3. Symmetrien:

Noether Theorem (Emmy Noether, 1917)*)

„Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße"
(formuliert und bewiesen für kontinuierliche Gruppen: Lie Gruppen)

T. D. Lee: „The root to all symmetry principles lies in the assumption that it is impossible to observe certain basic quantities, the non-observables."

* Kontinuierliche Symmetrie Transformationen → additive Erhaltungsgrößen
- Raum-Zeit Symmetrien
  Bsp: Translations Invarianz → Impulserhaltung: Es gibt keinen absoluten Ort

- Innere Symmetrien:
  Phasentransformationen in 1dim ($U(1)$), in 2 dim ($SU(2)$) od. 3dim ($SU(3)$)
  → Erhaltung von generalisierten Ladungen
  $U(1) \to$ elektr. Ladung ; $SU(2) \to$ (Iso) Spin ; $SU(3) \to$ Farbladung
  unbeobachtbar: absolute Phase eines geladenen Teilchens (**)

* Diskrete Symmetrie Transformationen → multiplikative Erhaltungsgröße
- Orts, Zeit und Ladungsumkehr: P, T, C – Transformationen

Erhaltungsgröße:
Eine Observable ist eine Erhaltungsgröße, wenn für den zugehörigen Operator O gilt:

$$[H, O] = 0$$

d.h. Operator vertauscht mit Hamilton operator; dann findet man Eigenfkt zu H die auch Eigenfkt zu O sind und die mit den entsprechenden Eigenwerten $o = \langle\psi|O|\psi\rangle$ „sortieren" lassen.
„o" sind dann die erhaltenen Quantenzahlen des Systems

---

*) Theorem-1: Ist ein System invariant unter den Transformationen einer Lie-Gruppe so existiert eine Erhaltungsgröße zu jedem Element der Lie-Algebra

(**) Phasendifferenz unterschiedlich geladener Teilchen.

3.1 Kontinuierliche Raum-Zeit transformationen:

Betrachte „kontinuierliche" Trasformation U die sich nur wenig von $\mathbb{1}$ (Identität) unterscheidet:

$$\psi(\vec{r},t) \longrightarrow \psi'(\vec{r},t) = U\,\psi(\vec{r},t)$$

U ist unitär: $U^{+} = U^{-1}$: $UU^{+} = \mathbb{1}$ aber i.a. nicht hermitesch $U \neq U^{+}$ (→ keine Observable).

(a) Räumliche Translation: $U\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}+\Delta\vec{r},t)$

- infinitesimale Translation:

$$\boxed{\vec{p} = i\hbar\frac{d}{d\vec{r}}}$$

$$\begin{aligned}\psi'(\vec{r},t) &= \psi(\vec{r}+\delta\vec{r},t)\\ &= \psi(\vec{r}) + \delta\vec{r}\,\frac{d}{d\vec{r}}\psi(\vec{r},t)\\ &= \left(1+\delta\vec{r}\,\frac{i}{\hbar}\vec{p}\right)\psi(\vec{r},t)\end{aligned}$$

- endliche Transformation durch wiederholte Anwendg:

$$\underbrace{\psi(\vec{r}+\Delta\vec{r},t)}_{\Delta\vec{r}=n\cdot\delta\vec{r}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\Delta\vec{r}}{n}\cdot\frac{i}{\hbar}\cdot\vec{p}\right)^{n}\psi(\vec{r},t)\right]$$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\vec{r}\cdot\vec{p}\right)}_{=U}\psi(\vec{r},t)$$

Invarianz unter U (Translationsinvarianz) $\Leftrightarrow$ $[H,\vec{p}]$ $\Leftrightarrow$ $\vec{p}$ = Erhaltungsgröße

(b) Rotationen:

$$U = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\vec{\varphi}\cdot\vec{J}\right)$$

mit Drehimpulsoperator $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$

Rotations-Invarianz $\Longleftrightarrow$ $[J^2, H] = 0$, $[J_z, H] = 0$ $\Longleftrightarrow$ Gesamtdrehimpuls und 3 Komponente sind erhalten

Man kann Eigenzustände fordern: $|j,m\rangle$ mit $J^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle$
$J_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle$

(c) Zeittranslation : $U = \exp(\frac{i}{\hbar} \cdot \Delta t H)$

Zeitinvarianz $\Rightarrow$ Energieerhaltung. ($i\hbar \frac{d}{dt} = E$)

3.2 Innere Symmetrien

(a) Phasentransformationen in einer Dimension.

