

# **Physik V – PEP4**

## **Kern- und Teilchenphysik**

Vorlesung von Prof. J. Stachel  
Universität Heidelberg

Skript erstellt von Korinna Zapp basierend auf der Vorlesung WS 01/02

Version vom 7. April 2021



# Vorwort

So ganz ohne Vorwort geht es auch diesmal nicht, ein paar Bemerkungen an dieser Stelle sind unumgänglich.

Zunächst einmal wäre da die Frage der Urheberschaft: Dieses Skript basiert auf der Vorlesung „Physik V – Kern- und Elementarteilchenphysik“, die Prof. Stachel im WS 01/02 an der Uni Heidelberg gehalten hat. Daneben wurde von folgenden Werken (zum Teil recht ausgiebig) Gebrauch gemacht:

- R. K. Bock, A. Vasilescu: The Particle Detector BriefBook
- W. Demtröder: Experimentalphysik
- S. Frauenfelder, E. Henley: Subatomic Physics
- C. Grupen: Particle Detectors
- J. D. Jackson: Classical Electrodynamics
- T. Mayer-Kuckuk: Kernphysik
- D. H. Perkins: Introduction to High Energy Physics
- E. Segrè: Nuclei and Particles
- Daten von der Particle Data Group (<http://pdg.lbl.gov>)

Nun muss ich noch eine **Warnung** verbunden mit einer Bitte anbringen: Es muss davon ausgegangen werden, daß sich noch Fehler versteckt halten. Meine Bitte daher: Nicht alles glauben und Fehler oder sonstige Kommentare und Anregungen bei mir melden.

Damit wären wir beim Thema Danksagungen: Besonders bedanken möchte ich mich bei Frau Stachel für die Unterstützung und das geduldige Beantworten vieler Fragen. Dank verdienen auch Klaus Schneider und Anneke Zapp, die das Manuskript gelesen und nicht nur viele Tippfehler gefunden, sondern auch sehr hilfreiche Kommentare abgegeben haben. Außerdem war mir Klaus Schneider in satztechnischen und  $\text{\LaTeX}$ -Fragen behilflich.

*Korinna Zapp*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1. Einheiten . . . . .	1
1.2. Radioaktives Zerfallsgesetz . . . . .	2
1.3. Relativistische Kinematik . . . . .	3
1.4. Kollisionen und Wirkungsquerschnitt . . . . .	7
1.5. Fermis Goldene Regel und Phasenraum . . . . .	8
1.6. Feynman-Diagramme . . . . .	9
<b>2. Beschleuniger</b>	<b>12</b>
2.1. Elektrostatische Beschleuniger . . . . .	12
2.2. Linearbeschleuniger . . . . .	14
2.3. Betatron . . . . .	15
2.4. Zyklotron . . . . .	16
2.5. Synchrotron . . . . .	17
2.6. Synchrotronstrahlung . . . . .	19
<b>3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie</b>	<b>21</b>
3.1. Protonen und schwere Teilchen . . . . .	21
3.2. Čerenkov-Strahlung . . . . .	25
3.3. Elektronen . . . . .	26
3.4. Photonen . . . . .	27
<b>4. Teilchendetektoren</b>	<b>32</b>
4.1. Gasgefüllte Ionisationsdetektoren . . . . .	32
4.2. Szintillationszähler . . . . .	35
4.3. Halbleiterzähler . . . . .	37
4.4. Čerenkov-Zähler . . . . .	38
4.5. Detektoren zur Spurvisualisierung . . . . .	39
<b>5. Charakterisierung von Elementarteilchen</b>	<b>42</b>
5.1. Masse . . . . .	42
5.2. Spin . . . . .	43
5.3. Klassifikation nach Wechselwirkungen . . . . .	44
5.4. Antiteilchen . . . . .	47
5.5. Leptonen . . . . .	49
5.6. Zerfälle und Resonanzzustände . . . . .	50
5.7. Hadronen und Quarkmodell . . . . .	52

<b>6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen</b>	<b>59</b>
6.1. Elastische Streuung . . . . .	59
6.1.1. Geladene, punktförmige Streupartner (Rutherford-Streuung)	59
6.1.2. Streuung relativistischer Spin 1/2 Teilchen . . . . .	61
6.1.3. Streuung von Elektronen an ausgedehnter Ladungsverteilung	62
6.1.4. Ladungsverteilung von Atomkernen . . . . .	64
6.1.5. Elastische Elektron-Nukleon-Streuung . . . . .	66
6.2. Inelastische Elektron-Nukleon-Streuung . . . . .	68
6.3. Skaleninvarianz und Partonen . . . . .	72
<b>7. Symmetrien und Erhaltungssätze</b>	<b>77</b>
7.1. Einführung . . . . .	77
7.2. Ladungserhaltung und Eichinvarianz . . . . .	78
7.3. Baryonenzahl . . . . .	80
7.4. Leptonzahl . . . . .	81
7.5. Strangeness . . . . .	85
<b>8. Isospin</b>	<b>87</b>
8.1. Isospin . . . . .	87
8.2. Isospin für Hadronen und Atomkerne . . . . .	88
<b>9. Multiplikative Erhaltungssätze</b>	<b>93</b>
9.1. Parität . . . . .	93
9.2. Ladungskonjugation . . . . .	96
9.3. Zeitumkehrinvarianz . . . . .	97
9.4. CP-Verletzung und CPT . . . . .	98
<b>10. Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung</b>	<b>101</b>
<b>11. Einfache Kernmodelle</b>	<b>106</b>
11.1. Tröpfchenmodell . . . . .	109
11.2. Fermigasmodell . . . . .	111
<b>12. Schalenmodell</b>	<b>113</b>
<b>13. Elektromagnetische Wechselwirkung</b>	<b>117</b>
<b>14. Kollektive Kernanregungen</b>	<b>124</b>
14.1. Kurze Wiederholung: Anregungen von 2-atomigen Molekülen . . . .	124
14.2. Atomkern . . . . .	125
<b>15. Kernspaltung und Fusion</b>	<b>129</b>
15.1. Kernspaltung . . . . .	129
15.2. Kernfusion . . . . .	132

<b>16. Schwache Wechselwirkung</b>	<b>137</b>
16.1. Betazerfall . . . . .	137
16.2. Schwache Ströme . . . . .	139
16.3. Elektroschwache Wechselwirkung . . . . .	145
<b>A. Übersicht: Teilchen</b>	<b>147</b>
A.1. Leptonen . . . . .	147
A.2. Quarks . . . . .	147
A.3. Austauschteilchen . . . . .	148
A.4. Higgs-Boson . . . . .	148
A.5. Mesonen . . . . .	148
A.6. Baryonen . . . . .	150





# 1. Grundlagen

## 1.1. Einheiten

Wie in jeder Sparte der Physik gibt es auch in der Kern- und Teilchenphysik vom SI-System abweichende Einheiten, die sich als besonders praktisch erwiesen haben. In Tabelle 1.1 sind die gebräuchlichen Einheiten und ihre Umrechnung in SI-Einheiten sowie einige Naturkonstanten angegeben. Großer Beliebtheit erfreuen sich auch die sog. natürlichen Einheiten, bei denen  $c = \hbar = 1$  ist, sodaß Impuls und Masse die Einheit von Energie, Zeit und Länge die von inverser Energie haben. Solange man keine Zahlenwerte ausrechnen will, haben sie aber durchaus ihre Daseinsberechtigung, da sie viele Herleitungen und Formeln sehr übersichtlich machen. Die verschärfte Variante hiervon ist das Heaviside-Lorentz-System, in dem auch noch  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$  ist.

**Tabelle 1.1.:** Übersicht über die in der Hochenergiephysik gebräuchlichen Einheiten

Größe	Hochenergie-Einheit	SI-Einheit
Energie	1 eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$ J
Impuls	1 MeV/c	$5,344 \cdot 10^{-22}$ kgms
Masse	1 MeV/c <sup>2</sup>	$1,783 \cdot 10^{-30}$ kg
atomare Masseneinheit	1 u = 931,5 MeV/c <sup>2</sup>	$1,661 \cdot 10^{-27}$ kg
Länge	1 fm	$1 \cdot 10^{-15}$ m
Zeit	1 fm/c	$3,33 \cdot 10^{-24}$ s
$c$	$2,998 \cdot 10^{23}$ fm/s	$2,998 \cdot 10^8$ m/s
$\hbar$	$6,588 \cdot 10^{-22}$ MeVs	$1,055 \cdot 10^{-34}$ Js
$\hbar c$	197,3 MeV/cfm 197,3 MeVfm	$3,162 \cdot 10^{-26}$ Jm
natürliche Einheiten		
Masse	1 GeV	
Länge	$1 \text{ GeV}^{-1} = 0,1975 \text{ fm}$	
Zeit	$1 \text{ GeV}^{-1} = 6,588 \cdot 10^{-25} \text{ s}$	

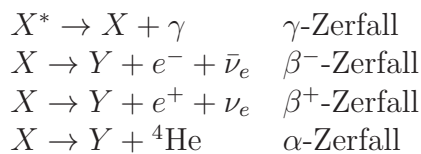
## 1. Grundlagen

Einige Beispiele für typische Dimensionen:

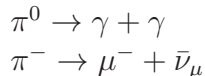
Kernradius	2 – 8 fm
Protonradius	0,8 fm
Pionradius	0,6 fm
Elektron- und Quarkradius	$10^{-3}$ fm
Bindungsenergie in Kernen	2 – 8 MeV
Anregungsenergien	0,1 – 10 MeV
Massen von Nukleonen, Pionen, ...	100 MeV – 10 GeV
schwerstes Teilchen: top-Quark	173 GeV
Masse des $^{208}\text{Pb}$	194 GeV

## 1.2. Radioaktives Zerfallsgesetz

Zerfälle können dann auftreten, wenn ein Zustand X energetisch in der Lage ist, einen Übergang in den Zustand Y zu machen. Das klingt zwar banal, es ist aber trotzdem nützlich, dieses im Hinterkopf zu behalten. Man unterscheidet verschiedene Arten von Zerfällen:



aber auch:



Es sollen hier nur die spontanen Übergänge (also die, die ohne Einwirkung von außen passieren), behandelt werden. Für ein Ensemble von  $N$  instabilen Zuständen, die mit einer Wahrscheinlichkeit  $\lambda$  zerfallen, ist die Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit gegeben durch

$$dN(t) = -\lambda N(t)dt$$

Diese Gleichung läßt sich leicht integrieren zu

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = N_0e^{-\lambda t}$$

$\lambda$  ( $[\lambda] = s^{-1}$ ) wird als Zerfallskonstante bezeichnet,  $\tau = \lambda^{-1}$  ist die Lebensdauer und  $t_{1/2} = \tau \ln 2$  die Halbwertszeit.

Der Nachweis von  $N(t)$  erfolgt normalerweise über die Messung der Zerfallsintensität  $I(t)$ .

$$I(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = N_0\lambda e^{-\lambda t} = I_0e^{-\lambda t}$$

Beim Zerfall eines Zustands handelt es sich um einen statistischen Prozess,  $\tau$  ist die mittlere Zeit, die bis zum Zerfall vergeht. Bei einer mittleren Anzahl von  $\bar{n}$

Zerfällen pro Zeitintervall ist die Wahrscheinlichkeit, im gleichen Intervall  $n$  Zerfälle zu beobachten, gegeben durch

$$P(n, \bar{n}) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

Dies ist die Poissonverteilung. Die Fluktuation (Standardabweichung) ist  $\sqrt{\bar{n}}$ .

## 1.3. Relativistische Kinematik

Eine Lorentztransformation in ein Bezugssystem, das sich mit Geschwindigkeit  $v$  gegenüber dem aktuellen bewegt, wird durch die Größe

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

charakterisiert.

Besonders nützlich für konkrete Berechnungen sind die sog. Vierervektoren: der Orts-Zeit-Vierervektor  $s$  und der Energie-Impuls-Vierervektor  $p$ . Wie der Name schon sagt, handelt es sich um ein vierkomponentiges Objekt:

$$s = (t, \vec{r}) = (t, x, y, z)$$

Will man nicht  $c = 1$  setzen, muß man die erste Komponente mit  $c$  multiplizieren, um die Einheiten richtig zu bekommen.

Lorentztransformation in  $z$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} t^* \\ x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zwei Effekte, die bei relativistischen Prozessen eine große Rolle spielen, sind die Längenkontraktion und die Zeitdilatation.

Der Einfachheit halber betrachten wir ein Bezugssystem, in dem ein bestimmtes Objekt in Ruhe ist. Längenkontraktion bedeutet, daß aus einem bewegten Bezugssystem die Länge des Gegenstands in Richtung der Bewegung verkürzt erscheint:

$$L_z^* = \frac{L_0}{\gamma}$$

Dabei ist  $L_0$  die Eigenlänge, also die Länge im ursprünglichen System. Hier sollte der Gegenstand ruhen, dieses Bezugssystem nennt man daher auch sein Ruhesystem. Ein Ereignis, das im ursprünglichen System eine bestimmte Zeit dauert, erscheint dagegen im bewegten Bezugssystem länger zu dauern:

$$\tau^* = \gamma\tau_0$$

## 1. Grundlagen

$\tau_0$  ist in dem System gemessen, in dem das Ereignis stattfindet; ein Teilchen zerfällt z.B. in seinem eigenen Ruhesystem.

Der zweite Vierervektor ist der Energie-Impuls-Vierervektor

$$p = (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z)$$

Hier muß man  $E$  durch  $c$  teilen, um die richtigen Einheiten zu bekommen.

Das Quadrat eines Vierervektors unterscheidet sich etwas vom Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^4$

$$s^2 = t^2 - \vec{r}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

Der große Vorteil der Vierervektoren ist die Invarianz ihres Quadrats unter Lorentztransformationen.

$$\begin{aligned} s^{*2} &= (\gamma t - \beta \gamma z, x, y, \gamma z - \beta \gamma t)^2 \\ &= \gamma^2 t^2 - 2\beta \gamma^2 t z + \beta^2 \gamma^2 z^2 - x^2 - y^2 - \gamma^2 z^2 + 2\beta \gamma^2 t z - \beta^2 \gamma^2 t^2 \\ &= \gamma^2 t^2 + (\gamma^2 - 1) z^2 - x^2 - y^2 - \gamma^2 z^2 - (\gamma^2 - 1) t^2 \quad [\text{da } \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 - 1] \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= s^2 \end{aligned}$$

$\sqrt{p^2}$  wird auch als die invariante Masse bezeichnet. In einem Prozess, an dem mehrere Teilchen beteiligt sind, ist  $\sqrt{(\sum_i p_i)^2}$  die Schwerpunktsenergie bzw. die invariante Masse des gesamten Systems (mit den entsprechenden  $c$ 's garniert).

Bis jetzt wurden nur Transformationen in  $z$ -Richtung betrachtet; für eine Transformation in eine beliebige Richtung zerlegt man den (3er) Ortsvektor bzw. Impulsvektor in eine Komponente parallel zur Richtung der Transformationsgeschwindigkeit und eine senkrecht dazu. Die senkrechte Komponente bleibt unverändert und die parallele transformiert sich wie die  $z$ -Komponente in den vorigen Beispielen.

Im Falle der Transformation in  $z$ -Richtung ist

$$p_z = p_{\parallel} \quad \text{und} \quad \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = p_{\perp}$$

$$\begin{aligned} E^* &= \gamma E - \beta \gamma p_{\parallel} \\ p_{\parallel}^* &= \gamma p_{\parallel} - \beta \gamma E \\ p_{\perp}^* &= p_{\perp} \end{aligned}$$

Einige Eigenschaften eines Teilchens mit Ruhemasse (-energie)  $m_0$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $\beta$  bewegt:

relativistische Masse	$m = \gamma m_0 = T + m_0$
kinetische Energie	$T = (\gamma - 1)m_0$
Impuls	$ \vec{p}  = \beta E$
Gesamtenergie	$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}$

Bei einem Experiment wird ein geladenes Pion mit Energie  $E_{lab} = 20 \text{ GeV}$  im Laborsystem erzeugt. Das Pion ist ein instabiles Teilchen mit einer Lebensdauer  $\tau_0 = 26 \text{ ns}$  im eigenen Ruhesystem, seine Ruhemasse ist  $m_{0\pi} = 139 \text{ MeV}$ . Man möchte wissen, welchen Bruchteil der erzeugten Pionen man mit einem 100 m entfernten Detektor nachweist.

Dazu schreibt man das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

um, so daß es von der zurückgelegten Strecke  $x = \beta t$  abhängt:

$$N(x) = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{\beta \gamma c \tau_0}\right)$$

$$\gamma = \frac{E_{lab}}{m_{0\pi}} = \frac{20 \text{ GeV}}{0,139 \text{ GeV}} = 143$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1$$

Der Bruchteil der beobachteten Pionen ist

$$\frac{N(100 \text{ m})}{N_0} = \exp\left(-\frac{100 \text{ m}}{143 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 26 \cdot 10^{-9} \text{ s}}\right) = 0.91$$

Das Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt eines Systems ruht, heißt aus nahe-  
liegenden Gründen Schwerpunktsystem (cm-System, cms). Der totale (3er) Impuls  
verschwindet im cms.

$$|\vec{p}_{cm}| = \gamma_{cm}(|\vec{p}| - \beta_{cm} E) \equiv 0$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems ist

$$\beta_{cm} = \frac{|\vec{p}|}{E}$$

$|\vec{p}|$  ist der Betrag des totalen (3er) Impulses im Laborsystem,  $E$  die gesamte Energie  
im Laborsystem.

$$E = \gamma_{cm} E_{cm}$$

Ein Teilchen mit Masse  $m_1$  habe den Impuls  $\vec{p}_1$  und die Energie  $E_1$  im Laborsystem  
und treffe auf ein stationäres Teilchen mit Ruhemasse  $m_2$ . Dann ist

## 1. Grundlagen

$$\beta_{cm} = \frac{|\vec{p}_1|}{E_1 + m_2} \quad \gamma_{cm} E_{cm} = E_1 + m_2$$

Unter Ausnutzung der Invarianz des Vierervektorquadrats kann man die Schwerpunktsenergie ausrechnen:

$$\begin{aligned} p^2 &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= (E_1 + m_2, \vec{p}_1)^2 \\ &= E_1^2 + 2E_1 m_2 + m_2^2 - \vec{p}_1^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2 \\ &= p_{cm}^2 = E_{cm}^2 - \vec{p}_{cm}^2 = E_{cm}^2 \end{aligned}$$

Bei Kollisionen zweier Kerne mit Massenzahl  $A$  ist also

$$E_{cm} = Am_N \sqrt{2 + 2\gamma_1} \quad m_N : \text{Nukleonmasse}$$

$ \vec{p}_1  = 14,6 \text{ GeV}$	$p + p$	$\gamma_1 = 15,6$	$E_{cm} = 5,4 \text{ GeV}$
$ \vec{p}_1  = 200 \text{ GeV}$	$p + p$	$\gamma_1 = 213,0$	$E_{cm} = 19,4 \text{ GeV}$
$200 \text{ GeV pro Nukleon}$	$^{197}\text{Au} + ^{197}\text{Au}$	$E_{cm} = 197 \cdot 19,4 \text{ GeV} = 3,8 \text{ TeV}$	

Ein anderes Beispiel sind kollidierende Strahlen:  $\vec{p}_1 \rightarrow \leftarrow \vec{p}_2$

Im symmetrischen Fall ( $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ ) ist das Laborsystem gleich dem Schwerpunktsystem.

$$E_{cm} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} = E_1 + E_2 = 2\gamma m_0$$

Für zwei Kerne mit Massenzahl  $A$  ist

$$E_{cm} = Am_N 2\gamma$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} &\frac{100 \text{ GeV}}{\text{Nukleon}} ^{197}\text{Au} + \frac{100 \text{ GeV}}{\text{Nukleon}} ^{197}\text{Au} \\ \Rightarrow E_{cm} &= 200 \cdot 197 \text{ GeV} = 39,4 \text{ TeV} \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Manchmal werden die Vierervektoren auch als  $(\vec{r}, it)$  und  $(\vec{p}, iE)$  definiert. Das Skalarprodukt wird dann wie im  $\mathbb{C}^4$  gebildet:  $s^2 = \vec{r}^2 + i^2 E^2 = \vec{r}^2 - E^2$ . Es unterscheidet sich also im Vorzeichen von der hier gebrauchten Definition, physikalisch macht es keinen Unterschied.

## 1.4. Kollisionen und Wirkungsquerschnitt

In diesem Kapitel soll der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  eingeführt und etwas damit handiert werden. Es handelt sich dabei um einen etwas sperrigen und wenig anschaulichen Begriff, der aber nichtsdestotrotz ein sehr nützliches Hilfsmittel darstellt, wenn man sich erst einmal an ihn gewöhnt hat. Als erste grobe Faustregel kann man sich vorstellen, daß der Wirkungsquerschnitt die „Stärke“ einer Reaktion angibt.

Wir betrachten nun ein Streuexperiment, bei dem ein konstanter Fluß  $\Phi$  an Teilchen der Sorte  $a$  auf ein Target der Dicke  $x$  aus Teilchen  $b$  trifft. Die Reaktionsrate  $W$  pro Targetteilchen ist dann

$$W = \Phi \cdot \sigma$$

Wenn  $n_b$  die Teilchendichte im Target ist, dann ist die Reaktionsrate auf das gesamte Target bezogen  $\Phi \sigma n_b x$ . Man könnte auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Strahlteilchen ein Targetteilchen trifft, angeben: Sie ist  $\sigma n_b x$ .

Bis jetzt ist keine Angabe darüber gemacht worden, um welche Art von Reaktion es sich eigentlich handeln soll. Das Praktische am Wirkungsquerschnitt ist auch gerade, daß er so allgemein ist. Trotzdem wollen wir uns jetzt die Prozesse im Falle einer Kollision etwas genauer ansehen. Im Wesentlichen gibt es drei verschiedene Reaktionen: die Absorption, die elastische und die inelastische Streuung. Jede dieser Möglichkeiten hat ihren eigenen Wirkungsquerschnitt, man spricht auch von den partiellen Wirkungsquerschnitten. Sie addieren sich zum Gesamt- oder totalen Wirkungsquerschnitt, der also mit der Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eine Reaktion stattfindet, zusammenhängt.

$$\sigma_{tot} = \sigma_e + \sigma_i + \sigma_A$$

Man kann sich dem Problem auch von einer etwas anderen Seite nähern und sagen, daß man sich für die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  eines Strahlteilchens im Target interessiert.

$$\lambda = \frac{1}{n_b \sigma}$$

Damit kann man dann auch eine Menge nützlicher Größen ausrechnen, z.B. :

Anzahl der Strahlteilchen:  $N(x) = N_0 \cdot \exp(-x/\lambda)$

Kollisionsrate:  $C(x) = -\frac{dN(x)}{dx} = N_0/\lambda \exp(-x/\lambda) = C_0 \exp(-x/\lambda)$

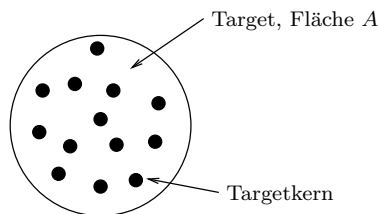
Kollisionsrate für  $x \ll \lambda$ :  $C(x) = C_0(1 - x/\lambda) = C_0(1 - n_b \sigma x)$

Wahrscheinlichkeit für Reaktion eines einfallenden Teilchens:  $1 - \exp(-x/\lambda)$

dasselbe für sehr dünnes Target:  $x/\lambda = n_b \sigma x$

Nun soll es zur Abwechslung einmal ganz konkret werden: Wir wollen uns mit dem geometrischen Wirkungsquerschnitt beschäftigen. Dazu stellt man sich ein Target der Fläche  $A$  vor, in dem  $n$  Targetteilchen (in der Regel Atomkerne) mit Radius  $r_t$

## 1. Grundlagen



**Abbildung 1.1.:** Veranschaulichung des geometrischen Wirkungsquerschnitts

enthalten sind (Abbildung 1.1). Der geometrische Wirkungsquerschnitt ist für ein punktförmiges Projektil einfach die Fläche, die von einem Targetkern abgedeckt wird, also  $\sigma_{\text{geo}} = \pi r_t^2$ . Die Wahrscheinlichkeit für die Kollision eines Strahlteilchens mit einem Targetkern ist durch den von Kernen abgedeckten Bruchteil der Targetfläche gegeben:

$$P = \frac{n\sigma_{\text{geo}}}{A}$$

Bei nicht-punktförmigen Projektilen muß man natürlich deren Fläche auch berücksichtigen. Dann wird  $\sigma_{\text{geo}} = \pi(r_t + r_p)^2$ .

Das Proton hat einen Radius von  $r_p = 0,8 \text{ fm}$ , damit wird der geometrische Wirkungsquerschnitt in einer Proton-Proton-Kollision  $\sigma_{\text{geo}}^{pp} = 8 \text{ fm}^2 = 8 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$ . Die übliche Einheit für den Wirkungsquerschnitt ist das barn:  $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Damit ist  $\sigma_{\text{geo}}^{pp} = 80 \text{ mb}$ , typische pp-Wirkungsquerschnitte liegen bei  $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_e + \sigma_i = 40 \text{ mb}$ , wobei auf den inelastischen Teil etwa 30 mb entfallen.

