

4. Kern und Nukleonstruktur

Streuexperimente und ihre Interpretation als Schlüssel zur Struktur von Kernen und Nukleonen (Protonen).

4.1 "Rutherford-Streuung" an punktf. Ladungsverteilung

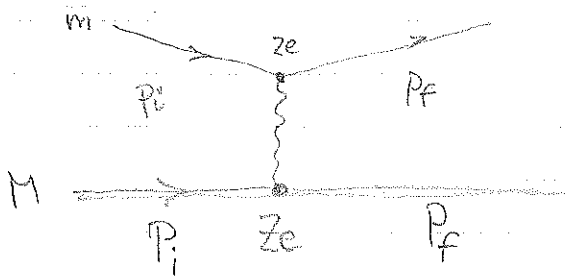
H. Geiger et al., 1909 - 1913:

Warum hat Rutherford geschlossen daß Kerne punktf. sind bzw. was beobachtet man für ausgedehnte Kerne?

S. Fig 4.1

a) Theoretische Behandlung:

Elastische Streuung eines leichten "spinlosen" Teilchens mit Ladung ze an einem schweren (ruhendem) "spinlosen" Streuzentrum mit Ze :



Übergangsamplitude:

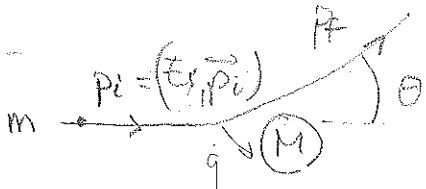
$$A_{fi} = \frac{zeZe}{q^2} \cdot \left(\frac{\hbar c}{c^2} \right)^2$$

$$\text{bzw. } |A_{fi}|^2 = \left(\frac{2Z\alpha}{q^2} \right)^2 (4\pi)^2 \frac{(\hbar c)^6}{c^4}$$

Mit der WD-Formel aus Kap. 2.4:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{(\hbar c)^4} \cdot \frac{p_f^2 c^2}{\beta_i \beta_f} \cdot \left\{ \left(\frac{2Z\alpha}{q^2} \right)^2 (4\pi)^2 \frac{(\hbar c)^6}{c^4} \right\}$$

Kinematik: q^2 für elastische Streuung.



$$q^2 = (p_i - p_f)^2 = (E_i - E_f)^2 - (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2$$

$$= -(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = -\vec{q}^2 \quad (< 0 !!)$$

für $M \gg m$:

Rückstoß vernachlässigbar:

$$E_i = E_f$$

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$$

$$\beta_i = \beta_f$$

$$= -2 |\vec{p}_f|^2 (1 - \cos \theta) \quad *) \text{ s.u.}$$

$$= -4 |\vec{p}_f|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{bzw. } |\vec{q}| = 2 |\vec{p}_f| \sin \frac{\theta}{2}$$

$$*) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$\vec{p}_i = \vec{p}_f \rightarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2}{\beta_f^2} \cdot \left(\frac{2Z\alpha}{q^2}\right)^2 \cdot \frac{(\hbar c)^2}{c^4} \sim \frac{1}{q^4}$$

(Photon propagator)

$$= \frac{4Z^2\alpha^2}{16|\vec{p}_f|^2\beta_f^2} \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{(\hbar c)^2}{c^2} \sim \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{Z^2\alpha^2}{16E_{kin}^2 \sin^4\frac{\theta}{2}} \cdot (\hbar c)^2$$

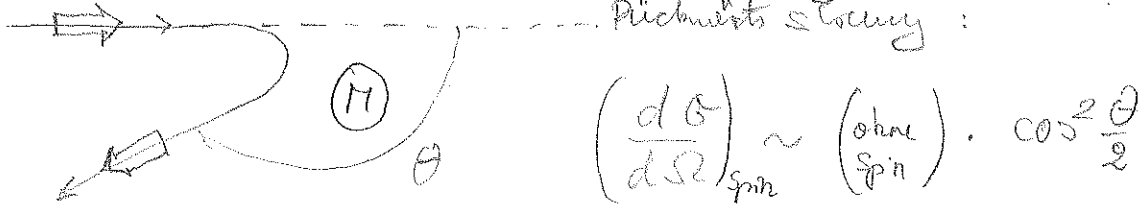
$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot v = \frac{1}{2} p \cdot \beta c$ d.h. $2E_{kin} = |\vec{p}_f| \beta_f c$
nicht-relativistisch

