

2.4 Übergangswahrscheinlichkeit und Fermi's Goldene Regel

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ω bestimmt den WQ eines Streuprozesses bzw. die Lebensdauer eines Teilchenzerfalls:

$$\omega = \frac{\dot{N}_s}{N_i N_t} = \frac{(n_i v_i \cdot N_t) \cdot \sigma}{n_i V \cdot N_t} = \frac{v_i \cdot \sigma}{V} \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \text{Normierungsvol.} \\ = 1 \\ \text{fällt aus Rechnung} \\ \text{heraus!} \end{array} \right.$$

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ergibt sich mittels Fermi's Goldener Regel:



$$A_{fi} = \langle f | H_{\text{WW}} | i \rangle$$

(wird mit Hilfe von Feynman Regeln berechnet)

$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |A_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

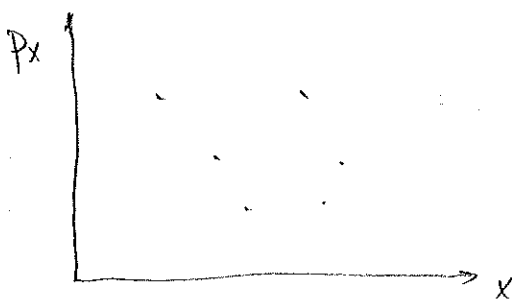
$$\rho(E_f) = \text{Zustandsdichte} = \frac{dN}{dE}(E_f)$$

$$= \text{Zahl der Zustände im } [E_f; E_f + dE]$$

a) Phasenraum und Zustandsdichte

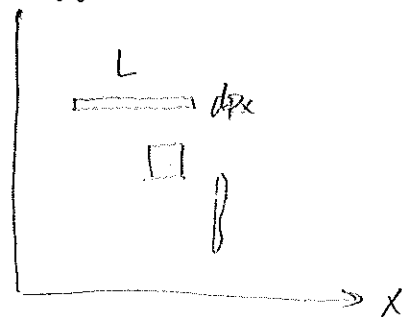
Um einen Teilchenzustand zu beschreiben muß Ort und Impuls des Teilchens bestimmt und angegeben werden, für eindimensionalen Impuls Orts-Raum (= Phasenraum) \vec{x}, p_x

Klassische Mechanik



Teilchenzustände werden durch Phasenraumpunkte beschrieben.

QM



Je nach Messung werden Zustände durch verschiedene Phasenraumzellen beschrieben; Form verschieden, Phasenraumvol. gleich: $L dx \approx h$

Wieviele Zustände passen in ein Phasenraumvol. Ldp ?

$$1\text{-dim.} : dN^{1D} = \frac{L dp}{h} \quad N^{1D} = \frac{L \cdot S dp}{h}$$

$$3\text{ dim} : dN^{3D} = \frac{V \cdot d^3 p}{h^3} \quad N^{3D} = \frac{V \cdot \int d^3 p}{h^3} = \frac{V \int d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

Interessant ist aber die Zustandsdichte.

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

1-Teilchen - Zustandsdichte:

$$N_1^{3D} = \frac{V \int d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \quad g_1 = \frac{dN_1}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3 p_1$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int p_1^2 dp_1 d\Omega_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wg. } E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4 \\ \frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp} \end{array} \right\} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 p_1}{c^2} \int d\Omega_1$$

2-Teilchen - Zustandsdichte *)

(im Prinzip wie 1 Teilchen
- wg. Kondensat bei 0 Impulsbehalt.)
 $E = E_1 + E_2$

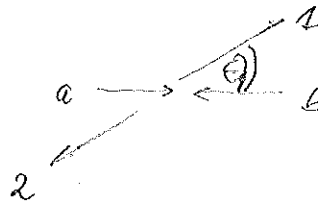
$$g_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \cdot p_1 \int d\Omega_1$$

n-Teilchen Zustandsdichte *)

$$g_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \cdot \frac{d}{dE} \int d^3 p_2 \dots d^3 p_{n-1}$$

Bem: Das hier angegebene Phasenraumvolumen ist nicht lorentz invariant ($d^3 p$ ändert sich unter Lorentz - T.f.). Ein invariantes Maß ist $\frac{d^3 p}{2E}$. Siehe z.B. Phasenraum im PDB.

*) Siehe auch Frauenfelder & Jenney S. 280 ff.

b) Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{\omega_{fi}}{v_i} \leftarrow \text{Vernachlässige "Normierung vol."}$$

$v_i = \text{relativ geschw.}; a \leftrightarrow b$

$$\omega_{fi} = \int \frac{2\pi}{h} \cdot |A_{fi}|^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot p_1 d\Omega_1\right)}_{\text{Phasenraum}}$$