In manchen Fällen, insbesondere bei Streuprozessen, interessiert man sich nicht in erster Linie dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Wechselwirkung überhaupt stattfindet. Vielmehr möchte man wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen in ein bestimmtes Raumwinkelement  $d\Omega$  gestreut wird. Dann ist es zweckmäßig, den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu verwenden:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega}$$

oder

$$\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Man kann natürlich nicht nur bezüglich des Raumwinkels einen differentiellen Wirkungsquerschnitt angeben, manchmal werden auch andere Größen geeigneter sein.

## 1.5. Fermis Goldene Regel und Phasenraum

Es soll eine Situation betrachtet werden, in der sich der Hamiltonoperator in der Form  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}$  schreiben läßt und das Problem zu  $\mathbf{H}_0$  lösbar ist. Dabei



sei  $\delta\mathbf{H}$  klein gegen  $\mathbf{H}_0$ , d.h.  $|\langle\alpha|\delta\mathbf{H}|\beta\rangle| \ll |\langle\alpha|\mathbf{H}_0|\beta\rangle|$ .  $\delta\mathbf{H}$  kann beispielsweise eine Wechselwirkung beschreiben. Dann kann man mittels Störungstheorie nicht nur die Eigenzustände und Eigenwerte von  $\mathbf{H}$  ausrechnen, sondern auch die Übergangsrate  $w_{\alpha\beta}$  von einem Zustand  $i$  in einen Zustand  $f$ . Hierfür erhält man

$$w_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\delta\mathbf{H}|i\rangle|^2 \rho(E)$$

Diese Beziehung ist als Fermis Goldene Regel bekannt.  $\langle\alpha|\delta\mathbf{H}|\beta\rangle$  ist das Übergangsmatrixelement  $M_{if}$  ( $i$  steht für „initial“ und bezeichnet den Ausgangszustand,  $f$  steht für „final“ und bezeichnet den Endzustand).  $\rho(E)$  ist die Zustandsdichte, also die Anzahl der Zustände  $N$  pro Energieintervall  $E$ . Im Phasenraum  $(x,y,z,p_x,p_y,p_z)$  nimmt aufgrund der Unschärferelation jeder Zustand ein Volumen  $h^3 = (2\pi\hbar)^3$  ein. In drei Dimensionen ergibt sich mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung  $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$  für die 1 Teilchen-Zustandsdichte

$$N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int p^2 dp d\Omega = \frac{V4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int p^2(E) \frac{E}{p(E)c^2} dE$$

$$\Rightarrow \rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Ep}{c^2} = \frac{VpE}{2c^2\pi^2\hbar^3}$$

Für einen 2 Teilchen-Endzustand ergibt sich durch ähnliche Rechnung ( $p = p_1 + p_2$ ,  $E = E_1 + E_2$ ):

$$\rho_2(E) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \cdot \frac{E_1 E_2 p_1}{E_1 + E_2} \int d\Omega_1$$

## 1.6. Feynman-Diagramme

Die Feynman-Diagramme sind eine von R. P. Feynman entwickelte Methode zur Darstellung von Übergängen und Wechselwirkungen. Sie ermöglicht es nicht nur, die Prozesse übersichtlich und intuitiv darzustellen, sondern beinhaltet auch klare mathematische Regeln, mit deren Hilfe sich aus den Bildern die Wirkungsquerschnitte berechnen lassen.

Die Zeit-Achse zeigt entweder nach oben oder nach rechts. Die Bestandteile sind:

**reelle Teilchen:** Sie werden als Strahlen in positiver Zeitrichtung dargestellt, d.h. sie betreten das Bild (von  $t = -\infty$ ) und/oder verlassen es auch wieder (nach  $t = +\infty$ ). Ein Teilchen ist reell, wenn  $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$  ( $c = 1$ ) ist.

**Antiteilchen:** Sie werden durch Strahlen in negativer Zeitrichtung symbolisiert.

**virtuelle Teilchen:** Sie werden als Segmente, also Linien, die im Diagramm beginnen und enden, dargestellt. Für virtuelle Teilchen ist  $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 \neq m^2$ , dies ist aufgrund der Energie-Zeit-Unschärfe nur für bestimmte Zeit möglich. Insbesondere gilt für das Photon  $p_\gamma^2 = \omega^2 - \vec{K}^2 \neq 0$  wenn es virtuell, und  $p_\gamma^2 = 0$  wenn es reell ist.

## 1. Grundlagen

**Fermionen** (Teilchen mit halbzahligem Spin): Sie werden durch gerade Linien repräsentiert.

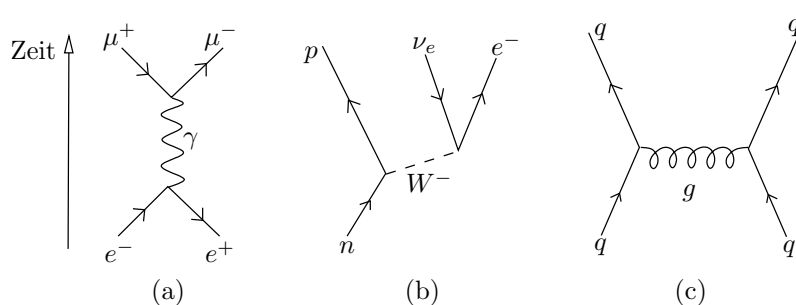
**Photon:** Wellenlinie

**W,Z-Bosonen:** gestrichelte Linie

**Gluonen:** spiralförmige Linie

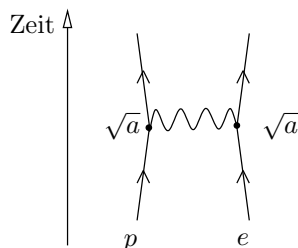
**Vertizes:** Dies sind Punkte, an denen drei oder mehr Linien zusammentreffen. Hier werden Teilchen emittiert oder absorbiert. An jedem Vertex sind Ladung, Energie und Impuls erhalten.

In Abbildung 1.2 sind drei Beispiele für Feynman-Diagramme gezeigt: In (a) vernichtet sich ein  $e^+e^-$ -Paar und es entsteht ein virtuelles Photon, das dann in ein Myon-Paar zerfällt. (b) zeigt den  $\beta$ -Zerfall des Neutrons und (c) die Wechselwirkung von zwei Quarks über den Austausch eines Gluons.



**Abbildung 1.2.:** Einige Beispiele für Feynman-Diagramme

Jedem Symbol in einem Diagramm entspricht ein Term im Matrixelement  $M$ . Die reellen Teilchen gehen mit ihrer Wellenfunktion ein, virtuelle Teilchen mit dem Propagator  $(1/(m^2 + q^2))$  für Bosonen), wobei  $m$  die relativistische Masse des Teilchens und  $q$  der Viererimpulsübertrag sind. Die Vertizes steuern zum Matrixelement die Wurzel aus der Kopplungskonstante bei.



**Abbildung 1.3.:** Elektron-Proton-Streuung

Die Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Feinstrukturkonstante  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ . Im Beispiel der Streuung von Elektronen und Protonen wie sie in Abbildung 1.3 zu sehen ist, ist also

$$M \sim \alpha \cdot \frac{1}{q^2} \quad \sigma \sim \frac{\alpha^2}{q^4}$$

Im wirklichen Leben treten natürlich bei der ep-Streuung auch noch andere Prozesse auf. Einige Beispiele hierfür sind in Abbildung 1.4 dargestellt, es gibt aber noch viel mehr. Diese Graphen beinhalten aber alle mehr als zwei Vertizes, d.h. sie repräsentieren höhere Ordnungen in  $\alpha$  und haben wegen  $\alpha < 1$  einen viel kleineren Wirkungsquerschnitt. Die Terme führender Ordnung sind also immer diejenigen mit der minimalen Potenz in  $\alpha$ , die höheren stellen nur kleine Korrekturen dar. Dies gilt natürlich analog auch für die schwache und starke Wechselwirkung. Ganz so einfach ist es dann aber leider doch nicht: Die Kopplungskonstanten sind in Wirklichkeit nicht konstant, sondern hängen von der Energieskala ab. Wenn man sich also in Bereichen befindet, in denen die Kopplungskonstante nicht klein ist, geben auch die Terme höherer Ordnung große Beiträge. Da man natürlich nicht alle möglichen Diagramme berücksichtigen kann, muß man sich grundsätzlich andere Methoden zur Behandlung solcher Probleme einfallen lassen.

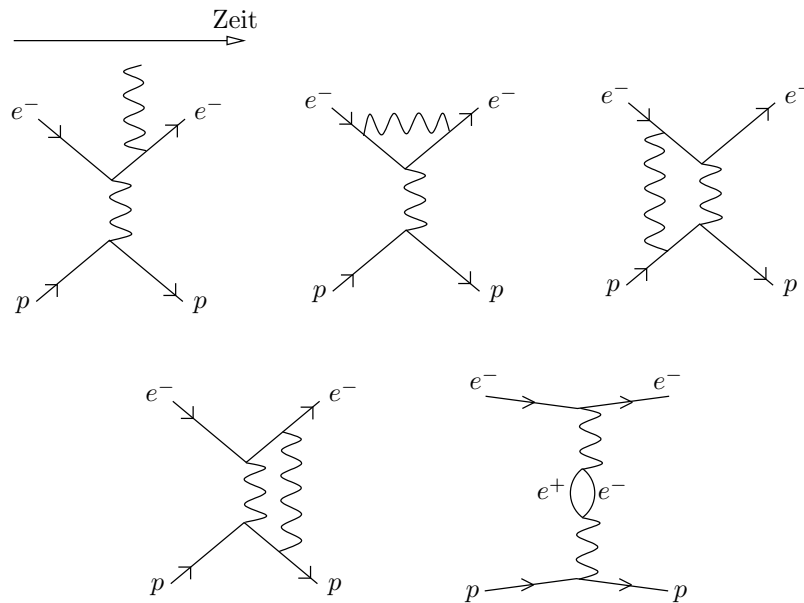


Abbildung 1.4.: Prozesse höherer Ordnung bei der Elektron-Proton-Streuung

## 2. Beschleuniger

Bevor es gleich darum gehen soll, wie man Teilchen am geschicktesten auf möglichst hohe Energien beschleunigt, soll noch kurz diskutiert werden, wozu man überhaupt so hohe Energien benötigt.

Der offensichtlichste Ansporn, zu immer höheren Teilchenenergien vorzudringen, ist die Produktion neuer und schwerer Teilchen. Es ist unmittelbar einsichtig, daß man zur Erzeugung von Teilchen zumindest deren Ruhemasse als Energie zur Verfügung stellen muß. Fermionen müssen als Teilchen-Antiteilchen-Paar produziert werden, hier braucht man also die doppelte Ruhemasse. Das schwerste heute bekannte Teilchen ist das bereits erwähnte top-Quark mit einer Masse von 175 GeV, es ist damit ungefähr 200mal schwerer als das Proton.

Ein nicht ganz so spektakulärer aber ebenso wichtiger Grund ist das Auflösungsvermögen in Streuexperimenten. Die Elementarteilchenphysik beschäftigt sich mit den elementaren Bausteinen, aus denen unsere Welt aufgebaut ist. Welche Teilchen als elementar, d.h. ohne Substruktur (punktförmig), angesehen werden müssen, ist aber eine Frage der Auflösung. Diese wird ähnlich wie in der Optik durch die Wellenlänge, nämlich die de Broglie-Wellenlänge der Strahlteilchen, limitiert. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts erreichte man mit den damaligen Beschleunigern nur Energien von einigen MeV - das reichte nicht aus, um die Struktur der Nucleonen (Protonen und Neutronen) aufzulösen. Heute wird eine Auflösung von  $10^{-16}$  m erreicht, das ist ein Zehntel des Protonradius. Nach heutigem Kenntnisstand sind die Leptonen und die Quarks die elementaren Konstituenten der Materie. Dabei können wir nie ganz ausschließen, daß auch sie eine innere Struktur haben.

### 2.1. Elektrostatische Beschleuniger

Bei elektrostatischen Beschleunigern werden Teilchen beschleunigt, indem sie eine Potentialdifferenz  $\Delta V$  durchqueren und dabei die kinetische Energie  $T = q\Delta V$  gewinnen. Der gebräuchlichste Typ ist der van-de-Graaff-Beschleuniger (Abbildung 2.1). Er besteht im Wesentlichen aus einer großen leitenden Kugel, dem sog. Terminal, die sich in einem auf Erdpotential gelegten Tank befindet. Das Terminal wird über ein isolierendes Förderband oder eine Kette positiv geladen. Die Ladungen werden durch eine Corona-Entladung auf das Band gebracht und am Terminal mechanisch abgestreift. Der Tank ist mit einem Isoliertgas gefüllt um frühzeitiges Durchschlagen der Spannung zu verhindern. Die so erreichten Potentialdifferenzen liegen im Bereich von 10-20 MV. Die zu beschleunigenden Teilchen werden in einer Ionenquelle auf Terminalpotential erzeugt und passieren die Potentialdifferenz in

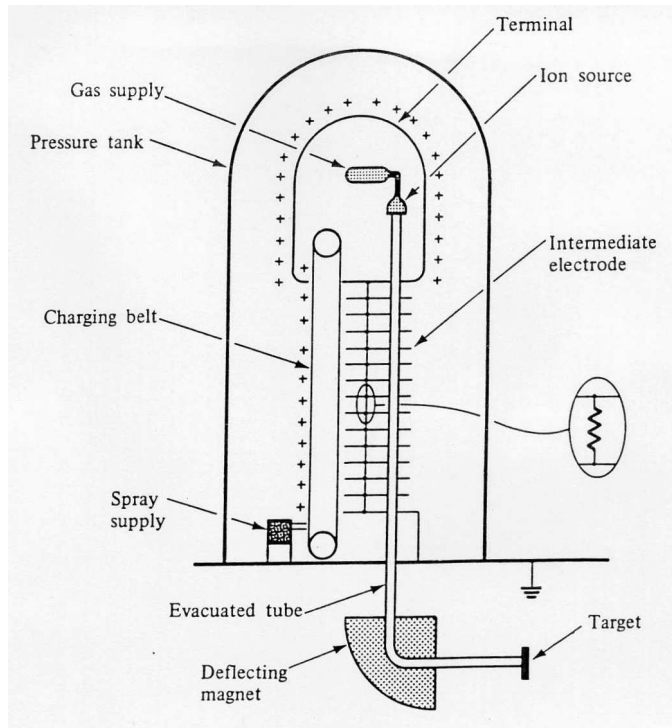


Abbildung 2.1.: Aufbau eines van-de-Graaff-Beschleunigers [1]

einem evakuierten Strahlrohr. Mehrfach positiv geladene Ionen werden natürlich auch stärker beschleunigt.

In einem Tandem-van-de-Graaff-Beschleuniger (Abbildung 2.2) wird die Potentialdifferenz zweimal genutzt, indem erst negative Ionen von Erddpotential zum Terminal hin beschleunigt werden, dort durch eine dünne Folie fliegen und dabei Elektronen verlieren, und dann als nun positive Ionen die Potentialdifferenz noch einmal durchlaufen. Die so erreichten Teilchenenergien sind natürlich doppelt so hoch, nur ist das Erzeugen negativer Ionen auch nicht so einfach, da die zusätzlichen Elektronen nur noch sehr schwach gebunden sind.

Mit einem van-de-Graaff- oder Tandem-van-de-Graaff-Beschleuniger lassen sich Protonen und leichte Kerne auf bis zu 12 MeV pro Nukleon beschleunigen. Limitiert wird die Teilchenenergie durch die erreichbaren Hochspannungen. Dabei sind kontinuierliche Ströme bis  $100 \mu\text{A}$  möglich. Ein weiterer Nachteil ist der hohe Materialverschleiß an den bewegten Teilen.

## 2. Beschleuniger

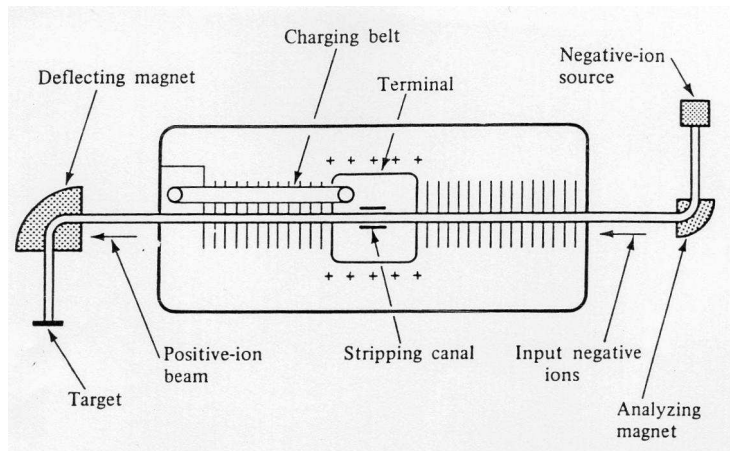


Abbildung 2.2.: Aufbau eines Tandem-van-de-Graaff-Beschleunigers [1]

## 2.2. Linearbeschleuniger

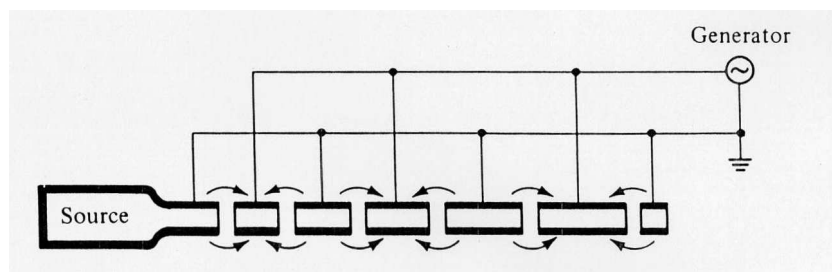


Abbildung 2.3.: Aufbau eines Lineareschleunigers, die Pfeile geben die Richtung des elektrischen Felds zu einem gegebenen Zeitpunkt an [1]

In einem Linearbeschleuniger (Abbildung 2.3) werden Teilchen sukzessiv beschleunigt: Sie durchfliegen eine Reihe von Driftröhren, von denen immer zwei benachbarte auf entgegengesetztes Potential gelegt sind. Das Innere der Röhren ist feldfrei, in den Lücken werden die Teilchen durch das elektrische Feld beschleunigt. Während das Teilchen die nächste Röhre durchfliegt, muß die Polarität geändert werden, damit es nicht in der nächsten Lücke wieder gebremst wird. Man braucht also einen Hochspannungsgenerator, der eine hochfrequente Wechselspannung liefert. Dieses Problem wird mit Hilfe von Resonatoren gelöst, in denen bei der Resonanzfrequenz ein Hertzscher Dipol angeregt wird. So erhält man eine Hochspannung der Form  $V = V_0 \cos(\omega t)$ . Da die Frequenz fest ist, muß die Länge der Driftröhren an die zunehmende Geschwindigkeit der Teilchen angepaßt werden: Die nach  $n$  Lücken aufgenommene Energie ist

$$E_{kin} = nqV_0$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens ist dann

$$v_n = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E_{kin} + m_0 c^2} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{nqV_0 + m_0 c^2} \right)^2}$$

Die zum Durchqueren der Röhre benötigte Zeit muß die halbe Periode des Wechselfelds sein:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2\nu} = \frac{\pi}{\omega}$$

Die Länge der  $n$ -ten Röhre ergibt sich zu

$$l_n = v_n \cdot t = \frac{c \cdot \pi}{\omega} \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{nqV_0 + m_0 c^2} \right)^2}$$

Das führt aber dazu, daß man nicht Teilchen verschiedener Masse in demselben Beschleuniger beschleunigen kann. Die relativistische Massenzunahme bei hohen Energien bereitet hier kein Problem, man kann die Röhrenlängen entsprechend anpassen. Die erreichten Teilchenenergien liegen bei etwa 20 GeV für Elektronen bzw. 10 MeV pro Nukleon für schwere Ionen. Die Endenergie ist durch die Zahl der Röhren und die Spannung gegeben.

Bei Linearbeschleunigern kommen die Teilchen in Päckchen in Phase mit der Hochspannung an. Ein Nachteil sind die vielen Beschleunigungsstrukturen, sie machen Linearbeschleuniger sehr teuer.

## 2.3. Betatron

Das Betatron (Abbildung 2.4) eignet sich nur zur Beschleunigung von Elektronen. Die Bahn ist kreisförmig mit einem konstanten Radius  $r_0$ . Die Elektronen werden durch ein Magnetfeld auf ihrer Bahn gehalten.

$$p = eB(r_0)r_0 \quad (2.1)$$

Zur Beschleunigung der Elektronen wird die Magnetfeldstärke erhöht. Dies hat zwei Effekte: Zum einen erhöht sich der Fluß  $\phi$  durch die von der Elektronenbahn eingeschlossene Fläche, es wird also ein elektrisches Feld tangential zur Bahn induziert, das die Elektronen beschleunigt. Andererseits nimmt die auf die Elektronen wirkende Lorentzkraft zu, während gleichzeitig auch deren Impuls anwächst. Die Erhöhung der Feldstärke muß so erfolgen, daß der Bahnradius konstant bleibt.

Die induzierte Spannung ist

$$U_{ind} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\pi r_0 E = -\frac{d\phi}{dt} = \pi r_0^2 \frac{d\langle B \rangle}{dt}$$

$\langle B \rangle$  ist das über die Fläche gemittelte Magnetfeld. Die daraus resultierende Kraft, die die Elektronen beschleunigt, ist



## 2. Beschleuniger

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{er_0}{2} \frac{d\langle B \rangle}{dt}$$

$$\Rightarrow p = \frac{er_0}{2} \langle B \rangle$$

Zusammen mit Gleichung (2.1) folgt die Betatronbedingung

$$B(r_0) = \frac{1}{2} \langle B \rangle$$

Auf diese Art und Weise lassen sich Elektronen bis auf Energien von 300 MeV beschleunigen, begrenzt werden sie durch die erreichbaren Magnetfeldstärken. Die häufigste Anwendung ist auf dem Gebiet der Medizin: Die Elektronen werden zur Erzeugung von Röntgenstrahlung auf ein Target geschossen.

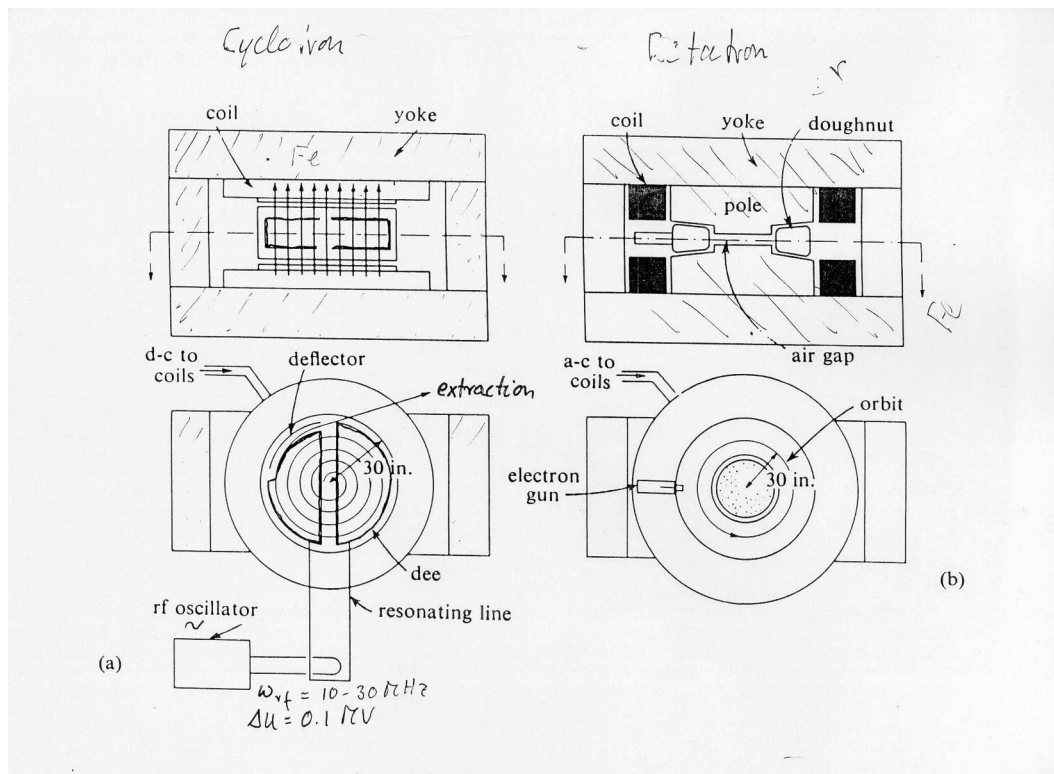


Abbildung 2.4.: Aufbau eines Zyklotrons(a) und eines Betatrons(b) [2]

## 2.4. Zyklotron

Ein Zyklotron (Abbildung 2.4) besteht aus einer flachen, zylindrischen Kammer, die in zwei D-förmige Hälften geteilt ist und sich in einem Magnetfeld senkrecht



zur Kammer befindet. Zwischen den beiden Hälften ist eine Hochfrequenzspannung angelegt. Die Beschleunigung erfolgt ähnlich wie beim Linearbeschleuniger durch das elektrische Feld in der Lücke. Die Ionen werden von einer Ionenquelle im Zentrum der Kammer erzeugt und vom Magnetfeld auf eine Kreisbahn gezwungen. Der Radius dieser Bahn ist gegeben durch

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Beim Passieren der Lücke werden die Teilchen beschleunigt und da das Magnetfeld konstant ist, vergrößert sich der Bahnradius. Die für einen halben Umlauf (von Lücke bis Lücke) benötigte Zeit ist

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{qB}$$

Daraus folgt die benötigte Frequenz der Wechselspannung

$$\omega_{HF} = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

Wenn die Teilchenbahn schließlich den Radius  $R$  der Kammer erreicht hat und die Teilchen extrahiert werden, haben sie die kinetische Energie

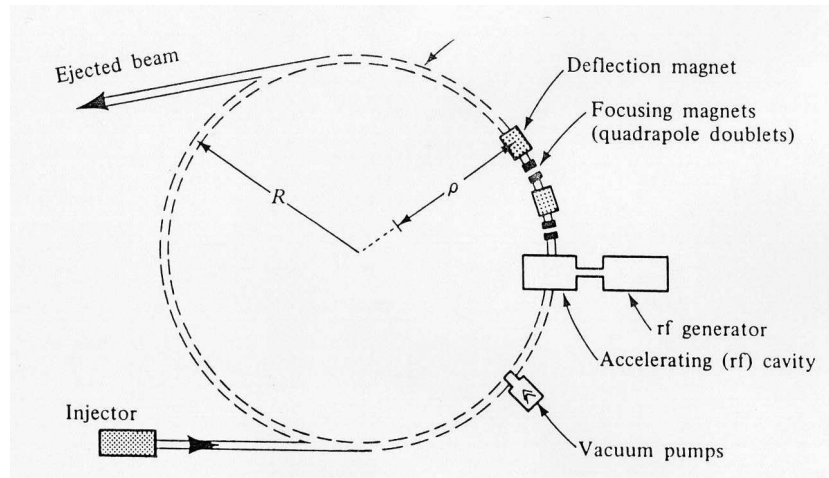
$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{q^2 R^2 B^2}{2m}$$

Dies funktioniert mit konstantem  $\omega_{HF}$  und  $B$  nur für nichtrelativistische Teilchen, bei z.B. Protonen also bis zu einer Energie von etwa 30 MeV. Bei relativistischen Teilchen muß man entweder die Frequenz anpassen (Synchrozyklotron) oder das Magnetfeld (Isochronzyklotron). Der Nachteil des Synchrozyklotrons ist, daß man immer das eine Teilchenpaket das Zyklotron verlassen haben muß, bevor man das nächste beschleunigen kann. Mit dem Isozyklotron erreicht man dagegen sehr hohe Teilchenströme. Die so erreichten Protonenergien liegen bei 700 MeV.