- Bem:
- 1) endliche Wahrsch. ein Lichtteil für Rückwärtsstreuung
 - 2) für kleine Streuwinkel $\theta \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 0$): $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow$ steigt an (*)
Im Limit „passend“ nichts mehr (für groß Impactparameter)
 - 3) Stoßpartner solange „ph/f“ wie $\lambda = \frac{\hbar}{|q|} > R_{Stoß}$
- (*) Für Streuung: max. Stoßparameter = Radius q (A)

b) Streuung von Spin-1/2 Teilchen: Mott-Streuung

Bisher wurde Spin des streuenden Teilchens nicht berücksichtigt.
Häufig werden diese Experimente aber mit Elektronen (Spin 1/2) durchgeführt.
Für hochrelativistische Teilchen ($\beta \rightarrow 1$) ist die Helizität, d.h. die Projektion des Spins auf die Impulsrichtung, eine Erhaltungsgröße.

\rightarrow Drehimpuls und Helizitätserhaltung bei Streuung unterbrückt die



Für den Fall $\beta < 1$ ist die Spinauswahl bezüglich der Teilchen-Richtung keine erhaltene Observable. Man erhält bei den dff WQ:

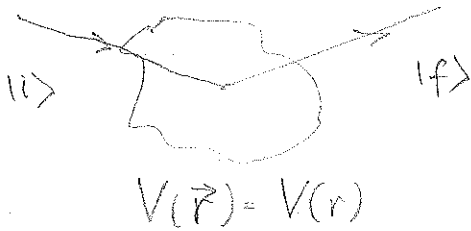
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{relativist.}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

// Mott-Streugeschwindigkeit beschreibt Streuung ph/f Spin-1/2 Teilchen an ph/f Spin=0 Target.

c) Nachtrag: Feynman-Propagator $\frac{1}{q^2}$ und WW-Potential

Der Feynman-Propagator $\frac{1}{q^2}$ wurde in der Vorlesung ad hoc und ohne Bezug auf das WW-Potential eingeführt. In der Tat existiert aber eine tiefere Zusammenhänge.

Skizze an stationärem sphärisch symmetr. Potential



Born'sche Näherung:

Ein- und auslaufende Wellen werden als ebene Wellen beschrieben:

$$\psi_{i/f} = \left(\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{p}_{i/f} \vec{r} - E_{i/f} t)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i/\hbar (\vec{p}_{i/f} \vec{r} - E_{i/f} t)}$$

Übergangsamplitude:

$$A_{fi} = \langle f | V(r) | i \rangle$$

$$\left(= \frac{1}{V} \cdot \iint \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_f \vec{r} - E_f t)\right) V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i \vec{r} - E_i t)\right) d\vec{r} dt \right)$$

(Zeitintegration bringt Energieerhaltung $\delta(E_f - E_i) =$

$$A_{fi} \sim \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i \vec{r} - \vec{p}_f \vec{r})\right) d\vec{r}$$

$$\sim \int V(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{r}\right) d\vec{r} = A_{fi}(\vec{q}^0)$$

= Fourier transformierte des Potentials im Impulsraum \vec{q} .

Für $V(r) = \frac{C}{r}$ findet man $A_{fi}(\vec{q}^0) = \frac{C}{q^2} \Rightarrow$ Propagator

\rightarrow Propagator = Fourier topo. des WW Potentials im Impulsraum.

Bei Streuprozessen zur Erforschung der Struktur des Targets ist der Impulsübertrag \vec{q}^2 bzw. q^2 von großer Bedeutung.

