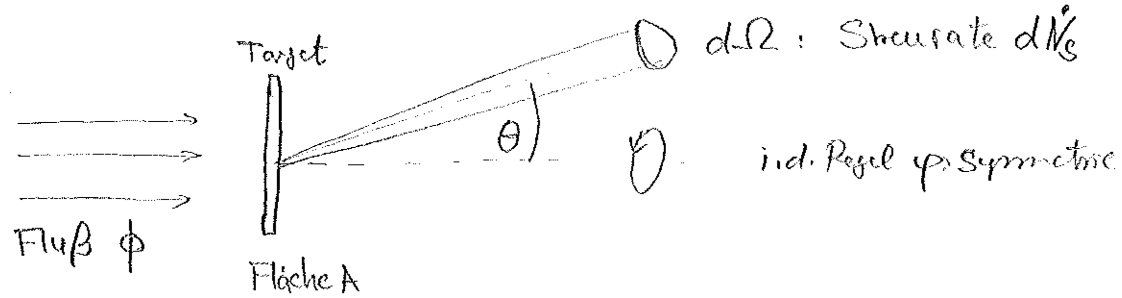
2.3 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsraten

a) Wirkungsquerschnitt (WQ)

Streuprozesse liefern Informationen über die Dynamik der WW zwischen Projektil und dem Target.
Wichtigste Größe zur Beschreibung von Streuprozessen ist der WQ
= Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen Streupartnern,

Betrachte Streuung eines monoenergetischen Teilchenstrahls an einem Target mit N_t Streuzentren:



- einfallender Teilchenfluß ϕ:

$$\phi = \frac{\dot{N}_i}{A} = n_i v_i \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \dot{N}_i = \text{Rate der auf A einfallenden Teilchen} \\ n_i = \text{Teilchendichte im Strahl} \\ v_i = \text{Teilchengeschw. im Strahl} \end{cases}$$

- Rate der ins Raumwinkelelement $d\Omega(\varphi,\theta)$ gestreuten Teilchen $d\dot{N}_S$:

$$d\dot{N}_S(\varphi,\theta) \sim \phi \cdot N_t \cdot d\Omega(\varphi,\theta) \quad \begin{cases} d\Omega = \\ \text{Anteil des} \\ \text{tot. Raumwinkels } 4\pi \end{cases}$$

<u>Proportionalitätskonstante</u> bezeichnet man als differentiellen WQ $\sigma(\varphi,\theta)$

$$\sigma(\varphi,\theta) := \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\dot{N}_S(\varphi,\theta)}{\phi \cdot N_t \cdot d\Omega}$$

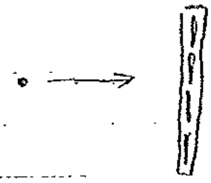
Den totalen WQ erhält man aus der Gesamtrate $\dot{N}_S$ gestreuter T.:

$$\sigma_{tot} = \frac{\dot{N}_S}{\phi \cdot N_t} = \int_{4\pi} \sigma(\varphi,\theta)\, d\Omega$$

<u>Dimension des WQ</u>: $\frac{\text{Rate}}{\text{Rate/Fläche}}$ = Fläche Einheit: $[\sigma] =$
$1\,b = 1\,barn = 10^{-28}\,m^2$

Veranschaulichung: Geometrischer Querschnitt

(1) Punktförmiges Projektil auf sehr dünnes Target, kein Überlapp der Streuer, nur Kontaktwechselwirkung:



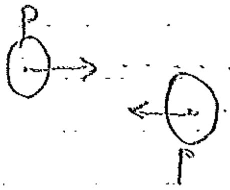
Gesamtrate der gestreuten Teilchen:

$\dot{N}_s = \phi \cdot N_t \cdot A_t$ mit A_t = Querschnitt der Streuer $= \pi R_t^2$

$$\Rightarrow \sigma_{tot} = \frac{\dot{N}_s}{\phi N_t} = A_t = \pi R_t^2$$

d.h. der totale WQ entspricht dem <u>Querschnitt eines Streuzentrums</u>.

(2) pp-Wechselwirkung (nur geometrischer WQ):



$\Big\}\ b$ = Stoßparameter

$b_{max} = 2 \cdot R_p = 2 \cdot 0{,}8\,fm = 1{,}6\,fm$

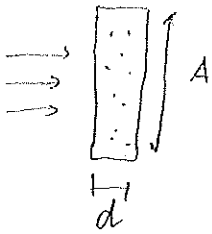
$$\sigma_{tot} = \pi b_{max}^2 = \pi \cdot (1{,}6\,fm)^2 \approx 80\,mb$$

Interessant: $\left.\begin{array}{l} \sigma_{pp}(> 10\,GeV) \approx 40\,mb \\ \sigma_{pp}(2\,TeV) \approx 80\,mb \end{array}\right\}$ experimentelle Werte (*)

d.h. geometrische Ausdehnung der Protonen ist vergleichbar mit der Reichweite der starken WW!