## 2.5. Synchrotron

Die meisten modernen Beschleuniger sind Synchrotrons (Abbildung 2.5), bei denen man mit vergleichsweise billigen Anlagen auf hohe Energien kommt. Beim Synchrotron ist der Bahnradius konstant, entlang des Strahlrohrs sind HF-Resonatoren zur Beschleunigung, Dipolmagnete zur Ablenkung der Teilchen auf die gewünschte Bahn und Quadrupollinsen zur Fokussierung angebracht. Die Frequenz zur Beschleunigung und das Magnetfeld, das die Teilchen auf der Sollbahn hält, werden synchron hochgefahren. Damit ist auch klar, daß man keinen kontinuierlichen Strahl erzeugen kann. Die Endenergie wird durch den Bahndurchmesser und die erreichbaren Magnetfelder begrenzt, Elektronen können auf bis zu 100 GeV (LEP

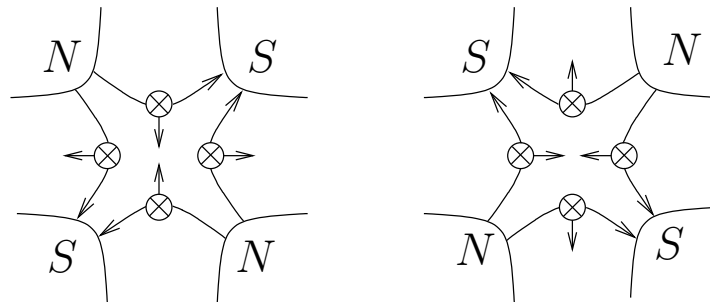
## 2. Beschleuniger



**Abbildung 2.5.:** Aufbau eines Synchrotrons, es sind nur einige der sich wiederholenden Elemente gezeigt [1]

II), Protonen auf 1 TeV (Tevatron I) beschleunigt werden. Bei Elektronen ist die erreichbare Energie grundsätzlich durch die Strahlungsverluste durch Synchrotronstrahlung (Kapitel 2.6) begrenzt.

Bei den extrem langen Strecken, die die Teilchen während der Beschleunigung zurücklegen (etwa  $10^5$  Umläufe), werden Fragen der Stabilität und Fokussierung interessant.



**Abbildung 2.6.:** Funktionsweise einer Quadrupollinse

Zur Fokussierung werden Quadrupolfelder verwendet. Das Prinzip ist in Abbildung 2.6 skizziert. Das eine Feld bewirkt eine Fokussierung in der einen Richtung und eine Defokussierung in der anderen, beim zweiten ist es genau umgekehrt. Bringt man die beiden hintereinander an, so erreicht man damit netto eine Fokussierung in beiden Richtungen, da die Feldstärke nach außen stark zunimmt. So werden weiter außen fliegende Teilchen stärker abgelenkt. Der Mittelpunkt, also die optimale Strahlposition, ist feldfrei.

Die Teilchen fliegen nicht auf idealen Kreisbahnen, sondern oszillieren in horizontaler wie in vertikaler Richtung um die optimale Bahn. Dieser Effekt wird Betatronoszillation genannt und entsteht durch die Fokussierung.

Es gibt außerdem noch longitudinale Oszillationen, die sog. Synchrotronoszillationen. Sie entstehen, wenn Teilchen etwas zu spät an den Resonatoren ankommen. Sie erfahren dann nicht mehr die volle Beschleunigung und gehen deshalb auf eine Bahn mit kleinerem Radius. Beim nächsten Resonator sind sie dann zu früh und werden stärker beschleunigt als die Teilchen mit optimaler Bahn. So vergrößert sich der Bahnradius, das nächste Mal sind sie wieder zu spät usw. Der Strahl als solcher ist aber stabil.

Für bestimmte Experimente (z.B. zur Erzeugung neuer Teilchen) ist es zweckmäßig, Teilchen und (Anti)teilchen im selben Ring (in dem sie gegenläufig umlaufen) zu beschleunigen und sie dann kollidieren zu lassen. Der Vorteil besteht darin, daß die zur Verfügung stehende Schwerpunktsenergie proportional zur Strahlenergie und nicht wie bei Experimenten mit einem festen Target nur zur Wurzel aus der Strahlenergie ist. Der Nachteil ist, daß die Wechselwirkungsrate sehr klein ist. Dies muß kompensiert werden, indem man viele Teilchen kollidieren läßt. Dazu bietet es sich an, die beschleunigten Teilchen in einem Speicherring zu speichern. Hier werden sie nicht weiter beschleunigt, nur die Verluste durch Synchrotronstrahlung werden ausgeglichen. In den Speicherring können dann immer neue Teilchenpakete aus dem Beschleuniger eingespeist werden, dadurch lassen sich wesentlich höhere Stromdichten erreichen.

## 2.6. Synchrotronstrahlung

Geladene Teilchen, die mit einer Geschwindigkeit  $v = \beta c$  auf einer Kreisbahn mit Radius  $R$  umlaufen, emittieren Bremsstrahlung. Für die abgestrahlte Leistung gilt

$$P = \frac{2e^2 c}{3R^2} \frac{\beta^4}{(1 - \beta^2)^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{2e^2 c}{3R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4$$

Man sieht, daß Teilchen mit kleiner Ruhemasse wie Elektronen erheblich mehr Leistung abstrahlen als schwerere. Der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung ist für Elektronen gegeben durch

$$E_{\text{Strahl}} = 8,85 \cdot 10^{-5} \frac{E^4 [\text{GeV}^4]}{R [\text{km}]} \left[ \frac{\text{MeV}}{\text{Umlauf}} \right]$$

## 2. Beschleuniger

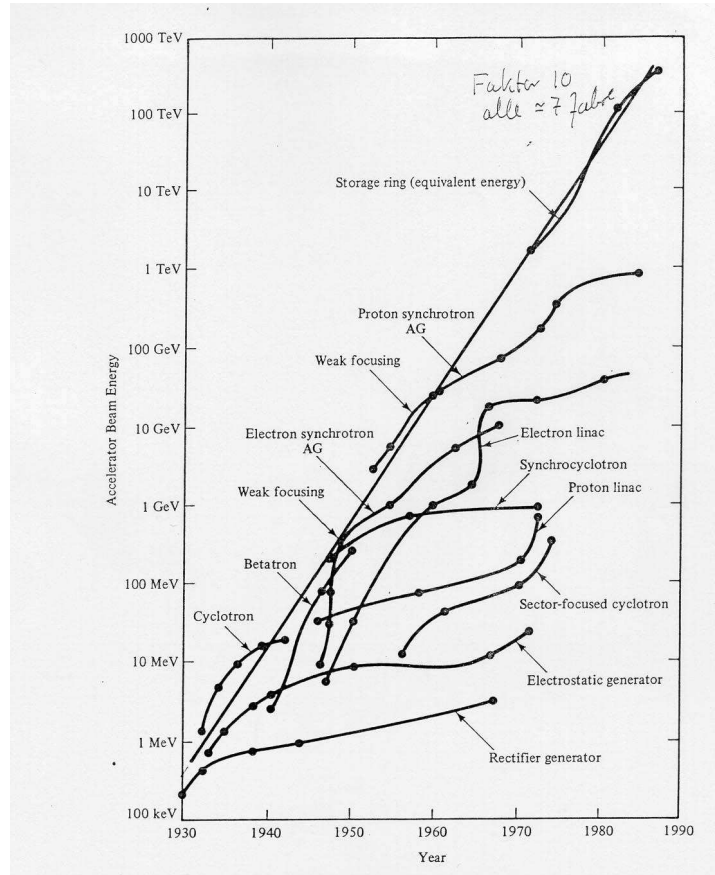


Abbildung 2.7.: Historische Entwicklung im Beschleunigerbau [1]

# 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie

Strahlung wird in Materie auf die eine oder andere Art ihre Energie verlieren. Wie dieser Vorgang abläuft ist dabei für die verschiedenen Arten von Strahlung sehr unterschiedlich. Dies ist natürlich von erheblichem Interesse, da ein Teilchendetektor über eben diesen Energieverlust die Art und Energie der einfallenden Teilchen bestimmen soll. Möglichst genaue Kenntnis der Vorgänge im Innern des Detektors ist daher unbedingt notwendig.

## 3.1. Protonen und schwere Teilchen

### Niedrige Energien

Bei niedrigen Energien (einige 100 MeV) verlieren Protonen und schwere Teilchen (Kerne) ihre Energie im Wesentlichen durch elektromagnetische Wechselwirkung, insbesondere Ionisation.

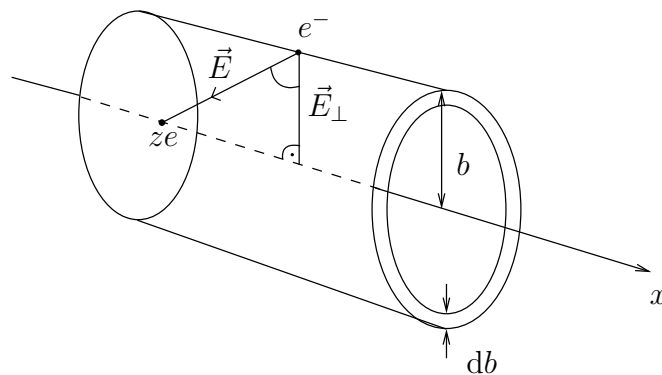


Abbildung 3.1.: Zur Herleitung der Bethe-Bloch-Formel

Der Energieverlust pro Strecke durch Ionisation wird durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben. Zur Herleitung betrachtet man ein Teilchen der Ladung  $ze$ , das mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung fliegt (Abbildung 3.1). Der transversale Impulsübertrag auf ein Elektron ist dann

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} eE_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} eE_{\perp} \frac{dx}{v}$$

### 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie

Dieses Integral kann als Flächenintegral über die Oberfläche eines Zylinders mit Radius  $b$  aufgefaßt werden. Da sich die Beiträge der Stirnflächen des Zylinders aufheben, kann der Gaußsche Satz angewendet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} eE_{\perp} \frac{dx}{v} = \frac{e}{v2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot \underbrace{\hat{e}_r 2\pi b dx}_{d\vec{a}} = \frac{e}{v2\pi b} \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV =$$

$$\frac{e}{v2\pi b} \int_V 4\pi\rho dV = \frac{e}{v2\pi b} 4\pi ze = \frac{2ze^2}{vb}$$

Der Energieübertrag auf ein Elektron ist dann

$$\Delta E = \frac{(\Delta p_{\perp})^2}{2m_e} = \frac{2}{m_e} \left( \frac{ze^2}{bv} \right)^2$$

Die Anzahl der Elektronen pro Weglänge  $dx$  und Intervall  $b$  bis  $b + db$  ist bei einer Elektronendichte  $n_e$  gegeben durch  $N_e = n_e 2\pi b db dx$ . Damit kann man den Energieverlust pro Strecke berechnen:

$$\frac{dE}{dx} = -n_e 2\pi \int_{b_{min}}^{b_{max}} b \Delta E db = -\frac{n_e 4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = -\frac{n_e 4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right)$$

Der minimale Stoßparameter kann mit der de Broglie-Wellenlänge abgeschätzt werden:  $b_{min} \approx \hbar/p = \hbar/(\gamma m_e v)$ .

Die Bindung des Elektrons im Atom kann durch die Frequenz seiner Bewegung  $\langle \nu \rangle$  charakterisiert werden. Das vorbeifliegende Teilchen stört das Atom durch sein elektromagnetisches Feld für eine Zeit  $\Delta t \approx b/\gamma v$ . Ist diese Zeit lang gegen die Periode des Atoms, so wird dieses sich langsam strecken und dann wieder in seinen Ausgangszustand zurückkehren, ohne daß nennenswert Energie übertragen wird. Im umgekehrten Fall, wenn  $\Delta t$  kurz gegen die charakteristische Frequenz ist, kann das Elektron als frei betrachtet werden. Die Grenze liegt bei  $\langle \nu \rangle \Delta t \approx 1$ , dies führt auf einen maximalen Stoßparameter  $b_{max} = v\gamma/\langle \nu \rangle$ .

Damit ergibt sich für den Energieverlust

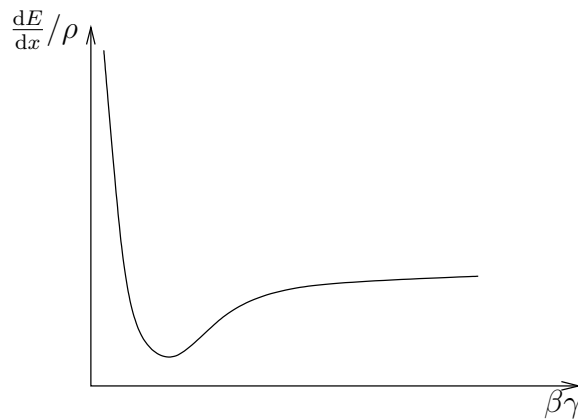
$$-\frac{dE}{dx} = \frac{n_e 4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \ln \left( \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) \quad \text{mit } I = \hbar \langle \nu \rangle$$

Die Größe  $I$  ist ein über alle Elektronen gemittelttes effektives Ionisationspotential. Es hat näherungsweise den Wert  $I = 10Z$  eV. Exakte quantenmechanische Behandlung des Problems führt auf die Bethe-Bloch-Formel, die auch für relativistische Teilchen Gültigkeit hat. Sie lautet

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{n_e 4\pi z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 \right]$$

Die Elektronendichte ist:  $n_e = \rho N_A Z/A$

Da  $Z/A$  für die meisten Elemente ungefähr konstant ist ( $Z/A \simeq 0,5$ ) hängt der Energieverlust pro Strecke im wesentlichen von der Dichte des Materials ab. Von der Masse des einfallenden Teilchens ist er gar nicht abhängig. Für nicht-relativistische Energien fällt  $(dE/dx)/\rho$  wie  $1/v^2$  ab und erreicht bei  $\beta\gamma \simeq 3 - 3,5$  ein Minimum (Abbildung 3.2). Der Energieverlust eines minimal ionisierenden Teilchens beträgt etwa  $(dE/dx)/\rho \simeq 1 - 1,5 \text{ MeVcm}^2/\text{g}$ . Danach steigt er aufgrund der Lorentzkontraktion der elektromagnetischen Felder logarithmisch mit  $\gamma$  an. Der Effekt wird aber durch die Polarisation des Mediums geschwächt. Sie wird besonders in dichten Medien wichtig, wenn der maximale Stoßparameter deutlich größer als der mittlere Abstand zwischen den Atomen ist. Dann schwächen die zwischen dem Teilchen und dem betrachteten Elektron liegenden Atome durch Polarisation das elektrische Feld des Teilchens erheblich. Dies resultiert darin, daß in Flüssigkeiten und Feststoffen  $(dE/dx)/\rho$  nur um 10%, in Gasen um 50% gegenüber dem Minimum steigt.



**Abbildung 3.2.:** Schematischer Verlauf des Energieverlusts

Der Energieverlust durch Ionisation ist ein statistischer Prozess, bei dem die Teilchen viele Wechselwirkungen machen, bevor sie ihre ganze Energie abgegeben haben und zur Ruhe kommen. Die Formel von Bethe und Bloch beschreibt den mittleren Energieverlust. Die Energie von ursprünglich monoenergetischen Teilchen wird nach Durchqueren einer Schicht der Dicke  $\Delta x$  bei hinreichend vielen Stößen eine Gauß-Verteilung um einen Mittelwert aufweisen. Dies gilt natürlich in gleicher Weise für die in der Schicht deponierte Energie. Die Varianz ist nach Bohr

$$\sigma^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = 4\pi n_e z^2 e^4 \Delta x$$

Wenn man sich die Verteilung des Energieübertrags (Bild 3.3) ansieht, fällt der „Schwanz“ zu hohen Energien auf (Landau-Verteilung). Er entsteht durch Elektronen, die viel Energie durch elastische Streuung erhalten haben („ $\delta$ -Elektronen“). Sie haben genug Energie, um ihrerseits neue Elektron-Ion-Paare zu erzeugen.

Aufgrund ihrer großen Masse werden die Protonen und Kerne nur in kleine Winkel gestreut, ihr Weg durch das Material ist also praktisch gradlinig.

### 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie

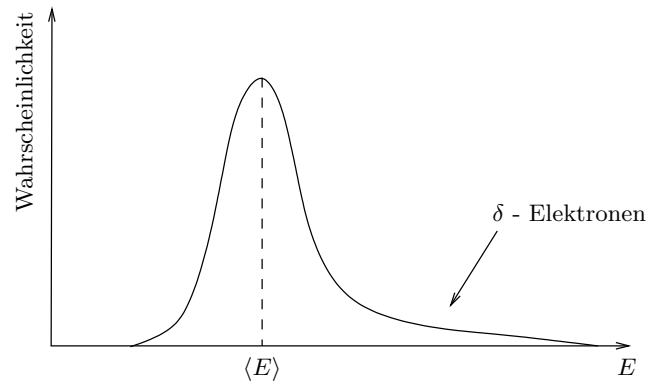
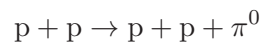


Abbildung 3.3.: Verteilung des Energieübertrags in einer Schicht der Dicke  $\Delta x$

### Hohe Energien

Sobald die Produktion von Pionen energetisch möglich wird, dominiert bei Hadronen die starke Wechselwirkung den Energieverlust. Die Massen der Pionen sind  $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}$  bzw.  $m_{\pi^\pm} = 139 \text{ MeV}$ .

Für die Erzeugung eines Pions in der Reaktion



ist eine Schwerpunktsenergie von

$$E_{CM} \geq 2m_p + m_{\pi^0}$$

nötig. Im Fall einer Kollision mit einem stationären Target bedeutet dies, daß das einfallende Proton eine kinetische Energie von mindestens  $280 \text{ MeV}$  haben muß, was einem Lorentzfaktor von  $\gamma > 1,30$  entspricht.

Energetische Pionen können selbst wieder in starken Wechselwirkungen weitere Teilchen erzeugen und es kommt zur Bildung eines sog. hadronischen Schauers. Dieser besteht im Wesentlichen aus Protonen, Neutronen und Pionen. Die Strecke, während der typischerweise eine starke Wechselwirkung stattfindet, ist

$$\lambda_{int} = \frac{1}{\rho_A \sigma}$$

wobei  $\rho_A$  die Teilchendichte des Targets ist. Die Ausdehnung eines hadronischen Schauers liegt im Mittel bei  $4\lambda_{int}$ .

Ein Proton treffe auf ein Kohlenstofftarget.

$$\rho_C = 2,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \rightarrow \rho_A = \frac{\rho_C N_A}{A} = 1,15 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{cm}^3}$$

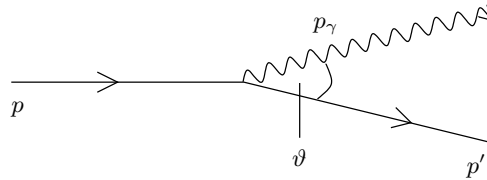


Der Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung ist  $\sigma_{inel} = 230 \text{ mb}$ . Damit ergibt sich

$$\lambda_{int} = 3,8 \text{ cm}$$

## 3.2. Čerenkov-Strahlung

Ein geladenes Teilchen der Masse  $M$  und Geschwindigkeit  $v$  propagiere durch ein Medium mit Dielektrizitätskonstante  $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$ . Es soll die Abstrahlung eines reellen Photons (Bild 3.4) untersucht werden.



$$\begin{aligned} p &= (E, \vec{p}) \\ p' &= (E', \vec{p}') \\ p_\gamma &= (\omega, \vec{K}) \end{aligned}$$

**Abbildung 3.4.:** Abstrahlung eines reellen Photons durch ein geladenes Teilchen

Unter der Annahme, daß  $\omega \ll \gamma M = E$  ist, gilt

$$\omega = \vec{v} \cdot \vec{K} = vK \cos \vartheta_c$$

Außerdem ist in Medien mit Lichtgeschwindigkeit  $c_m$

$$\frac{\omega^2}{K^2} = c_m^2 = \frac{c^2}{\epsilon_1} = \frac{c^2}{n^2}$$

Die Bedingung für die Emission eines reellen Photons ist, daß  $\cos \vartheta_c < 1$  ist, also

$$\cos \vartheta_c = \frac{\omega}{vK} = \frac{1}{n\beta} < 1 \quad \Rightarrow \quad \beta > \frac{1}{n}$$

Čerenkov-Strahlung tritt also dann auf, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens größer als die Lichtgeschwindigkeit in dem betreffenden Material ist. In dem Bereich von  $\omega$ , in dem diese Bedingung erfüllt ist ( $n = \sqrt{\epsilon(\omega)}$  hängt von  $\omega$  ab), ist das Spektrum kontinuierlich. Die Anzahl der Photonen  $dN$  ist proportional zu  $d\omega = d\lambda/\lambda^2$ , es dominieren also kleine Wellenlängen (blau).

Die Anzahl der Photonen pro Energieintervall ist durch

$$\frac{dN}{dE} = \frac{1}{\hbar} \frac{dN}{d\omega} = \frac{\alpha}{\hbar c} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) L$$

### 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie

gegeben, wobei  $L$  die Weglänge ist. Die Photonenergie liegt typischerweise bei 3 eV, damit ergibt sich für den Energieverlust

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \approx 0,5 \frac{\text{keVcm}^2}{\text{g}}$$

Er fällt also deutlich geringer aus als bei Ionisation (dort liegt er im Bereich von  $\text{MeVcm}^2/\text{g}$ ).

Die Čerenkov-Strahlung eignet sich also gut zum Nachweis insbesondere leichter Teilchen.

## 3.3. Elektronen

### Ionisation

Bei niedrigen Energien herrscht wieder Energieverlust durch Ionisation vor. Die Beschreibung ist analog zur Bethe-Bloch-Formel, allerdings mit Korrekturen für identische Teilchen. Im Gegensatz zu schweren Teilchen ist der Weg eines Elektrons durch Streuung in große Winkel charakterisiert.

### Bremsstrahlung

Eine quantitative Behandlung der Bremsstrahlung ist recht aufwendig. Ein interessanter Ansatz ist die Beschreibung als Streuung von virtuellen Quanten. Hierbei wird ausgenutzt, daß das Feld einer schnellen Ladung einem Strahlungspuls sehr ähnlich ist, was die Rechnungen vereinfacht.

Im Ruhesystem des Elektrons bewegt sich der Kern; das Elektron wird sozusagen von einem Strahlungspuls getroffen, den man sich als aus virtuellen Photonen bestehend denken kann. Quanten, die vom Elektron gestreut werden, erscheinen als reelle Bremsstrahlungsquanten.