Interessantes Potential:

$$V(r) = \frac{C}{r} \cdot e^{-r/a} \rightarrow A_{fi}(\vec{q}^0) = \frac{C}{q^2 + (1/a)^2} = \frac{C}{q^2 + M^2 c^2}$$

4.2 Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung und Kernstreuung

a) Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

$$V(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi} \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

Mit elektr. Potential und Poisson'schem Theorem für skalare Felder u, v :

$$\int (u \Delta v - v \Delta u) d\vec{r} = 0$$

$\wedge \Delta e^{i\vec{q}\vec{r}} = -\vec{q}^2 e^{i\vec{q}\vec{r}}$ folgt

 $\left. \begin{array}{l} \text{Elektr. Potential } \phi(\vec{r}) \\ V(\vec{r}) = e \phi(\vec{r}) \\ \Delta \phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) \end{array} \right\}$

$$\begin{aligned}
 \left[A_{fi} \right. &= -\frac{e}{q^2} \int \Delta \phi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \\
 &= \frac{+e}{q^2} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \\
 &= \frac{e^2}{q^2} \int f(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \\
 &= \frac{e^2}{q^2} \cdot F(\vec{q}^2)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} | \text{ } 1/2 \text{ in Volung} \\ \cdot \text{ wegen} \end{array} \right\} \\ \text{mit } f(\vec{r}) = e f(\vec{r}) \\ \text{und } \int f(\vec{r}) d\vec{r} = 1 \end{array} \right\}$$

auf 1 normiert
 Fourier-Trf. der Ladungsverteilung
 = Formfaktor

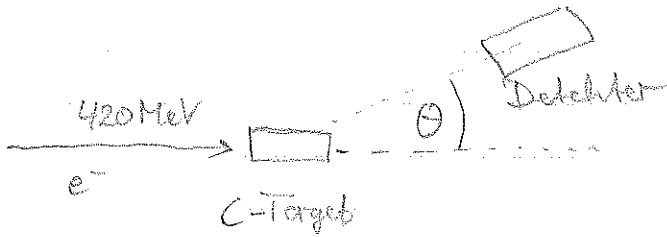
d.h. für den Wirkungsquerschnitt eines p.h.f. Teilchens an einer ausgedehnten Ladungsverteilung erhält man:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{ptel}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

Bem:

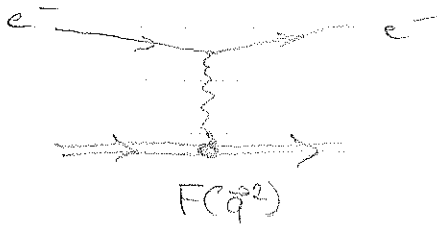
- (1) $|F(\vec{q}^2)|^2 \leq 1$ d.h. WQ immer kleiner!
- (2) für kleine $\vec{q}^2 =$ „ausgestreckte Probe hat groß Wellenlänge“ $|F(\vec{q}^2)|^2 \rightarrow 1$.

b) Elektron - Kern - Streuung :

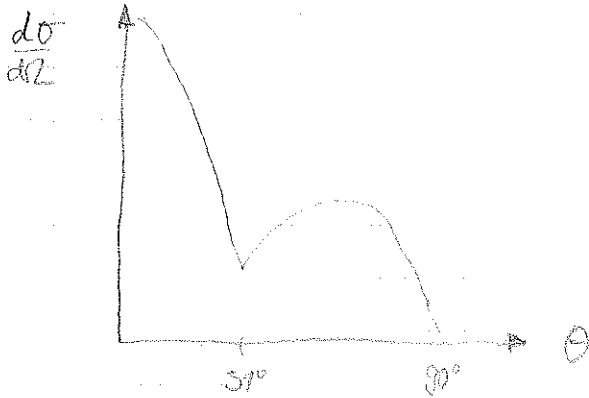


Hofstadter 1957
Stanford 500 MeV Linear beschl.

Fig 4.2, 4.3



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$



Aus $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}$ läßt sich $|F(\vec{q}^2)|^2$ bestimmen \rightarrow eine einfache Richtung zur Ermittlung von $\rho(r)$ ist aber nicht möglich:

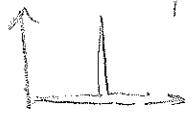
- $|F(\vec{q}^2)|^2$ nicht für alle \vec{q}^2 gemessen (für ausgedehnte Kerne fällt $|F(\vec{q}^2)|^2$ ab)
- für große \vec{q}^2 stark ab ... schon zu messen
- man braucht auch die Phase!