Phase unbeobachtbar $\rightarrow$ Invarianz unter Phasentransformation

$$\psi'(\vec{r},t) = e^{-i\delta}\,\psi(\vec{r},t)$$

$\delta = \text{const}$: globale Phasentrf.
$\delta = \delta(\vec{r})$: lokale " : $U(1)$ Invarianz ($1 = 1$ Dim)
$\Rightarrow$ Eichgruppe der QED.

Der Ladungsoperator $\hat{Q}$:

$\hat{Q}|e^-\rangle = -1$ $\quad \hat{Q}|e^+\rangle = +1$ $\quad$ Erwartungswerte $Q = \pm 1$

bildet mit anderen simultan beobachtbaren Eigenschaften einen Satz von Quantenzahlen die den Teilchenzustand $|\psi\rangle$ festlegen.

Analog zu oben läßt sich auch hier mit dem Ladungsoperator eine Transformation U

$$U = \exp(-i\alpha\hat{Q})$$

definieren die auf den Zustand $|\psi\rangle$ wirkt: wegen $\hat{Q}|\psi\rangle = Q\psi$

$$\Rightarrow \quad \exp(-i\alpha\hat{Q})|\psi\rangle = \exp(-i\alpha Q)|\psi\rangle \quad = \text{Phasentrf.}$$

gleichzeitig vertauscht $\hat{Q}$ mit dem Hamiltonian: $[H, \hat{Q}] = 0$

Die Invarianz unter einer globalen Phasentransformation ist also mit der Erhaltung einer additiven "Ladung" verknüpft: Ladungserhaltung (nicht unbedingt „elekt. Ladung; generalisierte Ladung)

Analog zum Ladungsoperator kann man Leptonzahloperator $\hat{L}$ und Baryonenzahloperator $\hat{B}$ benutzen...
→ Erhaltung entsprechender additiver Quantenzahl.

a1) Leptonzahlerhaltung

Sieht man vom Neutrino-Mixing ab so sind die experimentellen Befunde als auch die Vorhersage der Theorie der Elementarteilchenphysik konsistent mit der Annahme von Leptonzahlerhaltung

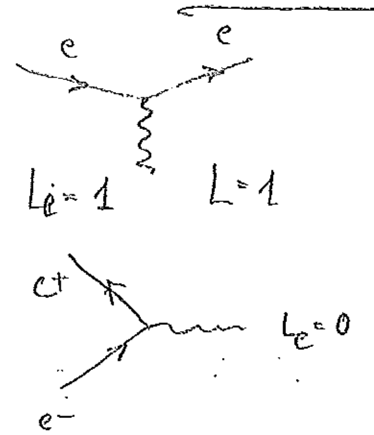
Totale Leptonzahl $L = L_e + L_\mu + L_\tau$
wobei L_i als Elektron-, Myon oder Tauleptonzahl benutzt wird. Sowohl L als auch L_i sind in erhalten:

Bsp.: $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

$$
\begin{array}{lcl}
L_\mu = +1 & \to & 0 + 0 + 1 \\
L_e = 0 & \to & 1 - 1 + 0 \\
\hline
L = 1 & \to & 1 - 1 + 1 = 1
\end{array}
$$