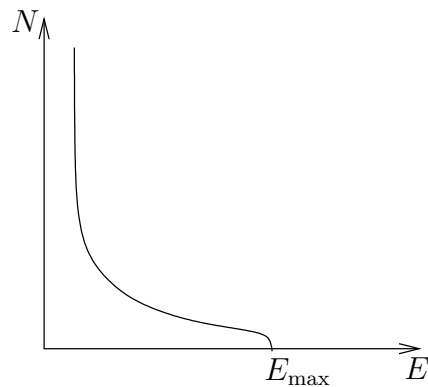


Abbildung 3.5.: Schematisiertes Energiespektrum der Bremsstrahlung

Nach Fermi fällt das Energiespektrum wie  $1/E$  ab, hat aber einen „cut-off“ bei  $E_{max} = m_e c^2 (\gamma - 1)$  (Abbildung 3.5). Die Anzahl der abgestrahlten Photonen ist ausserdem proportional zu  $Z^2$ :

$$N(\omega)d\omega \propto Z^2 \frac{d\omega}{\omega}$$

Für den Energieverlust durch Bremsstrahlung gilt

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{x_0}$$

wobei  $x_0$  die Strecke ist, nach der die Energie auf einen Bruchteil  $1/e$  abgesunken ist. Diese Größe wird auch als Strahlungslänge bezeichnet. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right)$$

Für das Verhältnis  $R$  von Energieverlust durch Bremsstrahlung zu dem durch Ionisation gilt

$$R = \frac{dE/dx_{\text{Brems}}}{dE/dx_{\text{Ion}}} = \frac{ZE[\text{MeV}]}{580}$$

### 3.4. Photonen

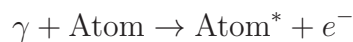
Die Abschwächung elektromagnetischer Strahlung in Materie ist exponentiell:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad \mu = \sigma \frac{N_A}{A} \rho$$

wobei  $I$  die Intensität,  $x$  die im Medium zurückgelegte Strecke und  $\mu$  der effektive Absorptionskoeffizient sind ( $\sigma$ : Wirkungsquerschnitt,  $\rho$ : Massendichte,  $A$ : Atommasse). Anstelle von  $x$  wird auch oft die Massenbelegung  $\tilde{x} = x\rho$  verwendet, was dann zum Massenabsorptionskoeffizienten  $\tilde{\mu} = \sigma N_A/A$  [ $\text{cm}^2/\text{g}$ ] führt. Zum Wirkungsquerschnitt und damit zum Absorptionskoeffizienten tragen drei verschiedene Prozesse bei:

#### Photoeffekt

Falls die Energie  $h\nu$  des Photons größer als die Bindungsenergie  $I_B$  des beteiligten Elektrons ist, kann der Prozess



ablaufen (Abbildung 3.6). Das Photon wird von einem Elektron absorbiert, das danach nicht mehr gebunden ist und das Atom verläßt. Dadurch entsteht ein Loch

### 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie

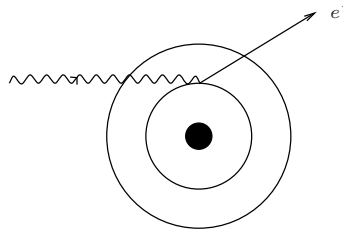


Abbildung 3.6.: Photoeffekt

in der Atomhülle. Die Energie des Elektrons ist die Photonenergie abzüglich der Bindungsenergie:  $T_{e^-} = h\nu - I_B$ .

Aufgrund von Energie- und Impulserhaltung ist der Photoeffekt nur an gebundenen Elektronen möglich, da der Rückstoß bei der Absorption des Photons aufgenommen werden muß.

Der Wirkungsquerschnitt zeigt eine starke Abhängigkeit von der Kernladungszahl  $Z$  des Materials und der Photonenenergie  $E_\gamma$ :

$$\sigma_{PE} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma^{7/2}}$$

Bei Energien im Bereich von  $E_\gamma < 0,1 \dots 1 \text{ MeV}$  (je nach  $Z$ ) dominiert der Photoeffekt den Energieverlust von Photonen.

### Compton-Streuung

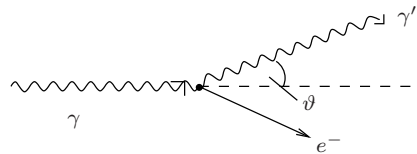


Abbildung 3.7.: Kinematik der Compton-Streuung

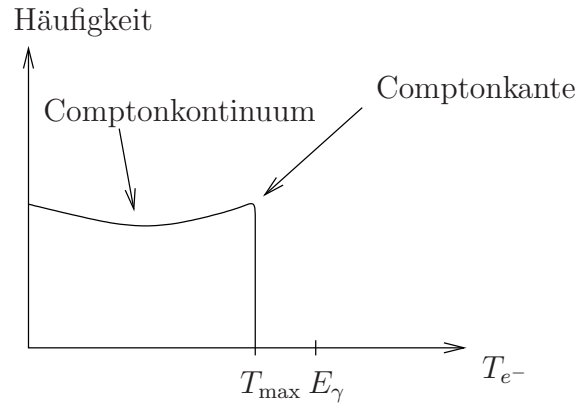
Als Compton-Streuung bezeichnet man die Streuung eines Photons an einem Elektron, wie in Abbildung 3.7 skizziert. Dabei überträgt das Photon Energie und Impuls auf das Elektron. Wenn die Energie des Photons groß gegenüber der Bindungsenergie des Elektrons ist, kann das Elektron als frei angesehen werden. Aus der Viererimpulserhaltung kann man dann den Energieverlust des Photons bestimmen.

$$\frac{1}{E_\gamma'} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)$$

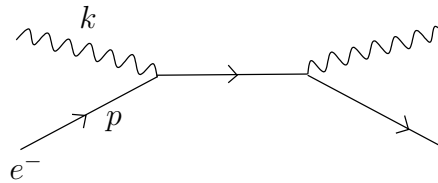
Für Rückstreuung, d.h.  $\vartheta = \pi$ , wird die Energie des Elektrons maximal. Mit der Näherung  $E_\gamma \gg m_e$  erhält man für die maximale kinetische Energie des Elektrons aus obiger Formel

$$T_{e^- \text{ max}} = E_\gamma \left( 1 - \frac{m_e c^2}{2E_\gamma} \right)$$

Das Energiespektrum des Elektrons ist in Abbildung 3.8 skizziert.



**Abbildung 3.8.:** Schematisiertes Energiespektrum der Elektronen bei Compton-Streuung



**Abbildung 3.9.:** Dynamik der Compton-Streuung

Um den Wirkungsquerschnitt bestimmen zu können, muß man die Dynamik des Streuprozesses betrachten (Abbildung 3.9). Für den Wirkungsquerschnitt gilt

$$\sigma_C \sim \frac{Z\alpha^2}{s^2}$$

$s$  ist die Schwerpunktsenergie.

$$s^2 = (p + k)^2 = m_e^2 + 2m_e E_\gamma \sim \begin{cases} \text{const} & ; E_\gamma \ll m_e \\ E_\gamma & ; E_\gamma \gg m_e \end{cases}$$

Zwei Grenzfälle der exakten Rechnung (jeweils für ein  $e^-$ ):

$$E_\gamma \ll m_e c^2 : \quad \sigma_C = \sigma_T \left( 1 - \frac{2E_\gamma}{m_e c^2} \right)$$

$$E_\gamma \gg m_e c^2 : \quad \sigma_C = \frac{3}{8} \sigma_T \frac{m_e c^2}{E_\gamma} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{2E_\gamma}{m_e c^2} \right)$$

### 3. Wechselwirkung von Strahlung und Materie

$\sigma_T$  ist der Thomson-Querschnitt für die elastische Streuung von Photonen ( $E_\gamma \ll m_e c^2$ ) an freien Elektron mit dem klassischen Elektronenradius  $r_e = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  ( $r_e \sim \alpha^2$ ).

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2$$

Der klassische Grenzfall ist die Rayleigh-Streuung ( $E_\gamma \ll E_B$ ), bei der die Elektronenhülle durch die einfallende elektromagnetische Welle zum Schwingen angeregt wird und dann wiederum elektromagnetische Strahlung mit der gleichen Frequenz wie die einfallende Welle emittiert. Solange die Wellenlänge groß gegen den Atomdurchmesser ist, können sich die gestreuten Wellen kohärent addieren. Es findet aber kein Energieübertrag statt.

Die Compton-Streuung dominiert den Energieverlust von  $\gamma$ -Strahlung für Energien im Bereich von 1-2 MeV.

### Paarbildung

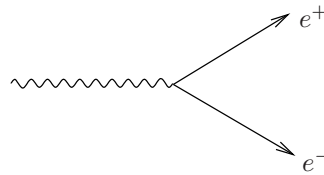


Abbildung 3.10.: Paarbildung

Als Paarbildung bezeichnet man die Konversion eines Photons in ein  $e^+e^-$ -Paar (Abbildung 3.10). Aufgrund der Viererimpulserhaltung ist dieser Prozess im Vakuum nicht möglich, es wird ein ansonsten unbeteiligter Partner ( $\rightarrow$  Atomkern) benötigt, der den Rückstoß aufnimmt. Eigentlich ist also das Feynman-Diagramm in Abbildung 3.11 korrekt.

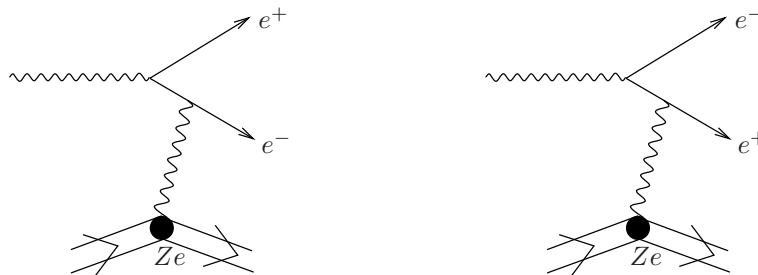


Abbildung 3.11.: Paarerzeugung mit „Stoßpartner“

Der Wirkungsquerschnitt steigt zunächst mit  $E_\gamma$  an ( $\sigma_P \sim Z^2 \ln E$ ), geht aber für große Energien in eine Sättigung

$$\sigma_{P,S} = \frac{7}{9} \frac{1}{N_A} \frac{Z(Z+1) \ln(287/\sqrt{Z})}{716,4 \text{ gcm}^{-2}} = \frac{7}{9} \frac{A}{N_A x_0}$$

$x_0$  ist die Strahlungslänge:  $x_0^{\text{Paar}} = \frac{9}{7} x_0^{\text{Brems}}$

Die Paarbildung dominiert den Energieverlust von  $\gamma$ -Strahlung für Energien ab etwa 5 MeV.

Bei hohen Energien des einfallenden Photons kommt es zur Bildung von elektromagnetischen Schauern. Sie bestehen aus Elektronen, Positronen und Photonen, die durch Wechselwirkungen mit der Materie entstehen. Sie haben genug Energie, um weitere Wechselwirkungen zu machen.

Der totale Absorptionskoeffizient ist die Summe der Koeffizienten für die einzelnen Prozesse:

$$\mu_{\text{tot}} = \mu_{PE} + \mu_C + \mu_P$$

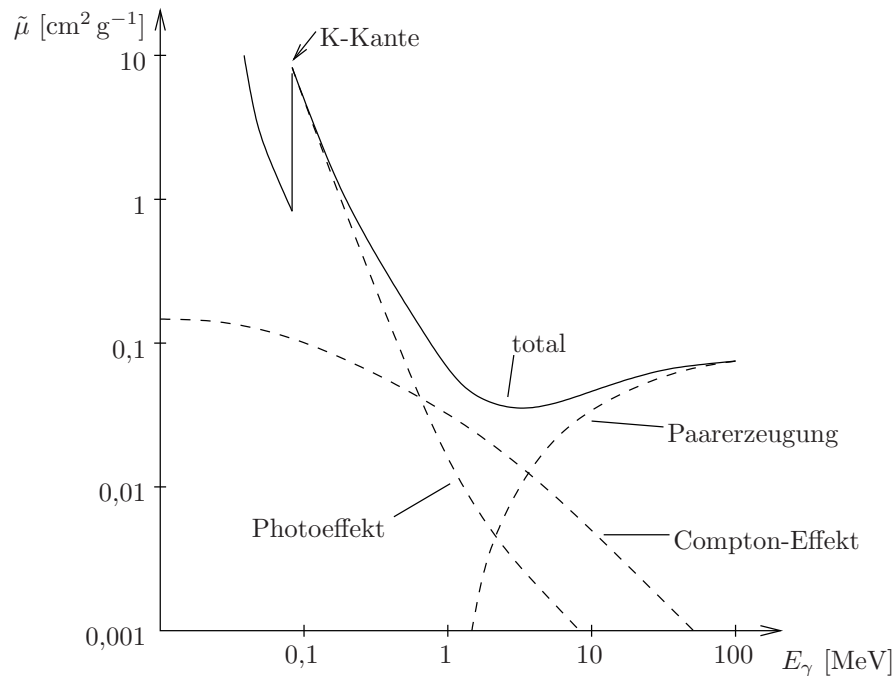


Abbildung 3.12.: Absorptionskoeffizient für  $\gamma$ -Strahlung in Blei

# 4. Teilchendetektoren

Teilchendetektoren werden zur Messung der Produkte von Kollisionen oder Zerfällen benötigt. Ihre häufigsten Aufgaben sind

- Nachweis der entstandenen Teilchen
- Messung kinetischer Variablen (z.B.  $E$ ,  $\vec{p}$ )
- Messung der Lebensdauer  $\tau$  bzw. der Zerfallslänge  $\beta\gamma\tau$
- Teilchenidentifikation (Bestimmung der Masse:  $m^2 = E^2 - \vec{p}^2$ )

Es gibt eine große Vielfalt von verschiedensten Detektoren, die für verschiedene Aufgaben unterschiedlich gut geeignet und zum Teil hochspezialisiert sind. Hier werden nur einige der häufigsten kurz vorgestellt, das Kapitel erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit.

## 4.1. Gasgefüllte Ionisationsdetektoren

### Ionisationskammer

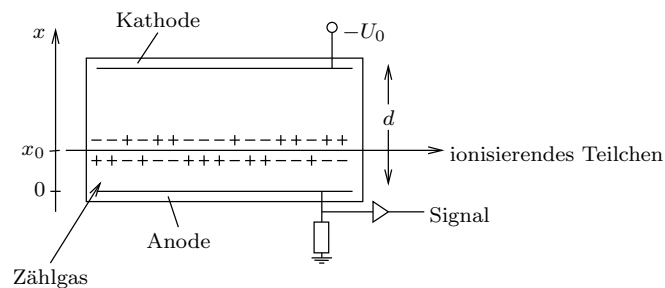


Abbildung 4.1.: Aufbau einer Ionisationskammer

Eine Ionisationskammer besteht im wesentlichen aus zwei Elektroden, die sich in einer mit einem Zählgas gefüllten Kammer befinden (Abbildung 4.1). Ein durchgehendes geladenes Teilchen erzeugt entlang seiner Bahn Elektron-Ion-Paare, die Ladungsträger driften im elektrischen Feld zu den Elektroden. Die dadurch auf den Platten induzierte Ladung fließt über den Arbeitswiderstand und erzeugt so ein kleines Spannungssignal. Das Gas darf nicht elektronegativ sein, damit die Elektronen und Ionen zu den Elektroden wandern können.



Die beiden Elektroden bilden einen Kondensator mit Kapazität  $C$ , das elektrische Feld ist konstant.

$$|\vec{E}| = E_x = \frac{U_0}{d}$$

$U_0$  wird so niedrig gewählt, daß die Elektronen nicht genug kinetische Energie bekommen um ihrerseits Atome zu ionisieren und so Sekundärelektronen zu erzeugen (typische Werte sind  $E_x \approx 500 \text{ V/cm}$  und  $d \approx 2 - 3 \text{ cm}$ ). Der Durchgang eines ionisierenden Teilchens führt dazu, daß die im Kondensator gespeicherte Energie von  $1/2CU_0^2$  auf  $1/2CU^2$  verringert wird. Im Fall eines Teilchens, dessen Bahn durch die Kammer parallel zu den Platten verläuft, gilt

$$\frac{1}{2}CU^2 - \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}C(U + U_0)(U - U_0) = -NqE_x(x - x_0)$$

$N$  ist die Zahl der Ladungsträgerpaare. Da die Änderung der Spannung sehr klein ist, ist  $U + U_0 \simeq 2U_0$ . Damit erhält man für die Signalamplitude

$$\Delta U = U - U_0 = -\frac{Nq}{Cd}(x - x_0)$$

Sie enthält zwei Beiträge: den der Elektronen ( $\Delta U^-$ ) und den der Ionen ( $\Delta U^+$ ).

$$\Delta U^- = -\frac{N(-e)}{Cd}(-x_0) = -\frac{Ne}{Cd}v^- \Delta t^-$$

$$\Delta U^+ = -\frac{Ne}{Cd}(d - x_0) = -\frac{Ne}{Cd}v^+ \Delta t^+$$

$v^\pm$  sind die unterschiedlichen Driftgeschwindigkeiten. Für Argon gilt bei Normaldruck  $v^- \approx 0,2 \text{ cm}/\mu\text{s}$  und  $v^+ \approx 0,2 \text{ cm/ms}$ . Da sich die Elektronen viel schneller bewegen als die Ionen hat das Signal die in Abbildung 4.2 skizzierte Form.

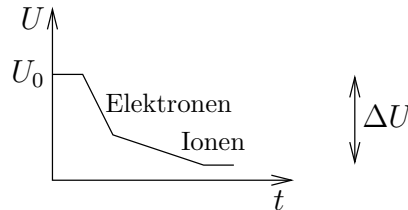


Abbildung 4.2.: Signal einer Ionisationskammer

Die Gesamtamplitude ist

$$\Delta U = -\frac{Ne}{C}$$

Ionisationskammern können schnell gemacht werden und eignen sich deshalb gut für große Teilchenflüsse. Es können auch stark ionisierende Teilchen gut nachgewiesen werden, da die Spannungsänderung sehr klein ist. Mit segmentierten Kammern kann man außerdem den Energieverlust entlang der Spur des Teilchens messen.

## Proportionalzählrohr

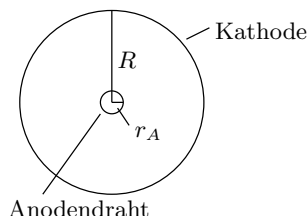


Abbildung 4.3.: Querschnitt durch ein Proportionalzählrohr

Proportionalzähler funktionieren im Prinzip so ähnlich wie die Ionisationskammern, sind aber zylinderförmig (Abbildung 4.3). Das elektrische Feld ist dann nicht mehr konstant, sondern hängt vom Radius ab:

$$E(r) = \frac{U_0}{r \ln \frac{R}{r_A}}$$

Im Bereich der Anode werden sehr hohe Feldstärken erreicht. Typische Werte sind  $R = 5 \text{ mm}$ ,  $r_A = 25 \mu\text{m}$  und  $U_0 = 2000 \text{ V}$ ; die Feldstärke erreicht dann  $E(r_A) = 9,4 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ . Bei hinreichend großen Werten von  $U_0$  werden die Elektronen so stark beschleunigt, daß ihre kinetische Energie größer als die Ionisationsenergie des Zählgases wird. Es kommt zur Ausbildung einer ganzen Lawine von Sekundärelektronen. Bei nicht zu großem  $U_0$  ist die Signalhöhe proportional zur Zahl der Primärelektronen.

$$\Delta U = -\frac{ANe}{C}$$

$A$  ist der Gasverstärkungsfaktor und gibt die Anzahl der Sekundärelektronen pro primär erzeugtem Elektron an. Für Proportionalzählrohre ist  $A = 10^4 - 10^5$ .

## Auslösezähler (Geiger-Müller-Zähler)

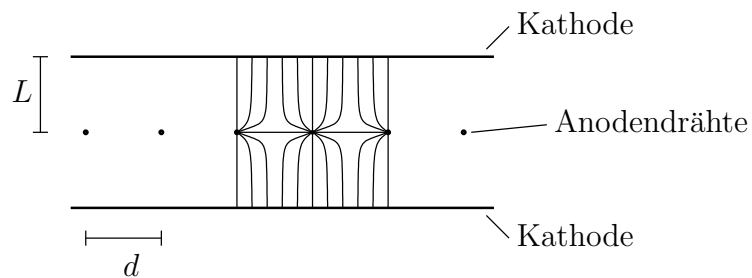
Auslösezähler und Proportionalzähler sind vom Aufbau identisch, erstere werden aber bei höheren Spannungen  $U_0$  betrieben. Jetzt werden die Elektronen so stark beschleunigt, daß sie bei den Atomen des Zählgases Elektronen aus niedrigeren Schalen herausschlagen können. Die Lücke wird aus höheren Schalen unter Emission von UV-Photonen aufgefüllt. Die Photonen können nun an anderer Stelle durch den photoelektrischen Effekt Elektronen erzeugen. Entlang der Anode bilden sich immer neue Lawinen von Sekundärelektronen aus und die Gasverstärkung liegt bei  $A = 10^8 - 10^{10}$ . Die Signalamplitude hängt jetzt nicht mehr von der Anzahl der Primärelektronen, sondern nur von der angelegten Spannung  $U_0$  ab. Dafür ist sie so groß, daß keine Verstärker etc. benötigt werden.

Die hohen Feldstärken führen aber auch zu Komplikationen, z.B. können die Ionen beim Auftreffen auf die Kathode Elektronen ablösen und so den Zähler erneut

auslösen. Außerdem besteht die Gefahr einer Funkenentladung, wenn eine Verbindung der Elektroden durch Ionen entsteht. Die Elektronen sind in diesem Kontext unkritisch, da sie sehr schnell zur Anode wandern. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, diese Probleme zu umgehen, hat sich die Zugabe von Löschgasen als die beste Lösung erwiesen. Als Löschgase eignen sich vor allem Kohlenwasserstoffverbindungen mit einem großen Wirkungsquerschnitt zur Absorption von UV-Photonen, die so die räumliche Ausbreitung der Entladung begrenzen. Darüber hinaus werden die Ionen auf ihrem Weg zur Kathode durch Stöße mit dem Löschgas neutralisiert, die kinetische Energie der Löschgasionen reicht nicht zum Ablösen von Elektronen aus der Kathode.

### Vieldrahtproportionalkammer

Eine Vieldrahtproportionalkammer kann man sich wie eine Schicht von Proportionalzählern ohne Trennwände vorstellen (Abbildung 4.4). Typische Abmessungen sind  $d = 2 \text{ mm}$ ,  $L = 10 \text{ mm}$  und  $r_A = 10 - 30 \mu\text{m}$ . Die elektrische Feldstärke ist über weite Teile der Kammer praktisch konstant, nimmt aber in der Nähe der Anodendrähte stark zu. Die Lawinenbildung funktioniert genauso wie beim Proportionalzähler, die Gasverstärkung liegt bei  $A = 10^5$ .



**Abbildung 4.4.:** Aufbau einer Vieldrahtproportionalkammer, ebenfalls angedeutet ist der Verlauf der Feldlinien

Vieldrahtkammern können zur Spurmessung verwendet werden, in dieser schlichten Ausführung ist die Auflösung mit etwa  $600 \mu\text{m}$  aber vergleichsweise schlecht. Außerdem bekommt man nur Information über die Koordinate senkrecht zu den Drähten. Eine wesentliche Verbesserung erreicht man durch Segmentierung der Kathoden in Streifen, rechteckige Plaketten oder Drähte. Durch Auslesen der Signale von den Kathoden kann eine Auflösung von ca.  $50 \mu\text{m}$  entlang der Anodendrähte erzielt werden.

## 4.2. Szintillationszähler

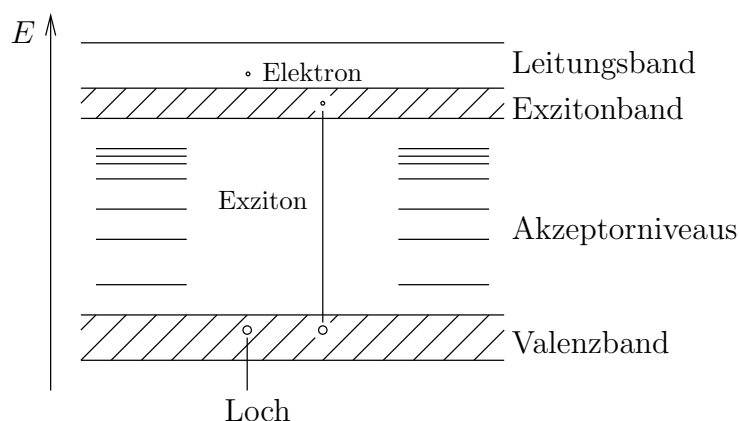
In Szintillationszählern wird die von Teilchen deponierte Energie in Licht umgewandelt und mit Photomultipliern nachgewiesen. Sie zerfallen in zwei Gruppen, or-

#### 4. Teilchendetektoren

ganische und anorganische, in denen verschiedene Prozesse zur Emission von Licht führen.

### Anorganische Szintillatoren

Anorganische Szintillatoren sind Kristalle, bei denen das Valenzband vollständig besetzt ist, während das Leitungsband leer ist (Isolatoren). In das Gitter des Kristalls werden Aktivoren eingefügt, deren Energieniveaus zwischen dem Valenz- und dem Leitungsband liegen (Abbildung 4.5). Ein typisches Beispiel ist NaI(Tl), also ein mit Tl dotierter NaI-Kristall.



