

## 2. Beschreibung von Stoßprozessen

### 2.1 Relativistische Kinematik

In Teilchenphysik  $E \gg m \rightarrow$  hochrelativistisch:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

4er-Vektor: Zeit+Ort:  $X = (ct, \vec{x}) = x^\mu$   
 E, Impuls:  $P = (E/c, \vec{p}) = p^\mu$   
 $a = (a_0, \vec{a}) = a^\mu$

Skalarprodukt:  $a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$   $a = (a_0, \vec{a})$   
 $b = (b_0, \vec{b})$

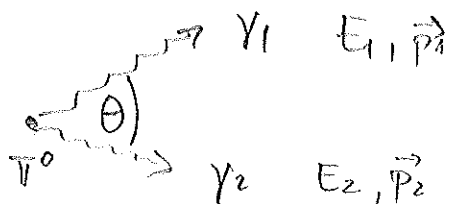
$$= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} \cdot a^\mu \cdot b^\nu$$

mit  $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Das so definierte Skalarprodukt ist Lorentzinvariant.

Bsp 1:  $p = (E/c, \vec{p})$   $p \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$  } invariante Masse  
 4er Impulsquadrat

Bsp 2:  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$



$$M^2 = \frac{1}{c^2} (p_1 + p_2)^2 = \frac{1}{c^2} \left[ \frac{1}{c^2} (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{c^4} [E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2] - \frac{1}{c^2} [\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + 2 \underbrace{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}_{2 |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta}]$$

Photon:  $|\vec{p}_i| = E_i/c$  (masselos)  $2 \cdot |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cdot \cos \theta$   
 $= \frac{2E_1 E_2}{c^4} (1 - \cos \theta)$

## 2.2 Feynman - Diagramme

Konkrete theoretische Einführung von Feynman-Diagrammen ist schwierig und erst in QFT! Feynman-Diagramme sind "Rechenregeln" zur Berechnung von Übergangsamplituden. Sie sind zugleich sehr illustrativ und geben bereits ohne ausgerechnet zu werden, ein gutes Verständnis über die Dynamik eines Prozesses. Sie sind als "Piktogramm" eine wichtige Werkzeug in der Teilchenphysik.

### Typ. Problem:

Vorhersage der WW-Wahrscheinlichkeit bzw. WW-Rate eines Streuprozesses,

$$\text{Bsp.: } e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$

Aus der PEP4 kennen Sie bereits die Übergangsamplituden für einen atomaren Übergang + vereinfachte Situation:



$$H = H_0 + H_{WW} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(x)$$

Störungstheorie für  $H_{WW} \ll H_0$ :  $\psi_i, \psi_f$  sind dann Lösungen zu  $H_0$  für freie Teilchen:

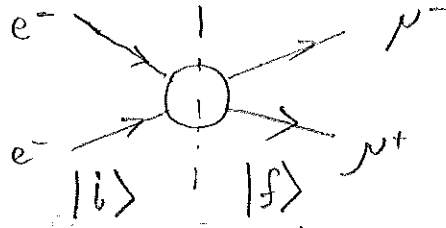
$$\text{Übergangsamplitude:} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \psi_i = N \cdot \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t) \\ \vec{k} = \vec{p}/\hbar \quad \omega = E/\hbar \end{cases}$$

$$A(i \rightarrow f) = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \int \psi_f^* H_{WW} \psi_i d\vec{x} dt$$

$$\rightarrow \text{Übergangsrate} \sim P \sim |A|^2$$

Bem: (1) Teilchen bleibt erhalten  
(2) nicht relativistische  $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$  Bemdy.

In der Teilchenphysik ist die Situation komplizierter:



1. Teilchen vernichten sich, neue Teilchen entstehen
2. Teilchen sind hoch-relativistisch.

(1) QFT (Quantenfeldtheorie) zur korrekten Behandlung.

$\psi(\vec{x}, t)$  nicht mehr länger „skalare Fkt.“ sondern Operator der Teilchen mit Impuls  $\vec{k}$  erzeugen bzw. vernichten kann.