Statt dessen: Modellansätze zur Beschreibung des Ladungsverteiles \rightarrow Fourier-Transform. der Modellansätze wird an Daten angepasst.

Fig. 4.4 & Fig. 4.5

Beispiele:

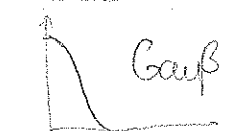
Ladungsverteilung $f(r)$



$$\frac{\delta(r)}{4\pi}$$



exp. $\left(\frac{a^3}{8\pi}\right) \exp(-ar)$



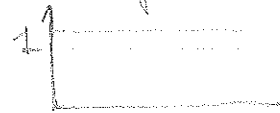
Gauß $\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{2}\right)$



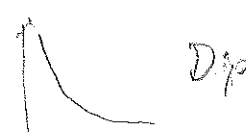
$$\begin{cases} C & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$C = \frac{3}{4\pi R^3}$$

Formfaktor $F(\vec{q}^2)$



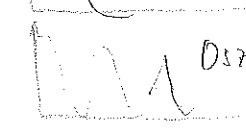
Konstant = 1



Dipolform $\left(1 + \frac{\vec{q}^2}{a^2 \hbar^2}\right)^{-2}$



Gauß $\exp\left(\frac{-\vec{q}^2}{2a^2 \hbar^2}\right)$



Oszillierend $3\alpha^{-3} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$
mit $\alpha = \vec{q} R / \hbar$

c) Ladungsverteilung des Kernes

Generelle Schwierigkeit:

Je größer die Ausdehnung der Ladungsverteilung, desto stärker fällt $|F(q)|^2$ ab... einschneidendster Effekt, ausgedehnte Kerne!

Für eine Vielzahl von Kernen wurde die Ladungsverteilung bestmöglicher Kerne wiederum durch eine "Fermi-Verteilung" beschrieben.

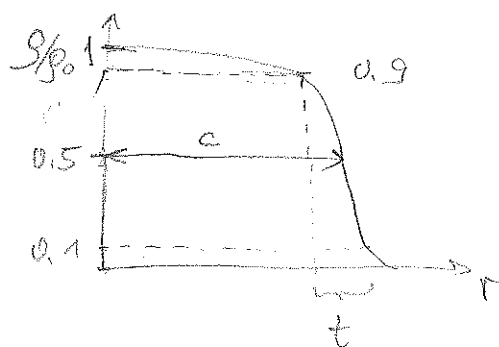


Fig. 4.6

Radiale Ladungsverteilung:

$$g(r) = \frac{g_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

⇒ "weiches Rand"

$$c = \text{Halbdichteradius} \approx (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$$

$$t = \text{Oberflächendicke (90\%-10\%)} \quad t = (4 \ln 3) a \approx 4.4 a \approx 2.4 \text{ fm}$$

$$a = 0.545 \text{ fm}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle_{\text{Fermi}}} \approx 0.94 A^{1/3} \text{ fm}$$

Oft wird die Kernladungsdichte durch Kugel mit hartem Rand beschrieben, die die $\langle r^2 \rangle$ gegeben ist durch:

$$\langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = \int_0^R r^2 g(r) d\vec{r} = 4\pi \cdot \frac{3}{4\pi R^3} \cdot \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} R^2$$

$$\rho = \frac{3}{4\pi R^3} \quad \uparrow \quad (\text{homogener Kugel})$$

$$\rho_{\text{K}} \langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = (0.94 \cdot A^{1/3} \text{ fm})^2 \Rightarrow R = \frac{5}{3} \cdot 0.94 A^{1/3} \cdot 1.2 \text{ fm} A^{1/3}$$

|| Erwartungswert $\langle r^2 \rangle$ für harte Kugel soll gleich sein der Fermi-Kugel

(siehe auch Kap. 1)

Bemerkung: Für die Nukleonendichte von Kernen findet man:

$$\rho_{\text{K}} = 0.17 \text{ Nukleon/fm}^3$$

$$*) \quad \langle r^2 \rangle = \int r^2 g(r) d\vec{r} = 4\pi \int r^4 g(r) dr$$