**Abbildung 4.5.:** Energieniveaus in einem anorganischen Szintillator

Ein Elektron kann durch die von einem Teilchen deponierte Energie ins Leitungsband gehoben werden, wo es sich frei bewegen kann. Bei Rekombination mit einem Loch an einer Verunreinigung (oder einem Aktivator) im Kristallgitter kann die freiwerdende Energie in Form von Licht abgegeben werden. Es kann aber auch sein, daß die absorbierte Energie nicht ganz zum Erreichen des Leitungsbands reicht. Dann bleiben das Elektron und das Loch elektrostatisch gebunden, dieser Zustand wird als Exziton bezeichnet. Ähnlich wie ein freies Elektron kann sich ein Exziton durch das Kristallgitter bewegen bis es auf einen Aktivator (Farbzentrum) trifft. Dann überträgt es seine Bindungsenergie auf den Aktivator, dieser reicht die Energie über Phononen (Gitterschwingungsquanten) an das Kristallgitter weiter oder regt sich durch Emission eines Photons ab. Die Wellenlänge des emittierten Lichts ist bei NaI(Tl)  $\lambda = 410 \text{ nm} = 3 \text{ eV}$ , die Strahlungslänge ist  $x_0 = 2,6 \text{ cm}$ .

Die Lebensdauer der angeregten Zustände bestimmt die Zerfallszeit des Szintillators, sie ist bei anorganischen Szintillatoren vergleichsweise lang und damit ist die Zeitauflösung nicht so gut ( $\tau = 0,23 \mu\text{s}$  bei NaI(Tl)). Ein weiterer Nachteil ist, daß sie teuer sind. Dafür wird durch die hohen Photonenausbeuten ( $4 \cdot 10^4$  1/MeV für NaI(Tl)) eine gute Energieauflösung gewährleistet. Die Lichtausbeute liegt typischerweise bei 10%, die Sammeleffizienz bei 40% und die Quanteneffizienz eines Photomultipliers bei 30%. Der Energieverlust in NaI(Tl) ist ungefähr 5 MeV/cm,

auf einer Strecke von 10 cm werden also 50 MeV deponiert. Davon werden 5 MeV in Licht ( $2 \cdot 10^5$  Photonen) umgewandelt. Am Ende bekommt man dafür etwa  $2 \cdot 10^4$  Photoelektronen.

Anorganische Szintillatoren eignen sich zum Nachweis von Elektronen und Photonen.

## Organische Szintillatoren

Organische Szintillatoren sind meistens aromatische Kohlenwasserstoffe (z.B. Naphthalin, Antrazen). Im Gegensatz zu den anorganischen stammt hier das Licht aus Übergängen durch freie Valenzelektronen. Dabei können sowohl Fluoreszenz (spontaner Zerfall eines angeregten Zustands unter Lichtemission) als auch Phosphoreszenz (es findet zuerst ein strahlungsloser Übergang in einen langlebigen angeregten Zustand statt) auftreten. Die Zerfallszeit ist deutlich kleiner als bei anorganischen Szintillatoren; die Lebensdauer liegt bei Fluoreszenz bei 1 – 10 ns und bei Phosphoreszenz im Bereich von  $\mu\text{s}$ . Für Naphtalin ist  $\tau = 96 \text{ ns}$ ,  $\lambda = 348 \text{ nm}$  und  $x_0 = 40 \text{ cm}$ . Die Photonenausbeute ist deutlich geringer als bei anorganischen Materialien, bei Naphtalin etwa 10% von NaI.

Viele organische Szintillatoren emittieren ultraviolettes Licht, sind aber in diesem Wellenlängenbereich nicht transparent. Das Problem kann durch Beimischung eines Stoffes, der ultraviolettes Licht absorbiert und bei größerer Wellenlänge re-emittiert, gelöst werden.

Zur Messung von Elektronen und Photonen sind organische Szintillatoren ungeeignet, ihr Haupteinsatzgebiet ist der Nachweis von geladenen Teilchen und Neutronen und die Flugzeitmessung (gute Zeitaufösung).

## 4.3. Halbleiterzähler

Ein Halbleiterzähler ist ein pn-Übergang, an den in Sperrichtung eine Spannung angelegt wird. Dadurch entsteht eine Verarmungszone, in der keine freien Ladungsträger vorhanden sind. Durchgehende Teilchen erzeugen durch Ionisation in dieser Zone Elektron-Loch-Paare, die im elektrischen Feld zu den Anschlüssen wandern und dort ein Stromsignal erzeugen. Photonen werden über Compton- oder Photoeffekt nachgewiesen. Die Zahl der produzierten Paare ist proportional zur deponierten Energie. Das Signal wird über einen ladungsempfindlichen Vorverstärker ausgelesen, der den Puls aufintegriert und so ein Signal erzeugt, dessen Amplitude proportional zum Energieverlust ist.

Halbleiterdetektoren haben eine sehr gute Energieauflösung, da zur Erzeugung eines Elektron-Loch-Paars nur einige eV benötigt werden. Wegen ihrer größeren Dichte können auch hochenergetische Teilchen leichter vollständig abgestoppt werden (dann ist das Signal proportional zur Energie des Teilchens). Die kurzen Sammelzeiten für die Elektronen bewirken ausserdem eine gute Zeitaufösung.

#### 4. Teilchendetektoren

Als Kristalle werden Si, Ge oder GaAs verwendet, die stark mit beispielsweise As, P oder Sn (n-Schicht) und Ga, B oder In (p-Schicht) dotiert werden. Man kann die Diode asymmetrisch gestalten, so daß die n-Schicht sehr dünn ist. Das hat den Vorteil, daß ein auf dieser Seite einfallendes Teilchen nur sehr wenig Energie vor Erreichen der Verarmungszone verliert. Der limitierende Faktor in dem Geschäft ist die Reinheit der Kristalle, da Verunreinigungen zu unerwünschten Rekombinationen führen.

### 4.4. Čerenkov-Zähler

Ein Čerenkov-Zähler weist die in einem Medium von Teilchen mit einer Geschwindigkeit  $\beta > 1/n$  emittierte Čerenkov-Strahlung nach. Die Schwellenenergie ist

$$E_{th} = \gamma_{th} m_0 c^2 = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} m_0 c^2$$

Bei fester Energie hängt der Schwellen-Lorentzfaktor von der Masse des Teilchens ab und kann somit zur Teilchen-Identifikation dienen.

Grundsätzlich kann jedes transparente Material als Čerenkov-Radiator genutzt werden. Die Zahl der pro Wegstrecke emittierten Photonen ist

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha q^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

$q$  ist die Ladung des Teilchens. Unter Vernachlässigung der Dispersion (d.h. der Abhängigkeit des Brechungsindex  $n$  von  $\lambda$ ) vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\frac{dN}{dx} = 2\pi\alpha q^2 \sin^2 \vartheta_c \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}$$

Für den optischen Bereich ( $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  und  $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$ ) erhält man

$$\frac{dN}{dx} = 490 q^2 \sin^2 \vartheta_c \quad \left[ \frac{1}{\text{cm}} \right]$$

Bei Experimenten mit einem festen Target werden gerne ringabbildende Čerenkov-Detektoren (RICH-Detektoren) verwendet. Es handelt sich dabei um einen Aufbau mit einem sphärischen Spiegel mit Radius  $R_S$ , dessen Krümmungsmittelpunkt mit dem Wechselwirkungspunkt zusammenfällt (Abbildung 4.6). Er reflektiert das Čerenkov-Licht auf einen Detektor mit Radius  $R_D = R_S/2$ , wo es als Ring erscheint. Die Brennweite  $f$  des Spiegels ist  $R_S/2$ , damit ergibt sich für den Radius des Rings

$$r = f\vartheta_c = \frac{R_S}{2}\vartheta_c$$

Daraus läßt sich die Geschwindigkeit des Teilchens bestimmen.

$$\cos \vartheta_c = \frac{1}{n\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{n \cos \left( \frac{2r}{R_S} \right)}$$

Wenn der Impuls bekannt ist (z.B. aus Ablenkung im Magnetfeld) kann man die Masse und damit die Identität des Teilchens bestimmen.

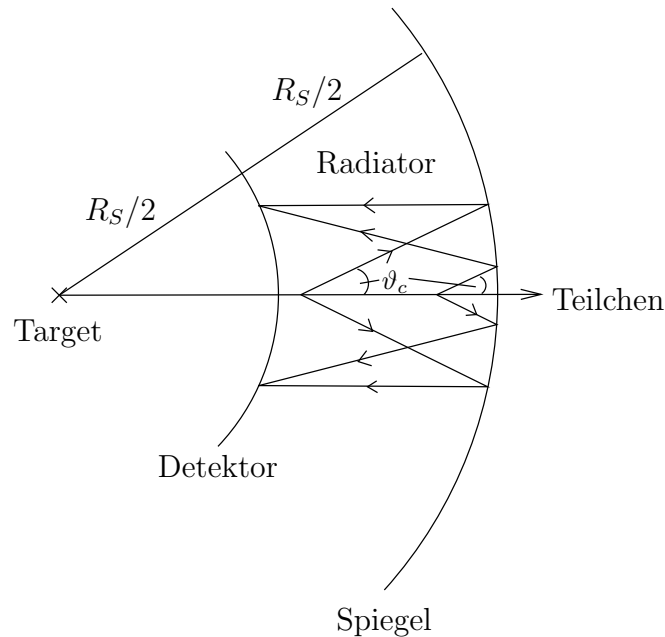


Abbildung 4.6.: Aufbau und Funktionsweise eines RICH-Detektors

Als Detektor werden normalerweise Vieldrahtproportionalzähler verwendet, wobei dem Zählgas photosensitive Dämpfe beigemischt werden. Die Herausforderung bei der Geschichte besteht in der Rekonstruktion des Rings, da ein Teilchen typischerweise nur wenige Photoelektronen produziert.

## 4.5. Detektoren zur Spurvisualisierung

**Blasenammer** Ein flüssiges Gas ( $H_2$ ,  $D_2$ ,  $Ne$ , ...) befindet sich unter Druck in einem Behälter. Vor einem erwarteten Ereignis wird das Volumen vergrößert, der Druck sinkt und die Siedetemperatur wird überschritten (die Flüssigkeit ist überhitzt). Ein einfallendes Teilchen erzeugt durch Ionisation Elektron-Ion-Paare entlang seiner Spur. Die Ionen sind Keime, an denen sich Dampfbläschen bilden, deren Dichte entlang der Spur proportional zum Energieverlust pro Strecke des Teilchens ist. Das „Auslesen“ erfolgt durch Photographieren der Kammer.

Da die Lebensdauer der Ionen mit  $10^{-11} - 10^{-10}$  s sehr kurz ist, kann man eine Blasenammer nicht triggern. Für Experimente an Beschleunigern ist das

#### 4. Teilchendetektoren

aber kein Problem, weil man die Ankunftszeit der Strahlteilchen im Voraus bestimmen kann. Nach der Expansion muss der Ausgangszustand der Kammer wiederhergestellt werden, je nach Größe können die Zyklen aber bis zu 100 ms kurz sein. Wenn sich die Kammer in einem Magnetfeld befindet, kann aus der Krümmung der Spur der Impuls des Teilchens bestimmt werden.

**Nebelkammer** Eine Nebelkammer funktioniert ähnlich wie eine Blaskammer, nutzt aber die Kondensation von übersättigtem Dampf aus. Sie besteht aus einem Container, der mit einem Gas-Dampf-Gemisch beim Sättigungsdruck des Dampfes gefüllt ist. Da die Ionen hier mit etwa 10 ms deutlich länger leben als in einer Blaskammer kann eine Nebelkammer getriggert werden (z.B. durch das Signal eines Szintillationszähler). Durch schnelle Expansion wird die Temperatur gesenkt und der nun übersättigte Dampf kondensiert an den durch das durchgehende Teilchen erzeugten Ionen. Die Tröpfchen sind erst nach etwa 100 ms groß genug um photographiert werden zu können. Ein kompletter Zyklus ist zwischen 1 und 10 min lang.

**Streamer** Eine Streamerkammer besteht aus einem mit Zählgas gefüllten Volumen zwischen zwei ebenen Elektroden. Nach dem Durchgang eines geladenen Teilchens wird auf die Platten ein kurzer Hochspannungspuls gegeben (Amplitude  $\approx 500$  kV, Anstiegszeit  $\approx 1$  ns, Dauer einige ns). Die durch das passierende Teilchen erzeugten Elektronen werden beschleunigt und es kommt wie bei den Gaszählern zur Lawinenbildung (die Gasverstärkung liegt bei  $A = 10^8$ ). Diese ist jedoch wegen der kurzen Dauer des Spannungspulses räumlich sehr begrenzt. Nach Abfall der Spannung kommt es durch Rekombination und Abregung der Gasmoleküle zur Emission von sichtbarem Licht - es bilden sich sog. streamer. Sie erscheinen als leuchtende Punkte entlang der Spur des Teilchens und werden (meistens durch eine der Elektroden) photographiert.

**Funkenkammer** Sie besteht aus mehreren übereinander in einem gasgefüllten Behälter montierten Platten, die abwechselnd geerdet und mit einer Hochspannungsquelle verbunden sind (normalerweise getriggert). Bei einer Gasverstärkung von  $10^8 - 10^9$  kommt es bei Passieren eines geladenen Teilchens zu Funkenentladungen an der Stelle Durchgangs. Die Kammer wird durch Koinzidenzen in zwei Szintillationszählern über bzw. unter dem Container getriggert. Sie kann entweder durch Photographie oder elektronisch ausgelesen werden.

**Photographische Emulsion** Es handelt sich wie bei den Photoplaten um feinkörnige AgBr- oder AgCl-Kristalle in einem Substrat. Ein einfallendes Teilchen produziert freie Ladungsträger, die einige Halidmoleküle zu metallischem Silber reduzieren. Beim Entwickeln werden die Halidkristalle chemisch reduziert, wobei besonders solche Kristalle, die schon teilweise reduziert sind, davon betroffen sind. Danach werden die restlichen Halidkristalle beim Fixieren gelöst und entfernt, es bleibt des elementare Silber entlang der Spur zurück. Die



#### 4.5. Detektoren zur Spurvisualisierung

Ortsauflösung ist mit bis zu  $2\ \mu\text{m}$  sehr gut, aber Emulsionen sind immer sensitiv und können nicht getriggert werden. Es muß immer ein Kompromis zwischen Empfindlichkeit und Auslösung gemacht werden. Ein ganzer Stapel von Platten eignet sich gut zum Nachweis von elektromagnetischen Schauern (hohe Dichte, kurze Strahlungslänge).

# 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

## 5.1. Masse

Massen einiger Teilchen:

$\nu_e$	$m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}$
$e$	$m_e = 511 \text{ keV}$
$\mu$	$m_\mu = 106 \text{ MeV}$
$\vdots$	Hunderte von Teilchen bis ca. 10 GeV
$W, Z$	$m_{W,Z} \simeq 90 \text{ GeV}$
$t$ -quark	$m_t \simeq 173 \text{ GeV}$

Massenbestimmung:

1. stabile Teilchen: Massenspektrometrie

Ein Massenspektrometer nutzt die Ablenkung von geladenen Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern. Zunächst fliege das Teilchen mit Geschwindigkeit  $v_x$  in  $x$ -Richtung. Bei Verlassen des  $E$ -Feldes der Länge  $L_E$  ( $\vec{F}_E = q\vec{E}$ ) hat es auch eine Geschwindigkeitskomponente in  $y$ -Richtung. Seine Flugbahn bildet mit der  $x$ -Richtung den Winkel  $\vartheta$ .

$$\tan \vartheta = \frac{qEL_E}{mv_x^2}$$

Bei Verlassen des nach dem  $E$ -Feld folgenden  $B$ -Feldes der Länge  $L_B$  senkrecht zum  $E$ -Feld ( $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ ) hat die Geschwindigkeit das Teilchen eine  $y$ -Komponente

$$v_y = v_{0y} + \frac{qBL_B}{mv_x}$$

In der Detektorebene ist dann

$$y \propto \frac{q}{m} \left( \frac{EL_E}{v_x^2} + \frac{BL_B}{v_x} \right)$$

Durch geeignete Wahl der Dimensionen der Apparatur kann man erreichen, daß alle Teilchen gleicher spezifischer Ladung unabhängig von ihrer Geschwindigkeit gleich stark abgelenkt werden. Sie treffen in der Detektorebene auf einer Gerade auf.

2. Bei mittleren Lebensdauern (Hunderte von ns) kann man durch kombinierte Impuls- und Flugzeitmessung die Masse bestimmen.
3. Auch bei kürzeren Lebensdauern kann man die Impulse der Zerfallsprodukte messen und die invariante Masse bestimmen ( $p^2 = M_X^2 = (p_1 + p_2 + \dots)^2$  im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens  $X$ ).
4. Geht das betreffende Teilchen  $X$  durch Zerfall aus einem Teilchen  $Y$  hervor, dessen Masse bekannt ist, so kann man durch Bestimmung des Q-Werts des Zerfalls (im Zerfall freigesetzte Energie) die Masse von  $X$  berechnen.

## 5.2. Spin

Sei  $\mathbf{S}$  der Spinoperator und  $\psi_{s,m_s}$  eine Eigenfunktion hierzu:

$$\mathbf{S}^2 \psi_{s,m_s} = s(s+1)\hbar^2 \psi_{s,m_s}$$

$$S_3 \psi_{s,m_s} = m_s \hbar \psi_{s,m_s} \quad -s \leq m_s \leq s$$

Die Teilchen werden oft nach dem Betrag ihres Spins bzw. der Quantenzahl  $s$  klassifiziert. Ein „Spin 1/2-Teilchen“ hat also die Quantenzahl  $s = 1/2$ , der Betrag des Spins ist  $|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$ . Zu jedem Wert von  $s$  gehören  $2s + 1$  mögliche  $z$ -Komponenten.

Der Spin  $\vec{s}$  (Betrag  $s$  und  $z$ -Komponente  $m_s$ ) eines Teilchens kann über das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  gemessen werden. Wenn keine Bahnbewegung vorliegt, ist das magnetische Moment nur durch den Spin gegeben:

$$\vec{\mu}_s = g_s \mu_0 \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$$

$\mu_0$  wird Magneton genannt. Im Falle eines Elektrons ist es das Bohrsche Magneton:  $\mu_B = 5,79 \cdot 10^{-11} \text{ MeV/T}$ . Für Nukleonen ist es das nukleare Magneton:  $\mu_N = 3,15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$ .

$g_s$  ist der sog.  $g$ -Faktor oder gyromagnetisches Verhältnis (für Elektronen  $-2$ ).

Die Einstellung des Spins relativ zu einem Magnetfeld in  $z$ -Richtung ist quantisiert, die Zustände werden durch  $m_s$  charakterisiert. Sie sind energetisch verschieden, da ein magnetischer Dipol mit magnetischem Moment  $\vec{\mu}$  in einem Magnetfeld die Energie  $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  hat.

Im Magnetfeld präzediert der Spin um die  $\vec{B}$ -Achse, so daß man nur das zeitliche Mittel

$$\langle \vec{\mu}_s \rangle = \mu_z \hat{e}_z = g_s \mu_0 m_s \hat{e}_z$$

sieht.

Für den  $g$ -Faktor des Protons würde man eigentlich  $+2$  und für den des Neutrons  $0$  erwarten. Tatsächlich mißt man aber

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

$$\text{Proton: } g_{s,p} = 5,58 \quad \Rightarrow \quad \langle \mu_s \rangle_p = \pm 2,79 \mu_N$$

$$\text{Neutron: } g_{s,n} = -3,82 \quad \Rightarrow \quad \langle \mu_s \rangle_n = \mp 1,91 \mu_N$$

Diese „anormalen“ magnetischen Momente liegen in der Unterstruktur der Nukleonen begründet.

### 5.3. Klassifikation nach Wechselwirkungen

Es gibt vier fundamentale Kräfte: Gravitation, elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung. Ihre Stärke wird durch die dimensionslosen Kopplungskonstanten charakterisiert, ihre Reichweite  $\Delta x$  ist durch die Unschärferelation gegeben, da die Austauscheteilchen, die die Wechselwirkungen vermitteln, nur aufgrund der Energie-Unschärfe existieren können.

$$\Delta \tau \cdot m \simeq \frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \quad \Delta x \cdot m \simeq \frac{\hbar c}{2}$$

#### Elektromagnetische Kraft

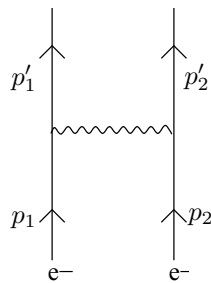


Abbildung 5.1.: Streuung von Elektronen

Die elektromagnetische Wechselwirkung findet durch Austausch eines Photons statt (Abbildung 5.1). Die potentielle Energie als Funktion des Abstands ist:

$$V_{em}(r) = -\frac{e^2}{r}$$

Das Photon überträgt den Viererimpuls  $q$ :

$$q^2 = (p_1 - p_1')^2 = (p_2' - p_2)^2 = (E_1 - E_1')^2 - (\vec{p}_1' - \vec{p}_1)^2$$

Manchmal ist es nützlich, die potentielle Energie als Funktion von  $q^2$  zu betrachten. Man erhält es durch Fouriertransformation aus dem vorigen:

$$V_{em}(q^2) = \int V_{em}(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}\right) d^3r = \frac{e^2 \hbar^2}{q^2}$$

Die dimensionslose Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Feinstrukturkonstante  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

Reichweite:  $\Delta x = \infty$  (das Photon ist masselos)

## Gravitation

$$V_G = \frac{G_N m^2}{r} = \frac{G_N m^2 \hbar^2}{q^2}$$

Die Gravitation kann ebenfalls durch Austausch eines masselosen Austauschteilchens, dem Graviton, beschrieben werden. Das Graviton ist aber noch nicht nachgewiesen worden (es besteht im übrigen keine Einigkeit über seine Existenz).

dimensionslose Kopplungskonstante:  $\frac{G_N m^2}{\hbar c} \simeq 6 \cdot 10^{-39}$   $m = 1 \text{ GeV}$

Reichweite:  $\Delta x = \infty$

## Schwache Wechselwirkung

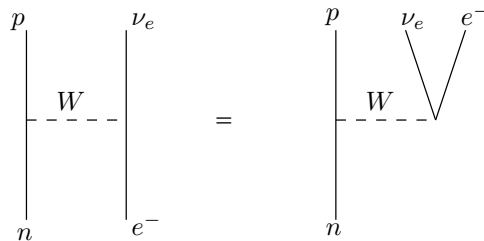


Abbildung 5.2.:  $\beta$ -Zerfall des Neutrons

$$V_{schw} = \frac{g^2}{r} \exp\left(-\frac{m_W r}{\hbar c}\right) = \frac{g^2}{q^2 + m_W^2}$$

Die Konstante  $g$  kann als eine Art „schwache Ladung“ verstanden werden.

Kopplungskonstante:  $\frac{g^2}{\hbar c} \simeq 4 \cdot 10^{-3}$

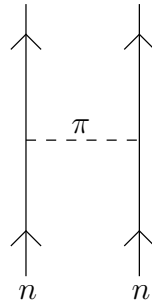
Reichweite:  $\Delta x = 2 \cdot 10^{-18} \text{ m}$

## Starke Wechselwirkung

Nukleonen wechselwirken untereinander über den Austausch von Pionen (Abbildung 5.3).

$$V_{stark} = \frac{g_s^2}{r} \exp\left(-\frac{m_\pi r}{\hbar c}\right) = \frac{g_s^2}{q^2 + m_\pi^2}$$

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

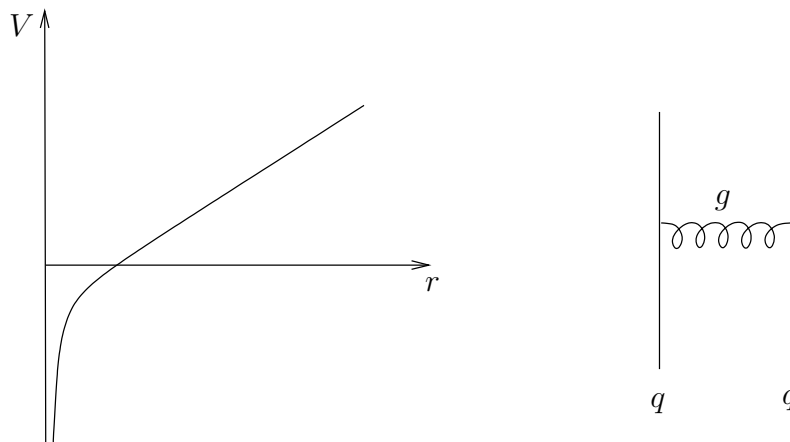


**Abbildung 5.3.:** Pion-Austausch zwischen Neutronen

Zwischen Quarks läuft die Wechselwirkung über den Austausch von Gluonen ab. Das Potential sieht hier etwas anders aus, da Quarks nicht als freie Teilchen, sondern nur in gebundenen Zuständen auftreten können. Bei kleinen Abständen ist das Potential von der gleichen Form wie das elektromagnetische (in beiden Fälle masselose Austauschteilchen). Bei großen Distanzen beobachtet man dagegen ein lineares Anwachsen.

$$V_{\text{stark}} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr \quad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad k \simeq 1 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}}$$

Versucht man also zwei Quarks zu trennen, so ist bald die potentielle Energie so groß, daß ein neues Quark-Antiquark-Paar erzeugt wird. Der Effekt, daß Quarks nicht als freie Teilchen vorkommen können, wird als confinement bezeichnet.