(2) Relativistische Energieimpuls beziehung:  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

→ 2 Energieeigenwerte:

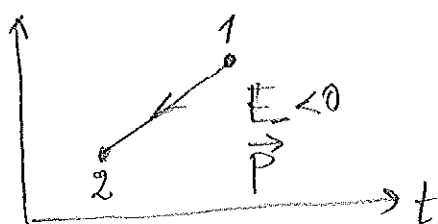
$$E_+ = +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = +E \quad \rightarrow \quad \omega_+ = +\sqrt{\frac{p^2 c^2 + m^2 c^4}{\hbar^2}} = +\omega$$

$$E_- = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = -E \quad \rightarrow \quad \omega_- = -\sqrt{\frac{p^2 c^2 + m^2 c^4}{\hbar^2}} = -\omega$$

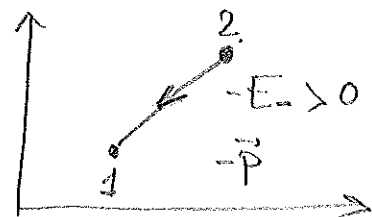
$$E_+ > 0: \psi_+ = N \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t)$$

$$E_- < 0: \psi_- = N \exp(i\vec{k}\vec{x} + i\omega t)$$

Interpretation der neg. Energie lösung:



$\cong$



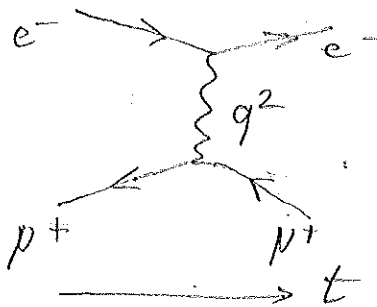
Teilchen bewegt sich in „-t Richtung“  
mit neg. Energie

$\cong$  Antiteilchen in pos. Zeitrichtung  
mit pos. Energi.

Zweite Lösung erlaubt die Beschreibung von Anti-Teilchen!

a) Feynman-Diagramme in QED ( $\rightarrow$  Übergang amplituden für e.m. Prozesse)

Bsp:  $e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$



- (1) Fermionen (im Limit frei) : Pfeile in pos. Zeitrichtung
- (2) Antifermionen (-u) : Pfeile in neg. Zeitrichtung
- (2) Austauschbosonen (Photon) :

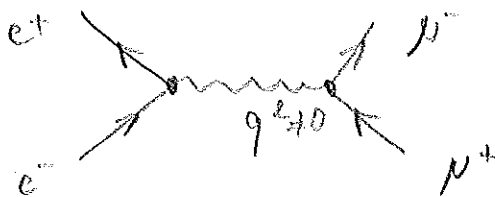
In QED :



nur eine Art von Vertex  
 Stärke  $\sim$  elektr. Ladung  $e$   
 $\sim \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{137}$   
 (Feinstrukturkonstante)

- (3) An jedem Vertex gilt 4er-Impuls erhaltung
- (4) innere Teilchen <sup>(Propagator)</sup> sind virtuell und erfüllen i.d. Regel der Energi-Impulsrelation nicht!
- (5) Äußere Teilchen (Linien) sind reelle Teilchen und erfüllen die Energi-Impuls Beziehung:  
 $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

Bsp:  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  ; LEP:  $456 \text{ GeV } e^- \rightarrow e^- e^+ 456 \text{ GeV}$



$q =$  4er-Impuls des Photons

4er Impuls des Photons:  $P_\mu = (E/c, \vec{p})_{e^-} + (E/c, -\vec{p})_{e^+} = (\frac{2E}{c}; 0)_\mu$   
 CMS

Invariante Masse des virtuellen Photons:

$M^2 = \frac{1}{c^4} \cdot 4E^2 \neq 0$  wie man für Photon erwartet

Die Energieimpulsbeziehung ist also für das virtuelle Photon verletzt.  
Dies ist für eine kurze Zeit  $\Delta t$  möglich:

$$\Delta t \cdot \Delta E \approx \hbar$$

Bem.: Je nach Vorzeichen des  $q^2$ -Werts des virtuellen Teilchens spricht man von raum-artigen oder zeit-artigen Photonen,  
( $q^2 < 0$ ) ( $q^2 > 0$ )