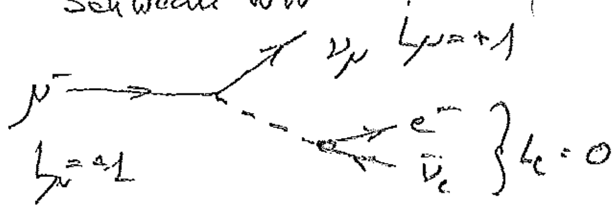
Die Leptonzahl ist an allen Vertices aller WW erhalten:

QED



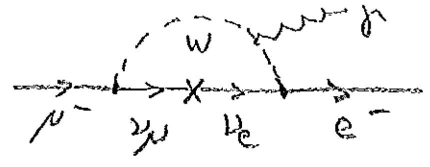
$L_e = 1 - 1 = 0$

Schwache WW



Aufgrund der Existenz von Neutrinomixing kann es aber zu Leptonzahl verletzenden Prozessen in höheren Ordnungen kommen.

Bsp



Zerfallsverhältnis (Theorie):
$BR(\mu^- \to e^- \gamma) < 10^{-53}$
Exp. Limit: $BR < 10^{-11}$

a_2) Baryonenzahl $\tilde{B}$:

$$\tilde{B} = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3}$$

Baryonen: $p, n, \Lambda, \Delta, \dots$ $\tilde{B} = +1$
Anti Baryonen: $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda}, \dots$ $\tilde{B} = -1$

Obwohl es in vielen ‚GUT' Theorien Baryonenzahlverletzung gibt läßt das Standardmodell der Elementarteilchen keine $\tilde{B}$-Verletzung zu.

Experimentell wird dies beispielsweise durch die Suche nach dem $\cancel{\tilde{B}}$-Prozess:

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+$$

untermauert, für den eine Protonlebensdauer von $> 10^{32}$ Jahre gemessen würde.

b) Phasentransformationen in 2 Dimensionen: Iso-Spin Erhaltung

b_1) Spin für nicht-relativistische Elektronen (Erinnerung)

- freie Elektronen, ohne Magnetfeld $\rightarrow$ 2-Zustandssystem $\psi_e = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \psi_0$

Solange kein Magnetfeld vorhanden ist, ist Spin nicht beobachtbar und „Physik" invariant unter Transformation U:

$$\psi_e \rightarrow U\psi_e = U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \psi_0$$

U = „2-dim Operator": $U = \exp(i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma})$

wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ = Pauli-Matrizen.
(ansonsten analog wie 1-dim. Phasentrf.)

- Betrachte gebundenes e^+e^- = Positronium-System

Spinzustände: Gesamtspin $J=1$ (Triplett), $J=0$ (Singlett)

$$\begin{array}{lll} \text{Triplett} & & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; S \;\; S_z \quad\; S \;\; S_z \\ J=1 & \left\{ \begin{array}{l} J_z = 1 \\ J_z = 0 \\ J_z = 1 \end{array} \right. & \begin{array}{l} |\uparrow\uparrow\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Singett} & J_z = 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ J=0 & & \end{array}$$

Triplett = Symmetrisch gegen Vertauschung
Singett = Asymmetrisch gegen Vertausch.

b_3 „Starker" Iso-Spin

Heisenberg hat 1932 vorgeschlagen Proton und Neutron für die starke WW (Kernkraft) als zwei Zustände des gleichen Teilchens zu behandeln.

1) Macht nur Sinn wenn man e.m. WW ignoriert
2) Massen sollten gleich sein (verhältnismäßig gut erfüllt)
   → Massenunterschied aufgrund e.m. WW erklärbar.

Die „starke WW" (Kernkraft) ist invariant unter Trf im IsospinRaum:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \longrightarrow U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} p = |I=\tfrac{1}{2}, I_3 = +\tfrac{1}{2}\rangle \\ n = |I=\tfrac{1}{2}, I_3 = -\tfrac{1}{2}\rangle \end{array}$$

⇒ bzw. die starke WW erhält den starken Isospin

Die 2-dim Trf U im Isospin-Raum werden analog durch Pauli-Matrizen erzeugt.