(1) Hochrelativistisch: $v_i = c$

(2) Vernachlässige Massen auch im Endzustand $m_i \ll E_i/c^2$

(3) CMS-System: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ $\beta_i, \beta_f = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 + E_2 = 2p_1 c \\ E_1 \cdot E_2 = p_1^2 c^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{2\pi}{h} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^3} \frac{c^2 p_1^2}{2p_1 c} \cdot p_1 \int |A_{fi}|^2 d\Omega_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4}\right) (p_1^2 c^2) \int |A_{fi}|^2 d\Omega_1 \quad \left. \begin{array}{l} p_1^2 c^2 = E_1^2 \\ E_1^2 = \frac{E_{\text{CMS}}^2}{2} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4}\right) \cdot \frac{(p_1^2 c^2)}{\beta_i \beta_f} \int |A_{fi}|^2 d\Omega_1 \quad \text{für exakt,} \\ & \hspace{10em} \text{Geschwindigkeit} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Der benutzte Phasenraumfaktor $\sim \prod d^3 p_i$ ist nicht Lorentzinvariant. Bezieht man ein Lorentz-invariantes Phasenraum

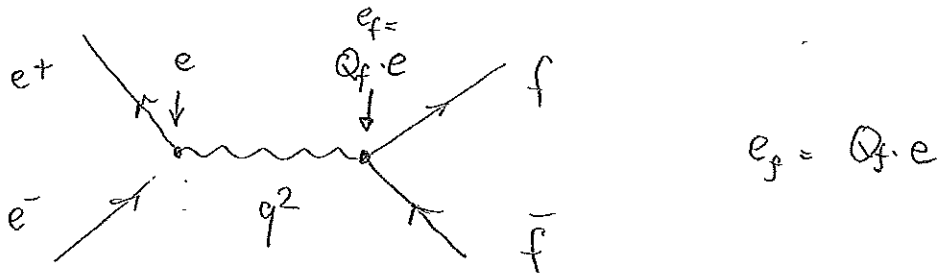
$$\sim \prod_i \frac{d^3 p_i}{2E_i}$$

ändert sich die Normierung. Mit invariantem Phasenraum:

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{1}{(\hbar^4 c^4)} \cdot \frac{1}{(E_a + E_b)^2} \int |A_{fi}|^2 d\Omega_1$$

2.5. e^+e^- -Anihilation

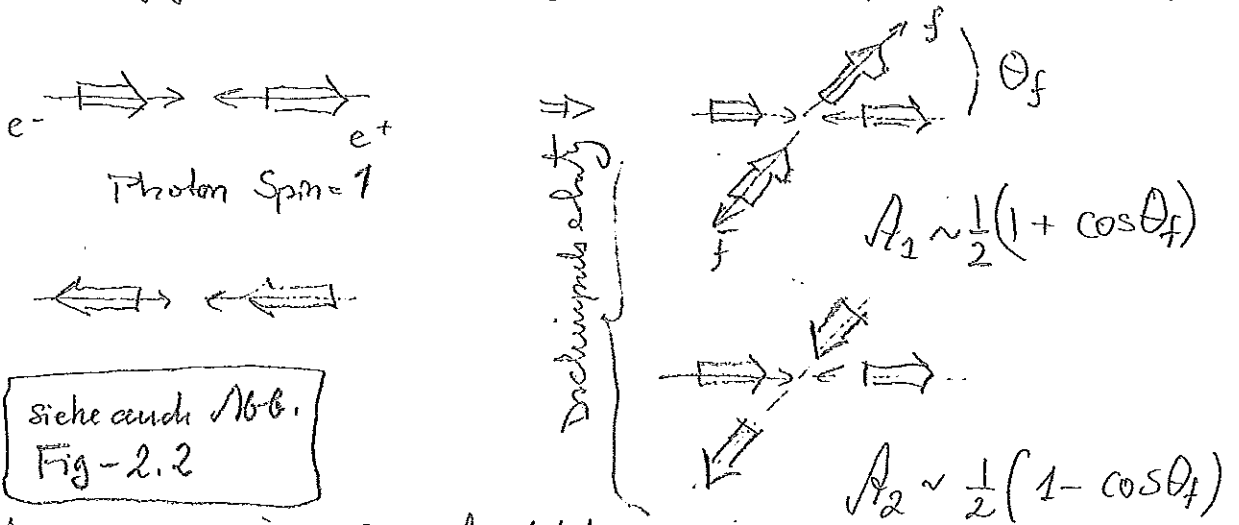
$e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ mit $f\bar{f} = (e^+e^-), \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, q\bar{q}$



$$A_{fi} \sim e \cdot \frac{1}{q^2} \cdot e_f \sim \frac{4\pi\alpha}{q^2} \cdot Q_f \cdot \frac{(\hbar c)^3}{c^2}$$

(in folgenden $Q_f = 1$: d.h. keine Quarks!)

Die angegebene Amplitude ignoriert Photon Spin=1 und Fermion Spin=1/2



Siehe auch Abb. Fig-2.2

Addition der einzelnen Spin-Amplituden

$$|A_{fi}|^2 \sim \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f) \frac{(4\pi\alpha)^2}{q^4} \cdot \left(\frac{\hbar c}{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f) \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{cms}^4} \cdot (\hbar c)^2 (\hbar)^4$$

$$1 \frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \cdot \frac{E_{cms}^2}{4} \cdot \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{cms}^4} \cdot (\hbar c)^6 \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{1}{E_{cms}^2} \cdot (1 + \cos^2 \theta_f) (\hbar c)^2$$

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \frac{1}{E_{cms}^2} (\hbar c)^2 = \frac{87 \text{ nb}}{E_{cms}^2 [\text{GeV}^2]}$$

siehe Bild $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Bild Fig-2-3