• freie Photonen:  $q^2 = M_\gamma^2 c^2 = 0$

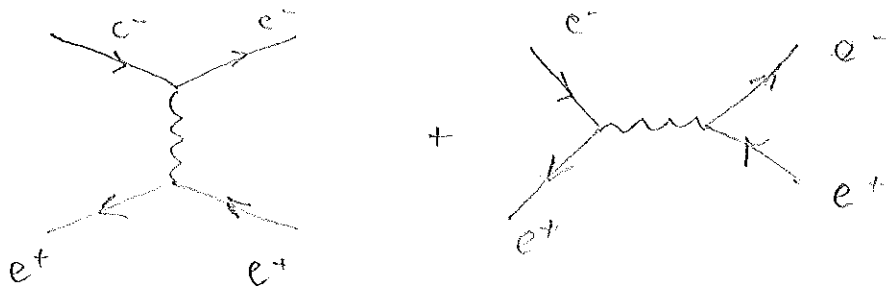
Aussagen über die Übergangsamplitude:

$$A(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \sim \frac{\text{Vertexkopplungsstärke} \cdot \text{Vertexkopplungsstärke}}{q^2 (\text{Austauschteilchen})}$$

$$\sim e \cdot \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{\text{Propagator}} \cdot e \sim \frac{d^4}{q^2}$$

Ein physikalisch beobachtbarer Prozess wird durch die Summe aller möglichen Amplituden (Feynmandiagramme) die zum gleichen Endzustand führen beschrieben. Die Beiträge werden kohärent d.h. auf dem Amplituden-Niveau addiert.

Bsp:  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



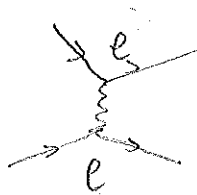
$$A_1 + A_2 = A_{\text{tot}}$$

Wp. größen sind  $\sim |A_{\text{tot}}|^2 = |A_1 + A_2|^2 \Rightarrow$  Interferenzterme spielen eine Rolle.

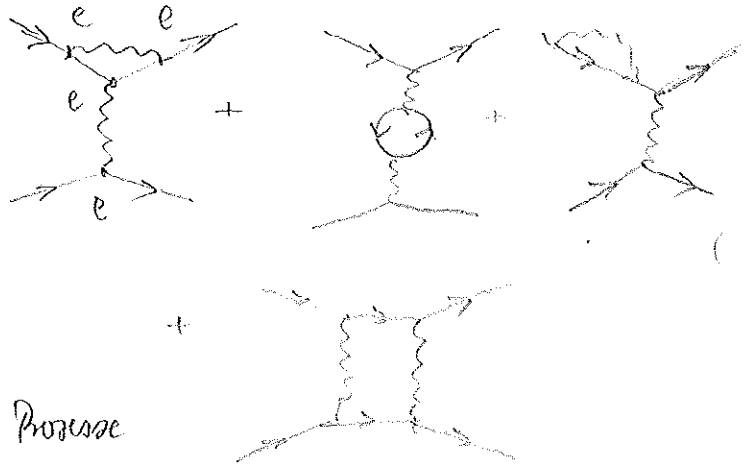
b) Feynman-Graphen höherer Ordnung

Bsp.  $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$

$A \sim e^2 \sim \alpha$



$A \sim e^4 \sim \alpha^2$

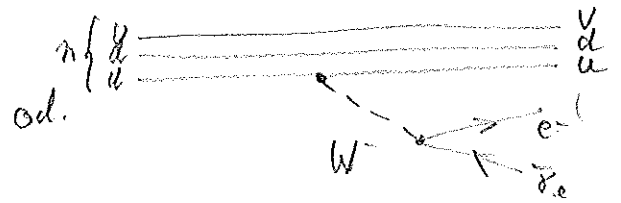
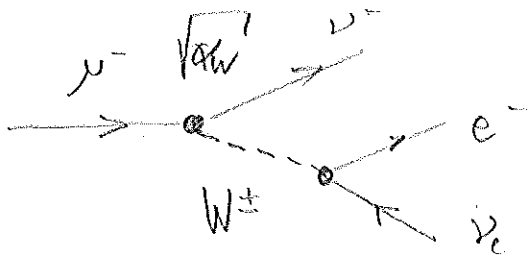


Mit  $\alpha = \frac{1}{137}$  spielen höhere Prozesse weniger wichtige Rolle.

c) Feynman-Graphen für schwache WW

QED:  $\gamma$

Schwache WW:  $W^\pm, Z$



Kopplungsstärke  $\sim \sqrt{\alpha_W} \sim g_W$

"Zwischen quarks" in e+e- Ordnung umkehrt!

Massive W-Bosonen führen zu Änderung des Propagators:

$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{1}{q^2 - M_W^2}$

$A \sim \frac{g_W^2}{q^2 - M_W^2}$