In gleicher Weise kann man die 3 Pionzustände $\pi^\pm, \pi^0$ einem Iso Spin-Triplett zuordnen:

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \pi^+ = |I=1, I_3 + 1\rangle \\ \pi^0 = |I=1, I_3 = 0\rangle \\ \pi^- = |I=1 \;\; I_3 = -1\rangle \end{array} \right.$$

Frage: Gibt es auch einen $I=0$ Singett-Partner?
→ η $(I=0, I_3=0)$

Allgemein findet man: $\boxed{\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{B}{2}}$

Zusammengesetzte Systeme: 2-Nukleon-System

$$I=1 \quad \begin{cases} |pp\rangle & I_3=1 \\ \frac{1}{2}\left(|pn\rangle + |np\rangle\right) & I_3=0 \\ |nn\rangle & I_3=1 \end{cases}$$

$$I_3=0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|pn\rangle - |np\rangle\right) \qquad I_3=0$$

Totale Wellenfkt eines 2-Nukleon-Zustandes:

$$\Psi_{tot} = \phi_{space} \cdot \alpha_{spin} \cdot \chi_{Isospin}$$

da es sich bei Nukleonen um Fermionen handelt muß Ψ_{tot} asymmetrisch gegen Vertauschg $1 \Leftrightarrow 2$ sein.

Für ein Deuteron $d \,(= |np\rangle)$ mit Gesamtspin $J=1$ und $\ell=0$: (= Grundzustand)

$$\phi_{space} = \text{symmetrisch } 1 \Leftrightarrow 2 \quad (\ell=0)$$
$$\alpha_{space} = \text{symmetrisch } 1 \Leftrightarrow 2 \quad (J=1)$$
$$\Rightarrow \chi_{Isospin} = \text{asymmetrisch!}$$

d.h. d ist ein $|I=0, I_3=0\rangle$ Zustand!

Isospin-Erhaltung in starker WW:

(1)		p +	p →	d +	π^+
	I	1/2	1/2	0	1
	I_3	1/2	1/2	0	1
(2)		p +	n →	d +	π^0
	I	1/2	1/2	0	1
	I_3	1/2	−1/2	0	0

$$\frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} = 50\%$$

→ $I=0,1$ Zustand ⇒ nur $I=1$ möglich

- Isospin-Symmetrie für e.m. WW nicht anwendbar!
- <u>Isospin in schwacher WW verletzt</u>:

$$n \longrightarrow p + \underbrace{e^- + \nu}_{}$$

	n	p	$e^- + \nu$
I	$1/2$	$1/2$	0
I_3	$-1/2$	$+1/2$	0

<u>Bemerkung</u>

„Starker Isospin" stammt aus einer Zeit in der man noch nichts von der Quark-Zusammensetzung der Hadronen wußte.
Heute benutzt man statt dessen die Quarkflavor Quantenzahlen

U = Up-ness $\quad$ C = Charmness $\quad$ T = Topness
D = downness $\quad$ S = Strangeness $\quad$ B = Bottomness

Bsp: $\quad C(c\text{-Quark}) = +1 \quad C(\bar{c}\text{-quark}) = -1$
$\quad\quad S(s\text{-Quark}) = -1 \quad S(\bar{s}\text{-Quark}) = +1$

→ Starke + e.m. WW erhalten diese Quantenzahlen!

→ die schwache WW verletzt diese Quantenzahlen:

Bsp: $\quad K^+ (u\bar{s}) \longrightarrow \mu^+ \nu_\mu$
$\quad\quad U=1 \;\; S=1 \longrightarrow U=0 \;\; S=0$

Für Kerne spielt Isospin-Konzept immer noch eine wichtige Rolle.

Bsp: $\quad {}^7_3Li^4 \qquad {}^7_4Be^3$

$I_3 = \frac{1}{2}(3-4) = -\frac{1}{2} \qquad I_3 = \frac{1}{2}(4-3) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < I < \frac{7}{2} \qquad \frac{1}{2} < I < \frac{7}{2}$