungen und mag. Momente korrekt.
 → Fig 7.10, 7.11

*) Nobelpreis 1963

7.5. Elementsynthese

Urknall vor $13.4 \cdot 10^9$ Jahren

a) Primordiale Elementsynthese

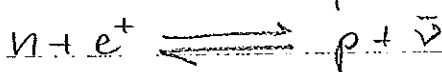
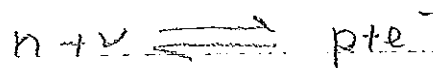
In den ersten μsec bestand die Materie aus freien Quarks, Gluonen, Leptonen sowie allen anderen Austauschbosonen. Durch die Ausdehnung des Universums findet eine Abkühlung statt.

Bei $t \approx 10 \mu\text{s}$ nach Urknall, $kT \approx 150 \text{ MeV}$ d.h. $T = 10^{12} \text{ K}$ fand die Kondensation zu Hadronen aus dem Quark-Gluon-Plasma statt.

Die Hadronen zerfallen und es bleiben am Ende nur noch p, \bar{p}, n, \bar{n} übrig. Aufgrund eines geringen Materieüberschusses (10^{-9}) bleiben am Ende nur noch p und n übrig.

Solange T hoch genug ist, stehen n und p im therm.

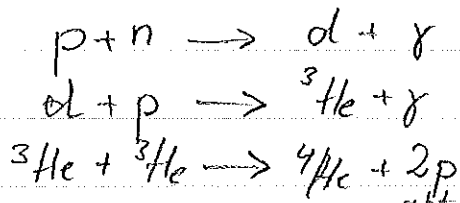
Gleichgewicht:



Nach $t \approx 1 \text{ s}$ $kT = \mathcal{O}(1 \text{ MeV})$ "entkoppeln" die Neutrinos und diese Reaktion ist nicht mehr möglich. Zu dieser Zeit:

$$\left. \frac{N_n}{N_p} \right|_{t \approx 1 \text{ s}} = \exp\left(-\frac{m_n - m_p}{kT}\right) \approx 0.2$$

Sobald $kT < 1 \text{ MeV}$ ist, bilden sich die ersten Kerne:



H		He							
		Li	Be	B	C	N	O	F	Ne

Da es keine $A=5, 8$ Kerne ^{gibt} bildet die Kette hier ab
 (Es gibt nur ganz wenig ${}^7\text{Li}$: ${}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^7\text{Li}$)
 kontaminiert mit: $p + {}^7\text{Li} \rightarrow 2 {}^4\text{He}$)

Sobald alle Nukleonen aufgebraucht sind (zu Beginn:
 $\#p : \#n = 4:1$) stoppt die Nukleosynthese ($t \approx 3 \text{ min}$).
 Die so entstandene Elementhäufigkeit löst sich
 heute noch nachweisen: primordiale Elementhäufigkeit

P: 76 % [Gewichtsanteil]	${}^4\text{He}$: 23%
${}^2\text{H}$: $2 \cdot 10^{-2}$	${}^7\text{Li}$: $7,5 \cdot 10^{-10}$
${}^3\text{H}$: $8 \cdot 10^{-5}$	+ e, ν , $\bar{\nu}$

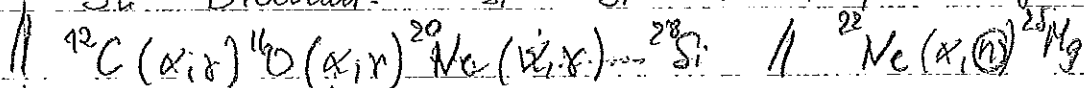
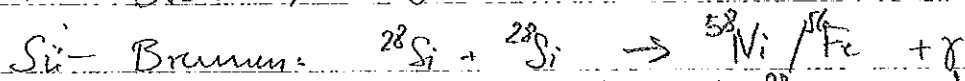
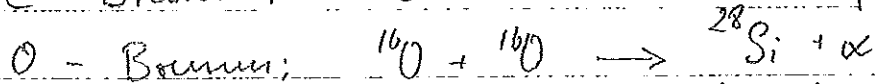
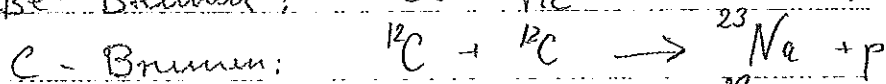
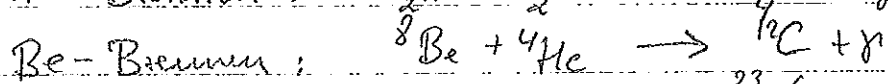
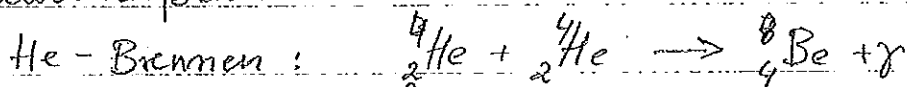
Das Universum expandierte und kühlte sich weiter
 ab. Bei $T \approx 3000 \text{ K}$ ($\approx 1 \text{ eV}$) werden nach $t = 4 \cdot 10^5 \text{ a}$
 durch Einfang von Elektronen die neutralen Atome
 gebildet. Zu diesem Zeitpunkt „entkoppeln“ die
 Photonen. Sie sind heute als kosm. Hintergrundstrahlung
 („3 K“) noch vorhanden (\rightarrow rot-verschiebt durch Expansion).

b) Elementsynthese in Sternen

Nach $\sim 10^8$ Jahren ist der Gasdruck gering genug, daß Gravitation p und He-Gas zu einem prä-stellaren Nebel einfügen und verdichten kann. Aufgrund der Gravitation erwärmt sich der Nebel im Innern bis die Temperatur und die Dichte ausreicht bei $T \approx 10^7 K$ den pp-Fusionszyklus (s.o.) zu zünden.

Der Strahlungsdruck im Innern dieses Stern wirkt dem Gravitations-Kollaps entgegen \rightarrow stabile Brennphase: Wasserstoff-Brennen.

Nach der pp-Phase können sich weitere Brennphasen anschließen:



Durch Fusionsprozesse in Sternen können alle Elemente bis Fe/Ni gebildet werden. Alle anderen Elemente werden durch Neutroneneinfang + β -Zerfall gebildet:

in Supernova-Prozessen: rapid neutron-capture: r-Prozesse

od. z.B. in Roten Riesen: slow neutron-capture: s-Prozesse

{ Neutroneneinfang zeitlich schnell/langsam
als β -Zerfall

Diese Prozesse sind noch Gegenstand aktueller Forschung.