**Abbildung 5.4.:** Potential der starken Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluon-Austausch

Kopplungskonstante:  $\frac{g_s^2}{\hbar c} \simeq 15$   
 Reichweite:  $\Delta x = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

In Tabelle 5.1 sind noch einmal die wichtigsten Charakteristika der Wechselwirkungen zusammengestellt.

**Tabelle 5.1.:** Übersicht über die Eigenschaften der Wechselwirkungen (die erste Zeile in der Spalte „starke WW“ steht für die Wechselwirkung zwischen Nukleonen, die zweite für die Quarks)

Wechselwirkung	starke	elektromagn.	schwache	Gravitation
Kopplungskonstante	$\frac{g_s^2}{\hbar c} \simeq 15$ $\alpha_s \simeq 1$	$\alpha \simeq 1/137$	$\frac{g^2}{\hbar c} \simeq 4 \cdot 10^{-3}$	$\frac{G_N m^2}{\hbar c} \simeq 6 \cdot 10^{-39}$
Austauschboson	$\pi$ Gluon	Photon	$W^\pm, Z^0$	(Graviton)
Masse des Austauschbosons	139 MeV 0	0	90 GeV	?
relative Stärke im Abstand 1 fm	1	$10^{-2}$	$10^{-13}$	$10^{-38}$
Reichweite	$10^{-15}$ m	$\infty$	$10^{-18}$ m	$\infty$
typische Zeitskala	$10^{-23}$ s	$10^{-20}$ s	$10^{-10}$ s	?

Man kann nun die Teilchen danach klassifizieren, an welchen Wechselwirkungen sie teilnehmen:

**Leptonen** unterliegen nicht der starken Wechselwirkung, sie sind Fermionen, zu ihnen zählen z.B.  $e^-$  und  $\mu$

**Hadronen** unterliegen der starken Wechselwirkung, kommen als Fermionen und Bosonen vor  
 Bosonen: Mesonen ( $\pi, \dots$ )  
 Fermionen: Baryonen ( $n, p, \dots$ )

**Austauschteilchen** ( $\gamma, W^\pm, Z^0, \text{Gluonen}$ ) sind Bosonen

Ebenfalls sinnvoll ist auch die eben schon aufgetauchte die Unterscheidung von Fermionen und Bosonen: Fermionen (z.B. Elektron, Proton, Neutrinos, Quarks, ...) haben halbzahligem, Bosonen (z.B. Photon, Pionen, ...) ganzzahligem Spin. Auch ihre Zustandsdichten sind unterschiedlich:

$$\rho(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right) \pm 1}$$

wobei das Pluszeichen für die Fermionen, das Minuszeichen für die Bosonen gilt. Außerdem unterscheiden sie sich in Bezug auf die Symmetrie einer Mehrteilchenwellenfunktion unter Teilchenaustausch. Für Fermionen ist sie antisymmetrisch ( $\psi(1,2) = -\psi(2,1)$ ), für Bosonen symmetrisch ( $\psi(1,2) = \psi(2,1)$ ).

## 5.4. Antiteilchen

Die Hamiltonfunktion der klassischen Mechanik für ein freies relativistisches Teilchen ist

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

$$H_{\text{kl}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

wobei  $m$  die Ruhemasse des Teilchens bezeichnet. Dieser Ausdruck kann nicht naiv in die Quantenmechanik übernommen werden, da er auf die Wellengleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \psi$$

beziehungsweise

$$\left( \mathbf{p}_0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} \right) \psi = 0 \quad \text{da} \quad p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

führt. Diese Form ist aufgrund der Asymmetrie zwischen den Komponenten  $p_0$  und  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) des Energie-Impuls Vierervektors als Ausgangspunkt für eine relativistische Theorie nicht geeignet. Die relativistisch invariante Wellengleichung ist

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2) \psi$$

beziehungsweise

$$(\mathbf{p}_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc) \psi = 0$$

und geht auf Dirac zurück. Die  $\alpha_i$  und  $\beta$  sind jetzt  $4 \times 4$ -Matrizen und  $\psi$  ist eine vierkomponentige Wellenfunktion. Die beiden Gleichungen sind aber nicht vollständig äquivalent, da die Dirac-Gleichung auch Lösungen mit negativer Energie  $p_0$  zuläßt. Darüber hinaus hat sie weitere weitreichende Konsequenzen (z.B. impliziert sie die Existenz des Spins), die zu diskutieren hier aber zu weit führen würde.

Dirac war der Ansicht, daß die Lösungen mit negativer Energie mit real existierenden Teilchen, den Antiteilchen, in Verbindung zu bringen sei. Als erstes Antiteilchen wurde dann das Positron als Produkt einer Wechselwirkung eines Teilchens der kosmischen Strahlung mit Materie entdeckt. Man kann die Antiteilchen als Teilchen mit negativer Energie, die sich „rückwärts“ in der Zeit bewegen, interpretieren. Zu jedem Teilchen existiert ein Antiteilchen, es kommt jedoch vor, daß Teilchen und Antiteilchen identisch sind.

Bezeichnet werden die Antiteilchen mit dem Symbol für das Teilchen mit einem Querstrich:

$$p \leftrightarrow \bar{p} \quad \nu \leftrightarrow \bar{\nu} \quad n \leftrightarrow \bar{n}$$

Teilchen und Antiteilchen haben die gleiche Masse, Lebensdauer, Spin und Isospin; alle ladungsähnlichen Quantenzahlen (elektrische Ladung, Baryonenzahl, Leptonenzahl, Strangeness, ...) haben entgegengesetztes Vorzeichen.

Wie oben schon erwähnt können Fermionen nur als Teilchen-Antiteilchen-Paar erzeugt werden:



$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

Ein Paar kann sich vernichten ( $\rightarrow$  Vernichtungsstrahlung):

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \quad \text{oder} \quad \gamma + \gamma + \gamma$$

Der Zerfall in nur ein Photon ist aufgrund von Impulserhaltung nicht möglich.

## 5.5. Leptonen

Die Leptonen bilden eine Gruppe von Elementarteilchen, d.h. sie haben nach heutigem Kenntnisstand keine Substruktur und können also als punktförmig angesehen werden ( $r < 10^{-18}$  m). Es sind deshalb auch keine Anregungen möglich.

Alle Leptonen haben Spin 1/2. Es gibt drei Generationen von je zwei Leptonen, von denen eins geladen und das andere elektrisch neutral ist:

Generation	$q = -1$	$q = 0$	Leptonzahl
1	$e^-$	$\nu_e$	$L_e = 1 \quad L_\mu = 0 \quad L_\tau = 0$
2	$\mu^-$	$\nu_\mu$	$L_e = 0 \quad L_\mu = 1 \quad L_\tau = 0$
3	$\tau^-$	$\nu_\tau$	$L_e = 0 \quad L_\mu = 0 \quad L_\tau = 1$

Massen und Lebensdauern:

$$\begin{aligned} m_e &= 511 \text{ keV}/c^2 && \text{stabil} \\ m_\mu &= 106 \text{ MeV}/c^2 && \tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ m_\tau &= 1784 \text{ MeV}/c^2 && \tau_\tau = 3 \cdot 10^{-13} \text{ s} \end{aligned}$$

Durch den Nachweis von Neutrino-Oszillationen (Kapitel 7.4) scheint auch eine endliche Ruhemasse der Neutrinos außer Frage zu stehen. Die Beobachtung von Oszillationen erlaubt aber keinen Rückschluss auf die Größe der Neutrinomasse, direkte Messungen haben bisher nur obere Grenzen geliefert:

$$\begin{aligned} m_{\nu_e} c^2 &< 1 \text{ eV} \\ m_{\nu_\mu} c^2 &< 0,2 \text{ MeV} \\ m_{\nu_\tau} c^2 &< 18,2 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Antileptonen:

Generation	$q = +1$	$q = 0$	Leptonzahl
1	$e^+$	$\bar{\nu}_e$	$L_e = -1 \quad L_\mu = 0 \quad L_\tau = 0$
2	$\mu^+$	$\bar{\nu}_\mu$	$L_e = 0 \quad L_\mu = -1 \quad L_\tau = 0$
3	$\tau^+$	$\bar{\nu}_\tau$	$L_e = 0 \quad L_\mu = 0 \quad L_\tau = -1$

Das Myon zerfällt in ein Elektron und zwei Neutrinos. Dabei muss neben den anderen Erhaltungsgrößen auch die Leptonzahl erhalten sein:

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

$$\begin{array}{cccc}
 \mu^- & \rightarrow & e^- & + & \bar{\nu}_e & + & \nu_\mu \\
 q: & -1 & -1 & & 0 & & 0 \\
 L_e: & 0 & 1 & & -1 & & 0 \\
 L_\mu: & 1 & 0 & & 0 & & 1
 \end{array}$$

Das Tauon hat aufgrund seiner deutlich größeren Masse in eine Vielzahl von Zerfallsmöglichkeiten. Dies führt zu der kurzen Lebensdauer, weil im Endzustand ein großes Phasenraumvolumen zur Verfügung steht. Generell gilt für Zerfälle der schwachen Wechselwirkung  $\tau \propto \Delta E^5$ , wobei  $\Delta E$  die freigesetzte Energie ist.

Einige mögliche Zerfälle des Tauons:

$$\begin{array}{l}
 \tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \\
 \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \\
 \nu_\tau + \pi^+ \\
 \nu_\tau + \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 \\
 \vdots
 \end{array}$$

### 5.6. Zerfälle und Resonanzzustände

Über die Unschärferelation  $\Delta t \Delta E \geq \hbar$  ist die Lebensdauer eines instabilen Zustands mit einer Unschärfe in seiner Energie verknüpft. Für Zerfälle, die über die starke Wechselwirkung ablaufen, wird die Lebensdauer unmeßbar klein, man gibt deshalb lieber die Zerfallsbreite  $\Gamma$  an.

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

Das Zerfallsgesetz läßt sich dann auch schreiben als

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)$$

Kann ein Zustand über verschiedene Kanäle zerfallen, so ist die totale Breite die Summe der partiellen Breiten  $\Gamma_i$  für jeden Kanal:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

Die Wellenfunktion eines zerfallenden Zustands mit zentraler Energie  $E_R$  kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\psi(t) = \psi(0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(E_R - i\frac{\Gamma}{2}\right) t\right) = \psi_0 \exp\left(-i\frac{E_R t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2\hbar}\right)$$

Die Intensität ist dann wie erwartet

$$I(t) = \psi^* \psi = \psi_0^2 \exp\left(-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)$$

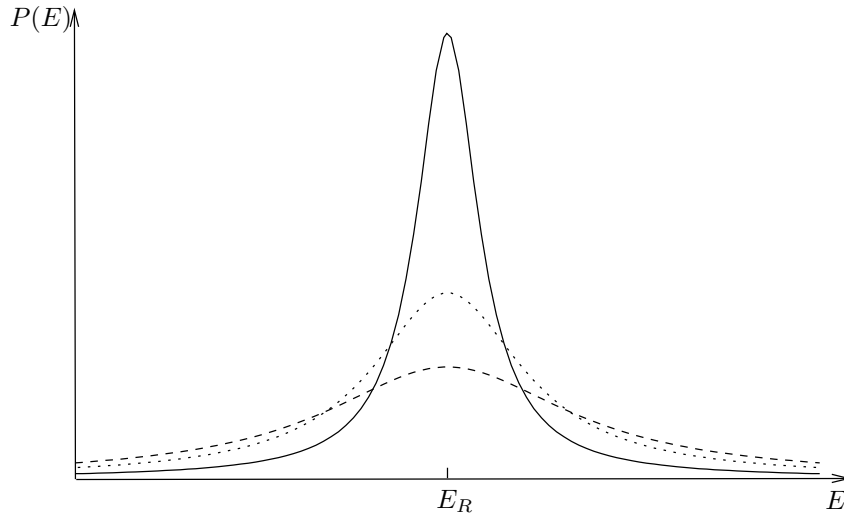
Durch Fouriertransformation erhält man  $\psi(E)$ :

$$\begin{aligned}\psi(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \psi(t) e^{iEt/\hbar} dt \\ &= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-t \left(\frac{i}{\hbar}(E_R - E) + \frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\right) dt \\ &= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(E - E_R) + i\Gamma/2}\end{aligned}$$

Die Energieverteilung ist dann

$$\begin{aligned}P(E) &= \mathcal{N} \psi(E) \psi^*(E) & \mathcal{N} &= \frac{\Gamma}{\hbar^2 \psi_0^2} \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}\end{aligned}$$

$\mathcal{N}$  ist eine Normierungskonstante. In Abbildung 5.5 ist  $P(E)$  für verschiedene Werte von  $\Gamma$  zu sehen.  $\Gamma$  ist die Halbwertsbreite der Verteilung.



**Abbildung 5.5.:** Energieverteilung instabiler Zustände für verschiedene Werte von  $\Gamma$

Der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $a + b \rightarrow c$ , bei der aus den Teilchen  $a$  und  $b$  ein Zustand  $c$  mit zentraler Energie  $E_R$  gebildet wird, ist ebenfalls proportional zu  $\psi(E)\psi^*(E)$ :

$$\sigma(E) = \sigma_{\max} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

Dies ist die sog. Breit-Wigner-Resonanzformel. Wird ein Zustand durch einen Kanal  $i$  erzeugt und zerfällt durch einen Kanal  $j$ , so bekommt man den Wirkungsquerschnitt für den ganzen Prozess (Erzeugung und Zerfall), indem man die Formel mit  $\Gamma_i \Gamma_j / \Gamma^2$  multipliziert.

### 5.7. Hadronen und Quarkmodell

Hadronen sind in großer Vielzahl bekannt. Sie sind aus Quarks zusammengesetzt und werden durch die starke Wechselwirkung zusammengehalten. Die Beschreibung der Quarks und ihrer Wechselwirkungen (Gluonaustausch) ist Gegenstand der Quantenchromodynamik (QCD).

Die Quarks sind wie die Leptonen Elementarteilchen, haben Spin  $1/2$  und treten in drei Generationen auf:

Generation	Flavour	$q$	$m$	$I_3$	S	C	B	T	A
1	d (down)	$-1/3$	$\simeq 2 \text{ MeV}$	$-1/2$	0	0	0	0	$1/3$
	u (up)	$+2/3$	$\simeq 5 \text{ MeV}$	$+1/2$	0	0	0	0	$1/3$
2	s (strange)	$-1/3$	$\simeq 95 \text{ MeV}$	0	$-1$	0	0	0	$1/3$
	c (charm)	$+2/3$	$\simeq 1,3 \text{ GeV}$	0	0	1	0	0	$1/3$
3	b (bottom)	$-1/3$	$\simeq 4,5 \text{ GeV}$	0	0	0	$-1$	0	$1/3$
	t (top)	$+2/3$	$\simeq 173 \text{ GeV}$	0	0	0	0	1	$1/3$

Mit  $m$  sind die sog. Stromquarkmassen (also die Massen, die die Quarks alleine hätten) gemeint.  $I_3$  ist die z-Komponente des Isospins, einer Eigenschaft der leichten Quarks (u und d) mit der Algebra eines Spins. Der Isospin wird in Kapitel 8 noch genauer diskutiert. Die Quantenzahlen S, C, B, T geben die Anzahl der enthaltenen schweren Quarks eines bestimmten Flavours an; daß das s-Quark Strangeness  $S=-1$  hat, ist historisch bedingt. A ist die Baryonenzahl und gibt die Anzahl der enthaltenen Quarks an. Bei diesen Quantenzahlen handelt es sich um additive Erhaltungsgrößen, die in Kapitel 7 behandelt werden. Für das bottom-Quark findet man manchmal auch die Bezeichnung beauty.

Bei den Antiquarks sind die Vorzeichen von  $q$ ,  $I_3$ , S, C, B, T und A umgekehrt.

Die Quarks besitzen noch eine weitere Eigenschaft: die Farbladung. Sie hat mit Farbe im herkömmlichen Sinne nichts zu tun und spielt in der QCD in etwa die Rolle, die die elektrische Ladung im Elektromagnetismus innehat. Es gibt drei Farben: rot, grün und blau sowie die Antifarben (anti-rot, anti-grün und anti-blau). Dabei kann jedes Quark jede Farbe annehmen, jedes Antiquark jede Antifarbe. Die Gluonen tragen jeweils eine Farbe und eine Antifarbe. Eigentlich würde man  $3^2 = 9$  mögliche Kombinationen erwarten, aber eine davon ist farbneutral, so daß es 8 verschiedene Gluonen gibt. Alle gebundenen Zustände sind farblos oder farbneutral. Dies kann auf zwei Arten erreicht werden:

- durch die Kombination von Farbe und Antifarbe, also Zustände aus einem Quark und einem Antiquark (Mesonen)

- durch alle drei Farben zusammen, also Zustände aus drei Quarks (Baryonen)

Wie zuvor schon erwähnt wechselwirken Quarks über den Austausch von Gluonen und kommen nicht als freie Teilchen vor (confinement).

## Mesonen

Die Mesonen können Spin 0 oder 1 haben, sind also Bosonen. Energetisch bevorzugt sind Zustände mit  $S=0$  und  $L=0$ . Sie heißen pseudoskalare Mesonen, da ihre Wellenfunktion  $J=0$  und negative Parität hat (s. Kapitel 9.1). Aus den drei leichtesten Quarks (u, d, s) können dann  $3 \cdot 3 = 9$  Mesonen gebildet werden, sie sind in Tabelle 5.2 aufgeführt. Dieses Nonett zerfällt in ein Oktett und ein Singlett ( $\eta'$ ).  $\pi^+$  ist das Antiteilchen zu  $\pi^-$ , das  $\pi^0$  ist sein eigenes Antiteilchen.

**Tabelle 5.2.:** pseudoskalare Mesonen (S=Strangeness)

Meson	Quark-Kombination	$I$	$I_3$	$S$	Masse / MeV
$\pi^-$	$d\bar{u}$	1	-1	0	140
$\pi^+$	$u\bar{d}$	1	1	0	140
$\pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	1	0	0	135
$K^+$	$u\bar{s}$	1/2	1/2	+1	494
$K^0$	$d\bar{s}$	1/2	-1/2	+1	498
$K^-$	$\bar{u}s$	1/2	-1/2	-1	494
$\bar{K}^0$	$\bar{d}s$	1/2	1/2	-1	498
$\eta$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$	0	0	0	549
$\eta'$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(d\bar{d} + u\bar{u} + s\bar{s})$	0	0	0	958

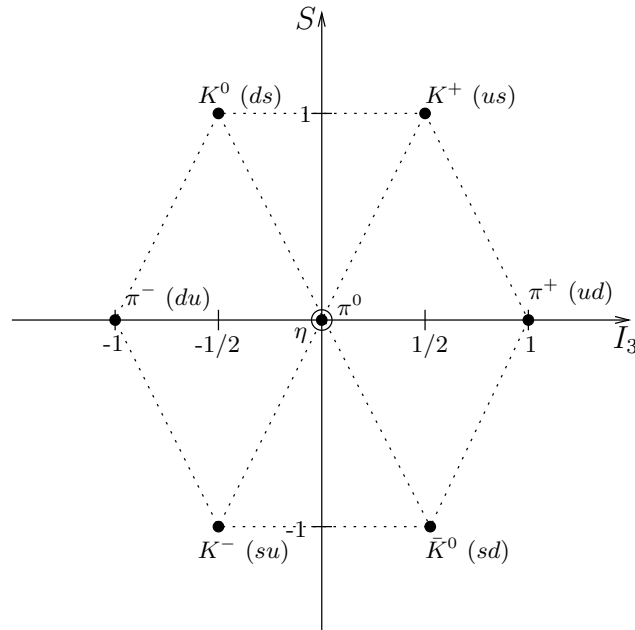
Man kann das Oktett auch in ein Quantenzahl-Diagramm eintragen (Abbildung 5.6). Diese Art von Diagramm stammt aus der Gruppentheorie und heißt Gewichtsdiagramm. Mit den Mitteln der Gruppentheorie lassen sich die gebundenen Zustände der Quarks ohne großen Aufwand systematisch konstruieren. Zu beachten ist hier, daß das  $\pi^0$  zu einem Isospin-Triplett gehört, während das  $\eta$  ein Isospin-Singlett ist. Das nächste Nonett hat  $S=1$  und  $L=0$ , seine Mitglieder heißen Vektormesonen. Sie lassen sich ähnlich wie die pseudoskalaren Mesonen in ein Diagramm einordnen (Abbildung 5.7). Die Quarkzusammensetzung ist wie bei den pseudoskalaren Mesonen, allerdings muß man jetzt davon ausgehen, daß die beobachteten Mesonen  $\phi$  und  $\omega$  Linearkombinationen aus dem Singlett und dem Zustand mit  $S = I = 0$  aus dem Oktett sind.

Es gibt weitere Mesonen mit höheren Bahndrehimpulsen, diese sind dann deutlich schwerer (z.B. 2050 GeV bei  $L = 4$ ).

## Intermezzo: Entdeckung der schweren Quarks

Schwere Quarks können mit ihrem Antiquark einen gebundenen Zustand ähnlich dem Positronium bilden. Das c- und das b-Quark wurden in solchen auch als Quar-

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen



**Abbildung 5.6.:** Die leichten pseudoskalaren Mesonen

konium bezeichneten Zuständen entdeckt.

Das Charmonium ( $c\bar{c}$ ) wurde von zwei Gruppen am SLAC (Stanford) und am BNL (Brookhaven) praktisch gleichzeitig gefunden (1974). Am SLAC wurde ein  $e^+e^-$ -Collider verwendet, am BNL wurden Protonen auf ein Be-Target geschossen. Der Grundzustand wurde von der einen Gruppe  $\Psi$  und von der anderen  $J$  getauft und läuft heute unter dem Namen  $J/\Psi$ -Meson. Es hat eine Masse von 3097 MeV und kann u.a. in ein Elektron- oder Myon-Paar zerfallen.

1977 wurde am Fermilab im Massenspektrum in der Reaktion

$$400 \text{ GeV } p + Be, Cu, Pt \rightarrow \mu^+ + \mu^- + \text{irgendwas}$$

eine Resonanz bei 10 GeV gefunden: das  $\Upsilon$  ( $b\bar{b}$ ).

Sowohl beim Bottonium als auch beim Charmonium sind inzwischen auch angeregte Zustände bekannt.

1995 gelang am Tevatron (Fermilab) die Erzeugung von  $t\bar{t}$ -Paaren in  $p\bar{p}$ -Kollisionen mit einer cms-Energie von 1,8 TeV. Das t-Quark ist so schwer (174 GeV), daß es zerfällt bevor es gebundene Zustände bilden kann. Es zerfällt hauptsächlich in ein W-Boson und ein b-Quark:

$$t \rightarrow W^+ + b$$

$$\bar{t} \rightarrow W^- + \bar{b}$$

Das W-Boson zerfällt in ein Lepton- oder ein Quark-Paar, das b-Quark erfährt einen Prozess, der als Hadronisierung bekannt ist und zu einem sog. Jet (eng gebündelter

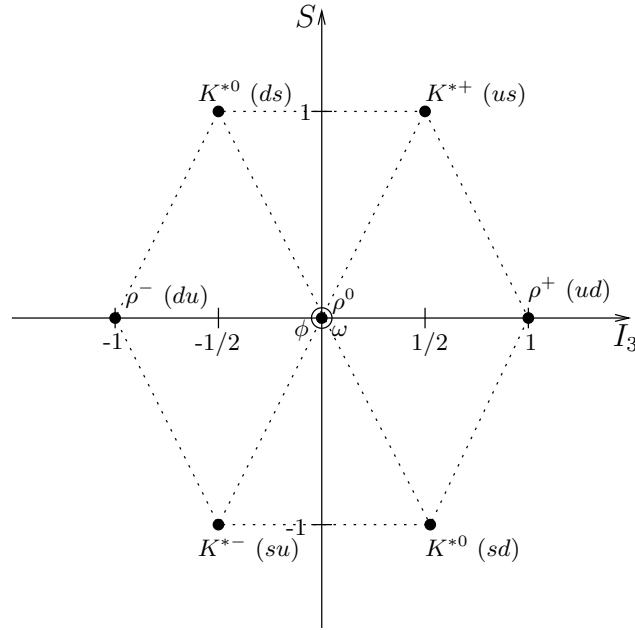


Abbildung 5.7.: Die leichten Vektormesonen

Strahl aus Hadronen) führt. Da ein Quark alleine ja nicht existieren kann, entstehen  $q\bar{q}$ -Paare, die sich zu Hadronen zusammenfinden. Wie dieser Prozess im einzelnen abläuft, ist noch nicht endgültig geklärt. In Abbildung 5.8 ist ein möglicher Zerfall eines  $t\bar{t}$ -Paares dargestellt.

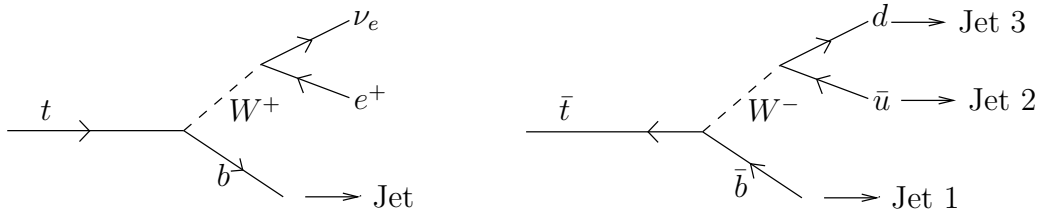


Abbildung 5.8.: Beispiel für den Zerfall eines  $t\bar{t}$ -Paares

Hadronen, die ein  $b$ -Quark enthalten, zerfallen typischerweise nach  $10^{-12}$  s. Das reicht, um im Laborsystem vor dem Zerfall eine Strecke von einigen mm zurückzulegen. Das  $W$ -Boson und das  $t$ -Quark leben wesentlich kürzer. Bei entsprechender Auflösung des Detektors kann man ein  $b$ -Quark daher leicht am sekundären Vertex erkennen.