(*) total cross section: „inel + el"

b) Freie Weglänge und Strahlabschwächung



Betrachte „dickes" Target:

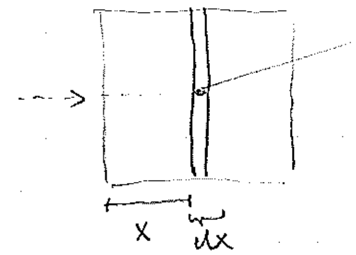
Zahl der Streuzentren: $N_t = n_t \cdot A \cdot d$

Dichte $n_t = \frac{\varrho \cdot N_A}{M_{Mol}}$

Streurate: $\dot{N}_s = \phi \cdot N_t \cdot \sigma \cdot \ldots$

$= \dot{N}_t \cdot n_t \cdot d\, \sigma$ wg $\phi = \frac{\dot{N}_t}{A}$

Streuwahrscheinlichkeit für dickes Target:



Wahrscheinlichkeit für Reaktion in dx nach x:

$$dW(x) = \frac{\dot{N}_s(x)}{\dot{N}_t(x)} = n_t \cdot \sigma \, dx$$

→ Abnahme des einfallenden Flusses ϕ:

$$-d\phi(x) = \phi(x)\, n_t \cdot \sigma \cdot dx$$

Integration: $\phi(x) = \phi_0 \cdot e^{-x(n_t \cdot \sigma)}$

$$= \phi_0 \, e^{-x/\lambda}$$

Mittlere freie Weglänge des Projektils: $\boxed{\lambda = \frac{1}{n_t \cdot \sigma}}$

c) Zerfallsgesetz und Zerfallsbreite von Teilchen

Radioaktives Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \, e^{-t/\tau}$

τ = Lebensdauer des Teilchens/Zustandes.

Teilchenzerfall und zeitabh. Wellenfkt.

Wellenfkt für stabiles Teilchen: $\psi(t) = \psi_0 \, e^{-iE/\hbar \cdot t}$

im Ruhesystem von T: $E = Mc^2$ $\quad = \psi_0 \, e^{-i\,Mc^2/\hbar \cdot t}$

$$P(t) \sim |\psi(t)|^2 = \text{const.}$$

Wellenfkt für instabiles Teilchen: $P(t) \sim |\psi(t)|^2 \sim e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow \psi(t) = \psi_0 \cdot e^{-i\,Mc^2/\hbar\, t - t/2\tau}$$

also $E = Mc^2 - i\frac{1}{2}\Gamma$ mit $\Gamma = \hbar/\tau$

⇒ Wie sieht die Energieverteilung des Teilchens aus?
Die Energieverteilung ergibt sich als Fouriertransformierte der zeitab. Wellenfkt.

Man findet:

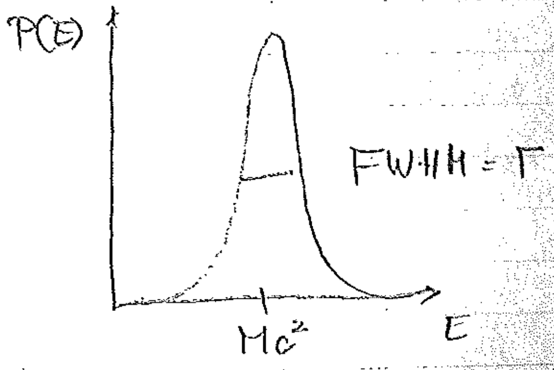
$$\Psi(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int \psi(t)\, e^{iE/\hbar \cdot t}\, dt$$

Ableitung s. Frauenfelder & Henley S. 94

$$\tilde{\Psi}(E) \sim \frac{C}{(E - Mc^2) + i\Gamma/2}$$

$$P(E) \sim |\tilde{\Psi}(E)|^2 \sim \frac{1}{(E - Mc^2)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$P(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{(E - Mc^2)^2 + \Gamma^2/4}$$



d.h. aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt das Teilchen eine „Energiebreite" $\Delta E = \Gamma$ mit $\Gamma \cdot \tau = \hbar$.

$\boxed{\text{Fig-2.1}}$

s. Bsp: $\rho \to \pi^+\pi^-$
$\Gamma_\rho = 150\,\text{MeV} \Leftrightarrow \tau_\rho \approx 0.4\, 10^{-23}\,s$