### Baryonen

Baryonen sind gebundene Zustände aus drei Quarks bzw. Antiquarks (Antibaryonen). Sie sind Fermionen mit Spin  $1/2$  oder  $3/2$ , ihre elektrische Ladung kann zwischen  $-1e$  und  $+2e$  liegen.

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

Die Baryonen treten wie die Mesonen in Multipletts auf. Das niederenergetischste ist ein Oktett mit  $L = 0$  und  $S = 1/2$  (es werden wieder nur die leichten Quarks  $u$ ,  $d$  und  $s$  berücksichtigt). Teilchen werden oft durch die Angabe der Größe  $J^\pi$  charakterisiert, wobei  $J$  der Gesamtdrehimpuls und  $\pi$  die Parität (Verhalten unter Inversion der räumlichen Koordinaten, siehe Kapitel 9.1) sind. Die Mitglieder des angesprochenen Oktetts (Abbildung 5.9) haben alle  $J^\pi = 1/2^+$ .  $\Lambda^0$  ist ein Isospin-Singlett,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^0$ ,  $\Sigma^-$  bilden ein Isospin-Triplett, deshalb können zwei  $uds$ -Kombinationen auftreten.

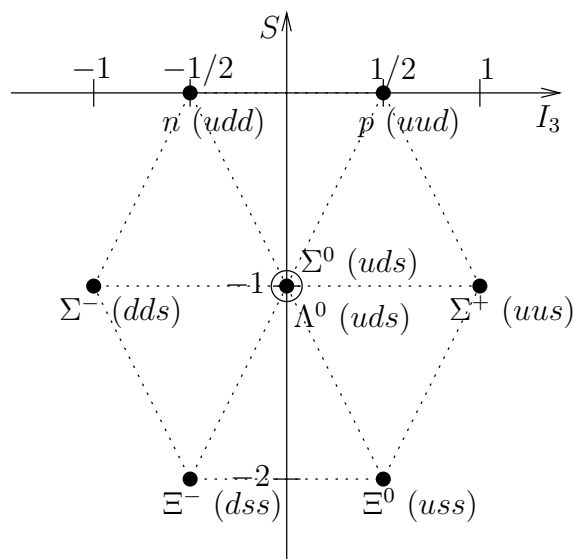


Abbildung 5.9.: Das  $\frac{1}{2}^+$  Baryon-Oktett

Die Massen sind:

$N$	: $\simeq 939$ MeV
$\Lambda^0$	: $\simeq 1116$ MeV
$\Sigma$	: $\simeq 1193$ MeV
$\Xi$	: $\simeq 1318$ MeV

Die folgenden Betrachtungen sollen helfen, die Existenz der Farbladung plausibel zu machen.

Ohne Berücksichtigung der Farbladung ist die Wellenfunktion für ein Baryon das Produkt aus der Orts-, der Spin- und der Flavour-Wellenfunktion:

$$\psi(1,2,3) = \psi_r(1,2,3) \cdot \chi_s(1,2,3) \cdot \varphi_f(1,2,3)$$

Da die Quarks (hier durch 1,2,3 gekennzeichnet) Fermionen sind, muß die Wellenfunktion antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier Quarks sein. Betrachtet man nun z.B. den Zustand  $u\uparrow u\uparrow u\uparrow$  ( $\uparrow$  und  $\downarrow$  symbolisieren die beiden möglichen Einstellungen des Spins) mit  $L = 0$ , so fällt auf, daß alle drei Faktoren der Wellenfunktion symmetrisch sind. Der Zustand wäre also eigentlich verboten, aber er existiert. Es handelt sich um das  $\Delta^{++}$ , ein Mitglied des  $\frac{3}{2}^+$ -Dekupletts. Es ist der



erste angeregte Zustand des Protons mit einer Masse von 1232 MeV. Die Lösung des Problems besteht darin, daß es einen weiteren Freiheitsgrad, die Farbladung, gibt. Die Farbwellenfunktion taucht als weiterer Faktor der Gesamtwellenfunktion auf und ist antisymmetrisch (und insgesamt farbneutral):

$$\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i,j,k=r,g,b} \epsilon_{ijk} u_i u_j u_k = \frac{1}{\sqrt{6}} (u_r u_g u_b + u_g u_b u_r + u_b u_r u_g - u_r u_b u_g - u_g u_r u_b - u_b u_g u_r)$$

$r$ ,  $g$  und  $b$  stehen für die drei Farben. Somit ist die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch und die Welt wieder in Ordnung.

Die leichtesten Baryonen sind das Proton ( $u\uparrow u\uparrow d\downarrow$ ) mit 938,3 MeV und das Neutron ( $u\uparrow d\downarrow d\uparrow$ ) mit 939,6 MeV; beide haben  $J = 1/2$ ,  $L = 0$ ,  $S = 1/2$ . Es soll jetzt stellvertretend für das ganze Oktett die Wellenfunktion des Protons konstruiert werden. Die Ortswellenfunktion ist symmetrisch und die Farbwellenfunktion antisymmetrisch, also muß das Produkt aus Spin- und Flavourwellenfunktion symmetrisch sein. Zuerst werden zwei Quarks in das antisymmetrische Spin-Singlett gesteckt.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

Um den gesamten Ausdruck symmetrisch zu machen, braucht man eine antisymmetrische Flavour-Kombination:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (ud - du)$$

Nun kommt noch das zweite  $u$ -Quark mit Spin  $\uparrow$  dazu:

$$(u\uparrow d\downarrow - u\downarrow d\uparrow - d\uparrow u\downarrow + d\downarrow u\uparrow) u\uparrow$$

Obwohl die Klammer symmetrisch ist, ist dies für den ganzen Ausdruck noch nicht der Fall. Man muß erst durch zyklische Permutation eine symmetrische Wellenfunktion erzeugen:

$$\begin{aligned} \phi_{sf}(p) = \frac{1}{\sqrt{18}} (2u\uparrow u\uparrow d\downarrow + 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow + 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow \\ - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow) \end{aligned}$$

Für die anderen Baryonen des  $\frac{1}{2}^+$ -Oktetts kann analog hierzu verfahren werden.

## Nachweis der drei Farben

Die Anzahl der Farben kann mithilfe hochenergetischer  $e^+e^-$ -Kollisionen, bei denen Fermion-Antifermion-Paare entstehen (Abbildung 5.10), bestimmt werden.

Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Myon-Paars ist

## 5. Charakterisierung von Elementarteilchen

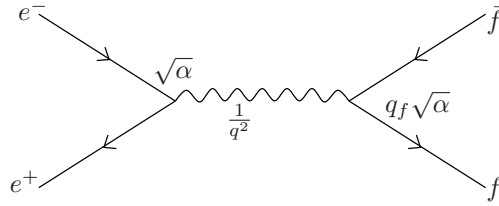


Abbildung 5.10.: Zur Bestimmung der Anzahl der Farben

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4}{3} \frac{\pi\alpha^2(\hbar c)^2}{s^2}$$

$s$  ist die Schwerpunktsenergie (=invariante Masse des Schwerpunkts). Bei LEP war  $s = 2E_e = 2 \cdot 100 \text{ GeV}$ .

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow u\bar{u}) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \frac{4}{9} \cdot N_{\text{Farb}}$$

Der Faktor  $4/9$  ist das Quadrat der elektrischen Ladung des  $u$ -Quarks und  $N_{\text{Farb}}$  die Anzahl der Farbladungen. Nach der Erzeugung des Quark-Paars kommt es natürlich wieder zur Hadronisierung. Zur experimentellen Bestimmung von  $N_{\text{Farb}}$  ist es günstig, das Verhältnis

$$R := \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_{\text{Farb}} \sum_f q_f^2$$

zu betrachten. Natürlich darf nur über die Flavours summiert werden, zu deren Erzeugung die Schwerpunktsenergie reicht. Für  $s = 30 \text{ GeV}$  können alle Quarks bis auf das  $t$  entstehen und man erhält für  $R$

$$R = N_{\text{Farb}} \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = N_{\text{Farb}} \frac{11}{9} = \frac{11}{3}$$

# 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

Aufschluß über die Struktur von Teilchen (z.B. Massen- und Ladungsverteilung) erhält man durch Streuexperimente aller Art. Die gewünschte Information steckt dabei wie so oft im Wirkungsquerschnitt. Diesen kann man wahlweise als Funktion des Streuwinkels  $\theta$ , des Raumwinkels  $\Omega$  oder des Energieübertrags  $E' - E$  betrachten. Die zu einer Sorte von Streuung gehörenden Wirkungsquerschnitte abzuleiten ist in den meisten Fällen recht aufwendig, so daß hier darauf verzichtet werden muß.

## 6.1. Elastische Streuung

### 6.1.1. Geladene, punktförmige Streupartner (Rutherford-Streuung)

Der klassische, nicht-relativistische Streuquerschnitt für die Streuung geladener, punktförmiger und spinloser Teilchen ist der Rutherfordsche Wirkungsquerschnitt. Das Projektil hat die Ladung  $ze$ , das Target  $Ze$ . Die kinetische Energie  $T_0$  wird als hinreichend klein angenommen, so daß der Rückstoß vernachlässigt werden kann.

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{16T_0^2 \sin^4(\theta/2)}$$

Das zugehörige Feynman-Diagramm ist in Abbildung 6.1 zu sehen. Es wird ein virtuelles Photon ausgetauscht, das den Viererimpuls  $q$  (bestehend aus Energie- und Impulsübertrag) trägt.

$$q = (E - E', \vec{p} - \vec{p}') = (\nu, \vec{q})$$

Im Schwerpunktsystem ist  $E = E'$  und  $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ , also  $q^2 = \vec{q}^2$  (Abbildung 6.2). Für  $q$  gilt dann

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin(\theta/2)$$

Mit  $T_0 = p^2/2m$  kann man dann den Wirkungsquerschnitt umschreiben:

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \frac{4m^2(zZe^2)^2}{16p^4 \sin^4(\theta/2)} = \frac{4m^2(zZe^2)^2}{q^4}$$

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

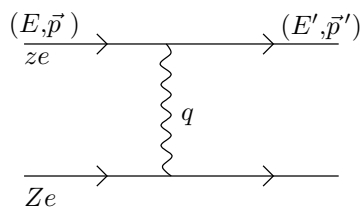


Abbildung 6.1.: Rutherford-Streuung

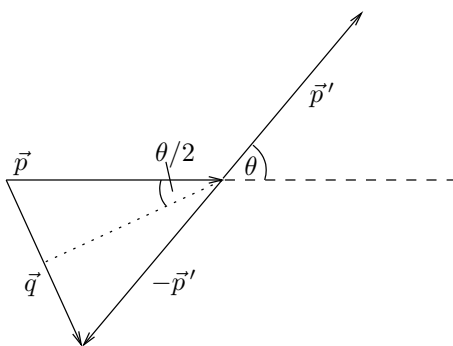


Abbildung 6.2.: Kinematik im cms

In der Quantenmechanik ist der Wirkungsquerschnitt durch die Streuamplitude  $f$  gegeben:

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = |f(q^2)|^2$$

In der Bornschen Näherung (ein- und auslaufende Teilchen werden durch ebene Wellen beschrieben) errechnet sich  $f(q^2)$  folgendermaßen:

$$f(q^2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{x}) \exp\left(i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}\right) d^3x \quad \text{mit} \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Es soll hier ein sphärisch symmetrisches Potential  $V(\vec{x}) = V(r)$  angenommen werden.

$$f(q^2) = -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) r^2 \underbrace{\int_{-1}^1 \exp\left(i\frac{qr \cos\theta}{\hbar}\right) d\cos\theta}_{\frac{2\hbar}{qr} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)} dr = -\frac{2m}{\hbar q} \int_0^\infty V(r) r \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr$$

Im Fall der Rutherford-Streuung ist das Potential das Coulombpotential des Kerns.

$$V(r) = -\frac{zZe^2}{r} \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Die Exponentialfunktion berücksichtigt die Abschwächung des Feldes durch die Elektronen ( $a \simeq 1 \text{ \AA} = 10^5 \text{ fm}$ ). Dann erhält man für die Streuamplitude

$$f(q^2) = -\frac{2mzZe^2}{|\vec{q}|^2 + (\hbar/a)^2}$$

wobei  $(\hbar/a)^2$  meistens vernachlässigt werden kann. Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann die gleiche Beziehung wie schon im klassischen Fall:

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = |f(q^2)|^2 = \frac{4m^2(zZe^2)^2}{q^4}$$

$$\frac{d\sigma^R}{dq^2} = \frac{d\sigma^R}{d\Omega} \frac{d\Omega}{dq^2} = \frac{d\sigma^R}{d\Omega} \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{d(4p^2 \sin^2(\theta/2))} = \frac{4m^2(zZe^2)^2 \pi}{q^4 p^2}$$

Im relativistischen Fall vereinfacht sich die Formel aufgrund von  $m^2/p^2 = 1$  zu

$$\frac{d\sigma^R}{dq^2} = \frac{4\pi(zZe^2)^2}{q^4} = \frac{4\pi(zZ)^2\alpha^2}{q^4}$$

Wenn man den Rückstoß berücksichtigen will, muß man noch eine kleine Korrektur anbringen:

$$\frac{d\sigma^R}{dq^2} = \frac{d\sigma^R}{dq_{cm}^2} \frac{E'}{E}$$

Wobei  $E$  die Energie des einfallenden Teilchens und  $E'$  die des gestreuten ist.

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M_{\text{target}}} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

### 6.1.2. Streuung relativistischer Spin 1/2 Teilchen

Die Streuung relativistischer Spin 1/2-Teilchen an einem spinlosen Target (z.B. Elektronen am Kern) wird durch den Mott-Querschnitt beschrieben.

$$\frac{d\sigma^M}{dq^2} = \frac{d\sigma^R}{dq^2} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \frac{4\pi Z^2 \alpha^2}{q^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Der zweite Term in der Klammer beschreibt die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Elektrons mit dem Feld des Kerns. Im Ruhesystem des Elektrons bewegt der Kern sich mit der Geschwindigkeit  $\beta$  und verursacht so den Strom  $\beta Ze$ . Die Helizität  $H$  beschreibt die Einstellung des Spins  $\vec{\sigma}$  relativ zum Impuls des Teilchens.

$$H = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{\sigma}| |\vec{p}|}$$

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

Ist der Spin parallel (antiparallel) zum Impuls ausgerichtet, so ist  $H = +1(-1)$ .  
Für relativistische Teilchen ist die Helizität erhalten.

Die Spinflipamplitude

$$d_{mm'}^{1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

trägt im Falle erhaltener Helizität zum Wirkungsquerschnitt mit  $\cos^2(\theta/2)$  bei.

### 6.1.3. Streuung von Elektronen an ausgedehnter Ladungsverteilung

Bei der Streuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen faktorisiert der Wirkungsquerschnitt in den Rutherford-Querschnitt und einen Formfaktor  $F(q^2)$ .

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{d\sigma^R}{dq^2} |F(q^2)|^2$$

Zur genaueren Untersuchung der Natur von  $F(q^2)$  betrachten wir noch einmal die quantenmechanische Streuamplitude und beschränken uns wieder auf sphärisch symmetrische Potentiale.

$$f(q^2) = -\frac{m}{2\pi} \int V(r) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3x$$

Nach der Poisson-Gleichung ist das Potential  $V$  durch die Ladungsdichte  $\rho$  festgelegt.

$$\Delta V(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})Ze^2 \quad \text{wobei} \quad \int \rho(\vec{x})d^3x = 1$$

Mit dem Greenschen Theorem ergibt sich

$$\begin{aligned} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} V(r) d^3x &= -\frac{1}{|\vec{q}|^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \Delta V(r) d^3x \\ &= \frac{4\pi Ze^2 \hbar^2}{q^2} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(r) d^3x \end{aligned}$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q^2)|^2 = \frac{4m^2 Z^2 e^4}{q^4} \underbrace{\left| \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(r) d^3x \right|^2}_{|F(q^2)|^2}$$

Der Formfaktor ist also die Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung.

$$F(q^2) = 4\pi\hbar \int \frac{\sin(|\vec{q}|r/\hbar)}{|\vec{q}|r} \rho(r) r^2 dr$$

Für kleine Werte von  $qr$  ( $qr \ll \hbar$ ) kann man den Sinus entwickeln und erhält

$$\begin{aligned} F(q^2) &= 4\pi \int_0^\infty \left( 1 - \frac{(qr)^2}{3!} + \frac{(qr)^4}{5!} - \dots \right) \rho(r) r^2 dr \\ &= 1 - \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{3!} + \frac{q^2 \langle r^4 \rangle}{5!} - \dots \end{aligned}$$

wobei

$$\langle r^2 \rangle = \int \rho(r) r^2 d^3x = 4\pi \int \rho(r) r^4 dr$$

der quadratisch gemittelte Ladungsradius ist.

Allgemein:

$$\langle r^n \rangle = \int \rho(r) r^n d^3x = 4\pi \int \rho(r) r^{n+2} dr$$

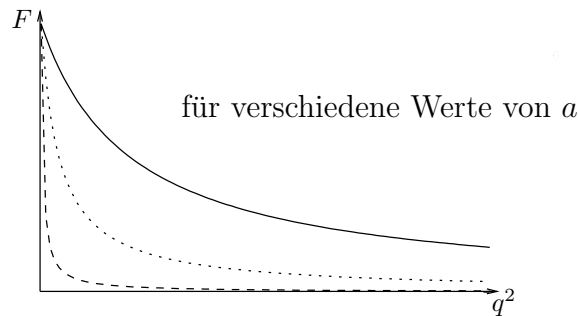
Einige Beispiele:

1. Punktladung:

$$\rho(r) = \delta(r) \Rightarrow F(q^2) = 1$$

2. exponentielle Verteilung:

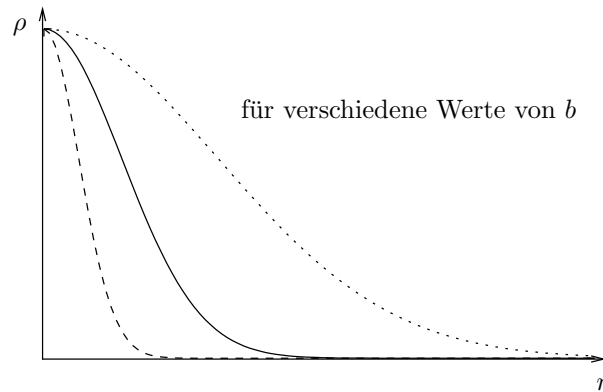
$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/a} \Rightarrow F(q^2) = \left( \frac{1}{1 + q^2 a^2 / \hbar^2} \right)^2$$



3. Gauss-Verteilung:

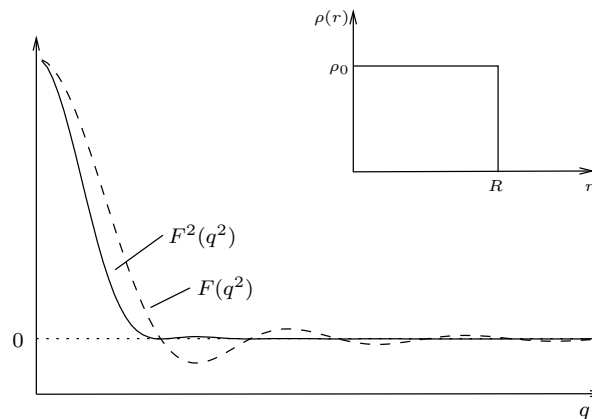
$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) \Rightarrow F(q^2) = \exp\left(-\frac{q^2 b^2}{4\hbar^2}\right)$$

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen



4. scharfe Kante:

$$F(q^2) = \frac{3(\sin(qR) - qR \cos(qR))}{(qR)^3}$$



### 6.1.4. Ladungsverteilung von Atomkernen

Die exakte Fourier-Transformation des gemessenen Formfaktors  $F(q^2)$  ist aufgrund des endlichen  $q^2$ -Bereichs und der Messfehler nicht möglich. Außerdem ist die Phase im Wirkungsquerschnitt durch das Betragsquadrat nicht zugänglich. Man muss also eine Modellverteilung so lange variieren, bis ihre Fourier-Transformierte mit den Messdaten übereinstimmt. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen am Kern ist in Abbildung 6.3 skizziert.

Die Ladungsverteilung von Atomkernen wird gut durch eine Fermi-Verteilung (Abbildung 6.4) wiedergegeben.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-c}{a}\right)}$$

Die Steilheit des Abfalls wird durch die Randdicke  $t$  charakterisiert.

$$t = r(0,1 \rho_0) - r(0,9 \rho_0) = 4a \ln 3 = 4,4 a$$



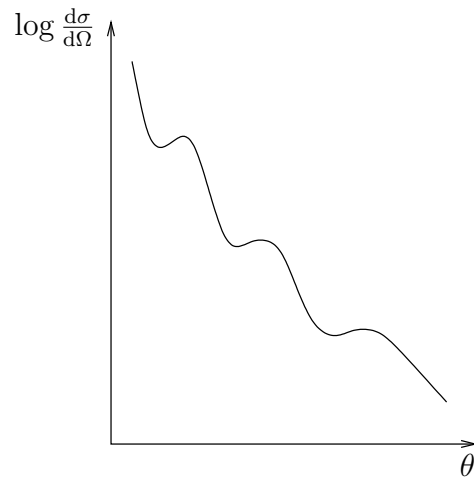


Abbildung 6.3.: Differentieller Wirkungsquerschnitt für Elektron-Kern Streuung

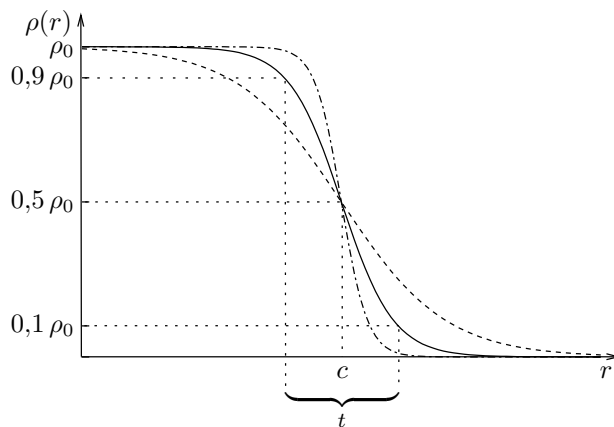


Abbildung 6.4.: Fermi-Verteilung für verschiedene Werte von  $a$

Für Atomkerne findet man

$$\begin{aligned} c[\text{fm}] &= 1,18 A^{1/3} - 0,48 \\ t[\text{fm}] &= 2,4 \end{aligned}$$

Auf die Frage, was denn nun eigentlich der Radius einer solchen Verteilung ist, sind verschiedene Antworten möglich. Der quadratisch gemittelte Radius (rms-Radius) ist für Atomkerne

$$R_{\text{rms}}^2 = \langle r^2 \rangle = 0,94 A^{1/3}$$

Für eine homogen geladene Kugel mit Radius  $R_k$  ist

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^{R_k} \frac{3}{4\pi R_k^3} r^4 dr = \frac{3}{5} R_k^2$$

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

Anstelle des rms-Radius wird oft auch der äquivalente Radius einer homogen geladenen Kugel angegeben, d.h.  $R_k = 1,29 R_{\text{rms}} = 1,2 A^{1/3}$  fm.

Die Massenverteilung kann untersucht werden, indem stark wechselwirkende Teilchen (z.B. Pionen) an Kernen gestreut werden. Aufgrund der Stärke der starken Wechselwirkung sind sie aber nur für die Nähe der Oberfläche sensitiv. Es stellt sich heraus, daß die Proton- und Neutron-Verteilung sehr ähnlich sind, bei neutronreichen Kernen beobachtet man eine dünne Neutronenhaut.

### 6.1.5. Elastische Elektron-Nukleon-Streuung

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier punktförmiger Spin 1/2 Teilchen ist der Dirac-Querschnitt:

$$\frac{d\sigma^D}{d\Omega} = \frac{d\sigma^R}{d\Omega} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{d\sigma^M}{d\Omega} \left( 1 - \frac{q^2}{2M^2c^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Der Term mit  $\cos^2(\theta/2)$  beschreibt die Wechselwirkung des Elektronenspins mit dem Strom des Kerns, der mit  $\sin^2(\theta/2)$  die Wechselwirkung des Nukleonspins mit dem Strom des Elektrons.

Das Vorzeichen des tan-Terms hängt von der verwendeten Metrik ab: In der Minkowski-Metrik ist  $q^2$  immer positiv, in der hier verwendeten ist  $q^2$  für elastische Streuung immer negativ.

Ein punktförmiges Proton hat das magnetische Moment  $\mu_P = 1 \cdot \mu_N$ , für ein punktförmiges Neutron ist  $\mu_n = 0$ . Ausgedehnte Nukleonen haben von diesen Werten abweichende magnetische Momente. Sie werden durch zwei Formfaktoren beschrieben, die unsere Unkenntnis der Nukleonstruktur parametrisieren:

$G_E(q^2)$  : beschreibt die Ladungsverteilung

$G_M(q^2)$  : beschreibt die Magnetisierungsverteilung (Stromverteilung)

Sie sind so normiert, daß sich für  $q^2 = 0$  die statischen Momente ergeben:

$$G_E^p(0) = +1 \quad G_E^n(0) = 0$$

$$G_M^p(0) = 2,79 \quad G_M^n(0) = -1,91$$

Der Wirkungsquerschnitt ist dann

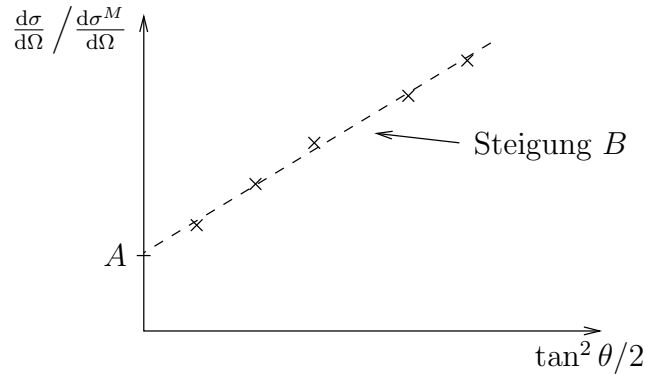
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^M}{d\Omega} \left( \frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2c^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2c^2}} - \frac{q^2}{2M^2c^2} G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Der Quotient aus dem gemessenen Wirkungsquerschnitt und dem Mott-Querschnitt ist von der Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \bigg/ \frac{d\sigma^M}{d\Omega} = A(q^2) + B(q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

Die Formfaktoren kann man bestimmen, indem man bei einem festen Wert von  $q^2$  den Wirkungsquerschnitt für verschiedene Streuwinkel mißt und  $\frac{d\sigma}{d\Omega} \bigg/ \frac{d\sigma^M}{d\Omega}$  gegen

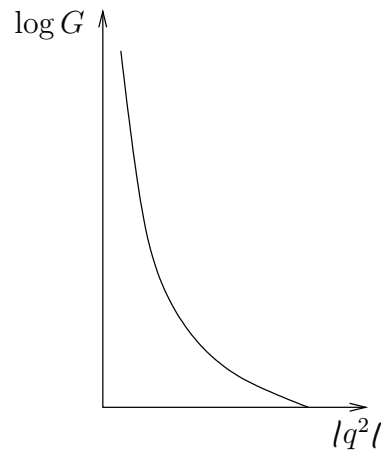
$\tan^2 \theta/2$  aufträgt. Die Werte liegen auf einer Geraden (Abbildung 6.5) aus deren Steigung man  $G_M$  bestimmen kann. Daraus und aus dem Achsenabschnitt bekommt man dann  $G_E$ . Das Verfahren ist als Rosenbluth-Plot bekannt.



**Abbildung 6.5.:** Rosenbluth-Plot zur Bestimmung der Nukleon-Formfaktoren

Die Formfaktoren der Nukleonen sind nicht alle unabhängig:

$$G_E^p(q^2) \simeq \frac{G_M^p(q^2)\mu_N}{\mu_p} \simeq \frac{G_M^n(q^2)\mu_N}{\mu_n} \equiv G(q^2)$$



**Abbildung 6.6.:** Formfaktor des Protons

$G(q^2)$  ist in Abbildung 6.6 skizziert. Empirisch findet man, daß der Formfaktor des Protons durch

$$G(q^2) = \frac{1}{(1 + |q^2|/0,71)^2} \quad [q^2] = \text{GeV}^2$$

beschrieben wird („dipole formula“). Dies ist die Fouriertransformierte einer exponentiellen Ladungsverteilung

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-4,3 \cdot r) \quad [r] = \text{fm}$$

Dies führt zu einem rms-Radius der Ladungsverteilung von

$$\langle r \rangle = 0,86 \text{ fm}$$

Außerdem stellt sich heraus, daß

$$G_M^n(q^2) \approx 0$$

Die Ladungsradien von Pionen und Kaonen kann man auf ähnliche Art und Weise bestimmen. Durch Streuung an den Hüllenelektronen des Wasserstoffs bestimmt man den elektrischen Formfaktor (Pionen und Kaonen haben Spin 0) und daraus den Radius.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle r_\pi \rangle &= (0,66 \pm 0,01) \text{ fm} \\ \langle r_K \rangle &= (0,53 \pm 0,05) \text{ fm} \end{aligned}$$

## 6.2. Inelastische Elektron-Nukleon-Streuung

Wenn man den Impulsübertrag  $q$  erhöht, um noch kleinere Strukturen der Nukleonen auflösen zu können, kommt man in Regionen, wo die Nukleonen das nicht mehr überleben. Sie werden angeregt oder brechen auseinander und es entstehen in Folge dessen weitere Hadronen. In jedem Fall wird aber die Streuung inelastisch. Im folgenden soll also die Reaktion

$$e + p \rightarrow e + X$$

untersucht werden (Abbildung 6.7). Die Masse der Hadronen im Endzustand wird mit  $W$  und die Protonmasse mit  $M$  bezeichnet.

$$\begin{aligned} p &= (E, \vec{p}) & p' &= (E', \vec{p}') \\ P &= (M, 0) & P' &= (E'_h, \vec{P}') & E'_h &= W + T \end{aligned}$$

Aus der Sicht des Elektrons ist

$$q^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 = \underbrace{E^2 - \vec{p}^2}_{m_e^2} + \underbrace{E'^2 - \vec{p}'^2}_{m_e^2} - 2EE' - 2|\vec{p}||\vec{p}'| \cos \vartheta$$

Unter Vernachlässigung der Elektronmasse vereinfacht sich der Ausdruck zu

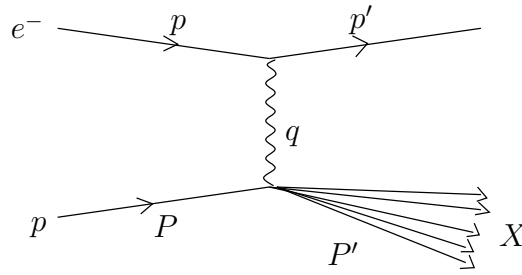


Abbildung 6.7.: Inelastische Elektron-Proton-Streuung

$$q^2 = -2|\vec{p}||\vec{p}'|(1 - \cos \vartheta) = -4|\vec{p}||\vec{p}'| \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \leq 0$$

Es handelt sich also um ein ortsartiges Intervall, d.h. es gibt ein Inertialsystem, in dem die zwei Ereignisse (Emission und Absorption eines virtuellen Photons) gleichzeitig aber räumlich getrennt passieren.

Aus der Sicht des Protons:

$$q^2 = (P' - P)^2 = (E'_h - M)^2 - \vec{P}'^2 = W^2 + M^2 - 2ME'_h$$

Insgesamt muss natürlich die Energie erhalten sein:

$$E + M = E' + E'_h \quad \Rightarrow \quad E - E' = E'_h - M \equiv \nu$$

$\nu$  ist der Energieübertrag. Damit kann man  $q^2$  im Laborsystem zu

$$q^2 = W^2 + M^2 - 2M(M + \nu) = W^2 - M^2 - 2M\nu$$

umschreiben. Allgemein, d.h. in jedem Bezugssystem, gilt

$$q^2 = W^2 - M^2 - 2Pq$$

Die Kollision ist durch die beiden Variablen

$$q^2 \quad \text{und} \quad \nu = \frac{-q^2 + W^2 - M^2}{2M}$$

vollständig bestimmt.

**Zur Erinnerung:** Bei der elastischen Streuung ist  $W^2 = M^2$  und  $q^2 = -2M\nu$  bzw.  $\nu = -q^2/2M$ . Also

$$E - E' = \frac{4EE' \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{2M} \quad \Rightarrow \quad E' = E \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Im Fall von  $\vartheta = \pi$  (Rückstreuung) bekommt man

$$E' = E \frac{1}{1 + \frac{2E}{M}}$$

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

Der Wirkungsquerschnitt ist jetzt also doppelt differentiell und enthält zwei Formfaktoren, die Funktionen von  $q^2$  und  $\nu$  sind und Strukturfunktionen heißen. Im Laborsystem gilt

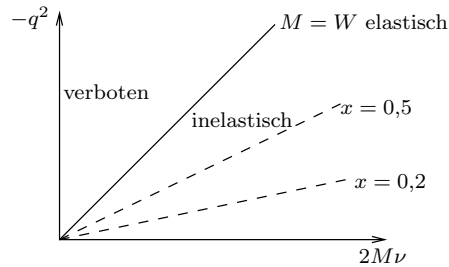
$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left( W_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2W_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

$W_{1,2}$  gehören zu den beiden Polarisationsrichtungen des Photons bzw. elektrischen und magnetischen Übergängen. Sie können aus Rosenbluth-Plots bestimmt werden.

Man kann eine neue Variable  $x$  definieren, die die Inelastizität der Streuung beschreibt:

$$x = \frac{-q^2}{2M\nu} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Im Fall elastischer Streuung ist  $x = 1$  (Abbildung 6.8), für inelastische Streuung ist  $x < 1$ , da  $W^2 > M^2$ .



**Abbildung 6.8.:** Gebiete elastischer bzw. inelastischer Streuung

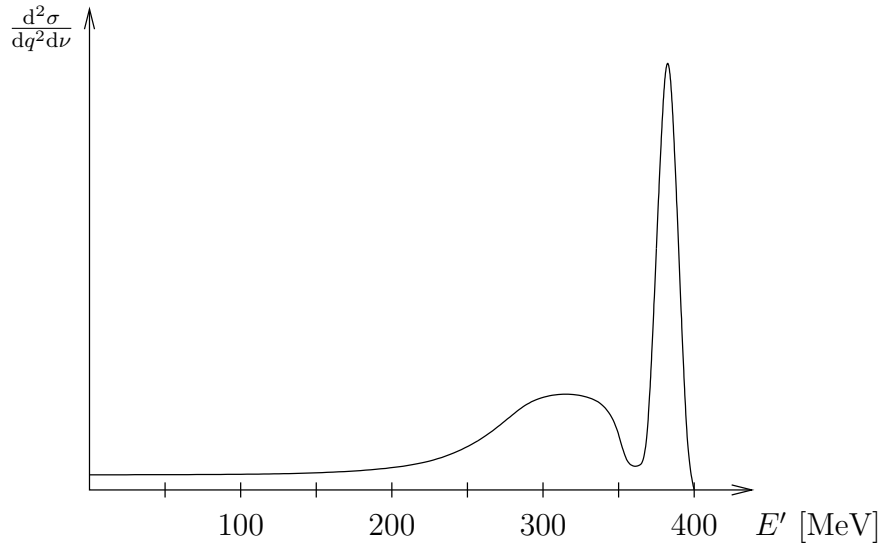
In Abbildung 6.9 ist der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von 400 MeV Elektronen an  ${}^4\text{He}$  bei einem Streuwinkel von  $45^\circ$  skizziert. Auffällig sind in erster Linie der elastische Peak bei  $\nu = -q^2/2M_{\text{Kern}}$  und der breite Peak bei größerem  $\nu$ . Letzterer hat sein Maximum etwa bei  $\nu = -q^2/2M_{\text{Nukleon}}$  und stammt von „quasielastischer“ Streuung an einzelnen Nucleonen. Er ist deshalb so breit, weil die Nucleonen im Kern gebunden sind. Der Potentialtopf ist etwa 30 MeV tief. Bei einem Radius  $R$  führt das zu einem Fermiimpuls von

$$p_F = \frac{\hbar}{R} = 200 \text{ MeV}$$

Dieser Impuls der Nucleonen ist isotrop und vergrößert oder verkleinert den Energieübertrag  $\nu$ , je nachdem in welche Richtung sich das Nucleon bewegt. Die Verbreiterung ist etwa

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \pm \frac{p_F}{\text{Nukleon}}$$

Die Bindungsenergie des einzelnen Nucleons ( $\approx 10 \text{ MeV}$ ) kann vernachlässigt werden.



**Abbildung 6.9.:** Wirkungsquerschnitt für die Streuung von 400 MeV Elektronen an  ${}^4\text{He}$

Mit zunehmendem  $q^2$  stirbt die kohärente Streuung am Kern aus und die inkohärente Streuung an einzelnen Nukleonen wird wichtiger. Die elastische Streuung an größeren Objekten wird durch die steil abfallenden Formfaktoren unterdrückt.

Die Elektron-Proton-Streuung verläuft analog zur Elektron-Kern-Streuung: Bei kleinem  $q^2$  ( $\leq 1$  GeV) erscheint ein starker elastischer Peak bei  $\nu = -q^2/2M_{\text{Nukleon}}$  gefolgt von mehreren inelastischen Peaks, denen angeregten Zuständen des Nukleons entsprechen. Sie sind bei

$$x = \frac{-q^2}{-q^2 + W^2 - M^2} = \frac{1}{1 - \frac{W^2 - M^2}{q^2}}$$

beheimatet:

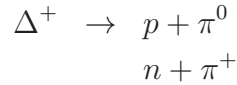
$W$ / MeV	Zustand
1232	$\Delta$
1450	$N^*$
1688	$\Delta$

Die Breite dieser Resonanzen wird durch die natürliche Breite dominiert (sie haben eine große Energieunschärfe, da sie sehr kurzlebig sind).

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

Das  $\Delta(1232)$  beispielsweise hat eine Breite von  $\Gamma = 120$  GeV, was einer Lebensdauer von  $\tau = 5,5 \cdot 10^{-24}$  s entspricht. Solch kurze Lebensdauern sind typisch für Teilchen, die über die starke Wechselwirkung zerfallen.

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen



Mit wachsendem  $q^2$  bewegen sich die Resonanzpeaks gegen  $x = 1$  und sind zunehmend durch die Formfaktoren unterdrückt. Dafür erscheint ein großer Kontinuumspeak, der durch Streuung an den Quarks, den kleineren Konstituenten des Nukleons zustande kommt („tiefinelastische Streuung“).

Jedes Nukleon besteht aus drei Valenzquarks mit je einer effektiven Masse von etwa  $m = M/3$ . Man erwartet also einen quasielastischen Peak bei

$$x = \frac{-q^2}{2M\nu} = \frac{-q^2}{\underbrace{2m\nu}_{=1}} \frac{m}{M} = \frac{1}{3}$$

Der Fermiimpuls hat schon bei der Streuung am Kern zu einer erheblichen Verbreiterung des Peaks geführt, aber hier ist der Effekt noch viel größer:

$$p_F = \frac{\hbar}{R} = 250 \text{ MeV} = m$$

Von einem Peak kann also eigentlich schon gar nicht mehr die Rede sein.

### 6.3. Skaleninvarianz und Partonen

Die tiefinelastische Elektron-Nukleon-Streuung wird durch elastische Streuung an den punktförmigen Konstituenten des Nukleons beschrieben.

Man definiert neue Strukturfunktionen  $F_{1,2}$ :

$$F_1(q^2, \nu) = MW_1(q^2, \nu) \quad F_2(q^2, \nu) = \nu W_2(q^2, \nu)$$

Der Wirkungsquerschnitt hat dann die Form

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E\nu} \left( F_2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{2\nu}{M} F_1 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Unter Ausnutzung der Relationen

$$\cos^2 \frac{\vartheta}{2} = 1 + \frac{q^2}{4EE'} \quad \text{und} \quad \frac{d\nu}{\nu} = \frac{dx}{x}$$

kann man den Wirkungsquerschnitt umschreiben:

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left( (1-y) \frac{F_2}{x} + y^2 F_1 \right)$$

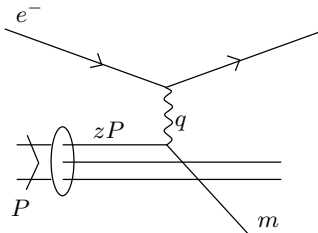


Dabei ist  $y = \nu/E$  der relative Energieübertrag.

Bei quasielastischer Streuung an punktförmigen Teilchen hängen  $F_1$  und  $F_2$  nicht von  $q^2$  ab. (Zur Erinnerung: Die Formfaktoren einer punktförmigen Ladungsverteilung sind konstant.) Außerdem ist bei quasielastischer Streuung  $x$  konstant. Man kann aber  $q^2$  und  $\nu$  mit demselben Faktor skalieren, ohne daß  $x$  sich ändert (Bjorken scaling). Dieses Phänomen wird die Skaleninvarianz der tiefinelastischen Streuung genannt (es gibt keine Massen- oder Längenskala). Damit bleiben die Strukturfunktionen auch für  $q^2 \rightarrow \infty$  endlich.

Friedman, Kandall *et al.* konnten experimentell bestätigen, daß  $F_{1,2}$  nicht von  $q^2$  abhängen. Der von ihnen abgedeckte Bereich ist  $\vartheta = 6^\circ \dots 26^\circ$  und  $q^2 = 1 \dots 8 \text{ GeV}^2$  bei  $x = 0,25$ . Damit war die Existenz punktförmiger Partonen als Bestandteile des Nukleons bestätigt.

### Parton Modell (Feynman 1967)



**Abbildung 6.10.:** Tiefinelastische Elektron-Proton-Streuung als quasielastische Streuung an Partonen

Im Bezugssystem, in dem der Impuls des Protons  $P = \infty$  ist, besteht es aus einem parallelen Strom von Partonen mit Viererimpuls  $z_i P$ .

Proton	Parton
$P$	$zP$
$E$	$zE$
$p_{\parallel}$	$zp_{\parallel}$
$p_{\perp} = 0$	$p_{\perp} = 0$

Die invariante Masse eines Partons ist

$$m^2 = (zP + q)^2 = \underbrace{z^2 P^2}_{m^2} + q^2 + 2zPq$$

$$\Rightarrow z = -\frac{q^2}{2Pq}$$

Da  $z$  ein Lorentzskalar ist, ist es egal, in welchem Bezugssystem man ihn berechnet. Im Laborsystem ist  $P = (M, 0)$  und  $q = (\nu, \vec{q})$ , also  $Pq = M\nu$ :

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

$$z = -\frac{q^2}{2M\nu} = x$$

Ein Photon mit  $x$  wird also gerade von einem Parton mit Impulsanteil  $z = x$  absorbiert. Weiter gilt im Laborsystem für die elastische Streuung an einem Teilchen mit Masse  $m$

$$z = x = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{2m\nu}{2M\nu} = \frac{m}{M}$$

D.h.  $x = z$  ist der Bruchteil der Protonmasse, den das Parton trägt.

Die Frage ist nun, was für Eigenschaften die Partonen haben. Den Spin kann man durch Vergleich der Wirkungsquerschnitte für elastische und inelastische Streuung bestimmen. Der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung punktförmiger Spin  $1/2$  Teilchen ist

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left( \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

der für inelastische Streuung

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E} \left( F_2(x) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{q^2}{2M^2 x^2} 2xF_1(x) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{1}{x}$$

Koeffizientenvergleich der  $\cos^2 / \sin^2$ -Terme liefert

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad \text{für Spin } 0, 1/2 \text{ Teilchen}$$

$$\frac{2xF_1(x)}{F_2(x)} = 1 \quad \text{für Spin } 1/2 \text{ Teilchen (} F_1 = 0 \text{ für Spin } 0)$$

Die Summe geht über die Partonen und  $f_i(x)dx$  ist die Wahrscheinlichkeit, das Parton  $i$  mit Ladung  $e_i$  im Impulsintervall  $[x, x + dx]$  anzutreffen. Messungen ergeben, daß die Partonen Spin  $1/2$  haben.

Es stellt sich heraus, daß  $F_2$  bei sehr großen  $q^2$ -Werten doch von  $q^2$  abhängt (scaling violation). Das Parton Modell ignoriert die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen im Proton. Die Nukleonen enthalten nicht nur die drei Valenzquarks, sondern auch Gluonen und Seequarks. Die Seequarks werden durch Aufspaltung von Gluonen in ein Quark-Antiquark-Paar erzeugt, sie können auch andere Flavour als die Valenzquarks haben.

Ein Photon kann auch an Seequarks gestreut werden (Abbildung 6.11), dieser Effekt macht sich bei großem  $q^2$  bemerkbar.

Die Strukturfunktion  $F_2$  muß also neu formuliert werden, so daß sie jetzt auch den Seequarksanteil beinhaltet:

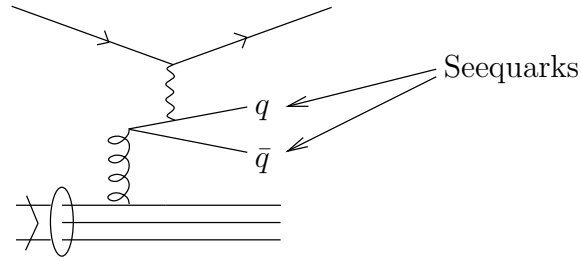


Abbildung 6.11.: Streuung des Photons an einem Seequark

$$F_2(q^2, x) = \sum_{a=u,d,s,\dots} e_a^2 x f_a(x) + \underbrace{e_a^2 x f_{\bar{a}}(x)}_{\text{Antiquarks}}$$

Nun wüßte man natürlich gerne, wie die Quark- und die Antiquarkverteilung ( $q(x)$  und  $\bar{q}(x)$ ) aussehen. Elektron- oder Myonstreuung eignen sich dafür nicht, weil sie nicht zwischen Quarks und Antiquarks unterscheiden. Die Lösung ist Neutrino-Nukleon-Streuung. Die Verteilungen sind in Abbildung 6.12 skizziert. Die Gluonabstrahlung und somit der Seequarkanteil sind von  $q^2$  abhängig: Bei hohem  $q^2$  wächst die Gluonabstrahlung an und der Seequarkanteil wächst. Damit tragen sie aber auch mehr Energie und der Valenzquarkanteil verschiebt sich zu kleineren  $x$ -Werten.

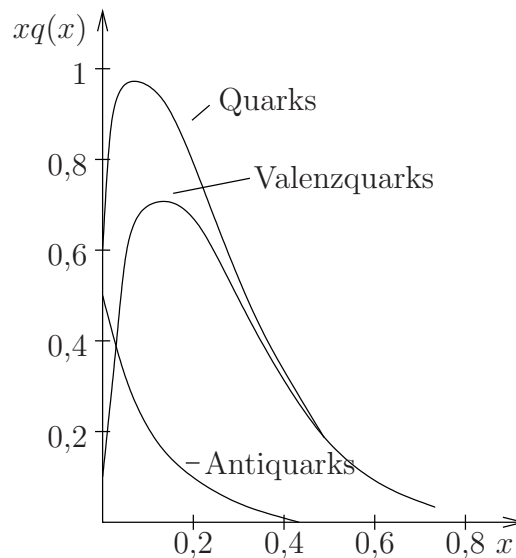


Abbildung 6.12.: Quark- und Antiquarkverteilung im Nucleon

Bei Neutrino-Nukleon-Streuung gibt es drei Strukturfunktionen, wobei die dritte CP verletzt. Man kann mit Hilfe der Neutrinos auch etwas über die Ladung der

## 6. Struktur von Atomen, Nukleonen und Leptonen

Partonen erfahren. Im Bereich mit dominantem Valenzquarkanteil (also  $x > 0,3$ ) gilt

$$\frac{F_2^{ep} + F_2^{en}}{F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}} = \frac{e_u^2 + e_d^2}{2} = \frac{5}{18}$$

Also haben die Partonen 1/3-zahlige Ladung. Damit kann man dann auch die Partonen mit den Quarks identifizieren.

# 7. Symmetrien und Erhaltungssätze

## 7.1. Einführung

Nach dem Theorem von Noether ist jede einem physikalischen System zugrunde liegende Symmetrie mit einer erhaltenen physikalischen Größe oder Quantenzahl verbunden. Zum Beispiel führt die Translationsinvarianz auf die Erhaltung des Linearimpulses.

In der Quantenmechanik ist eine Observable  $O$  erhalten, wenn  $\frac{d\langle O \rangle}{dt} = 0$ . Das Ehrenfestsche Theorem besagt:

$$\frac{d\langle \mathbf{O} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{O}, \mathbf{H}] \rangle$$

Der Operator  $\mathbf{O}$  für eine erhaltene Observable  $O$  muß also mit dem Hamiltonoperator kommutieren. Dann definieren die durch  $\mathbf{O}$  generierten Transformationen die Symmetrie.

Symmetrietransformationen  $\mathbf{U}$  müssen unitär sein; Operatoren, die zu Observablen gehören, sind hermitisch. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1.  $\mathbf{O}$  ist unitär, dann ist  $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ . Dies ist für diskrete Transformationen der Fall.
2.  $\mathbf{O}$  ist nicht unitär, dann ist  $\mathbf{U} = \exp(i\epsilon\mathbf{O})$  die unitäre Symmetrietransformation. Dies trifft für kontinuierliche Transformationen zu.

Die verschiedenen Typen von Symmetrietransformationen führen auf zwei Sorten von Erhaltungssätzen: Zu diskreten Transformationen gehören die multiplikativen, zu den kontinuierlichen Transformationen die additiven Erhaltungssätze.

Man kann sich leicht am Beispiel der Translation als einer kontinuierlichen Transformation klarmachen, warum die von  $\mathbf{O}$  erzeugte Transformation (und damit gegebenenfalls die Symmetrietransformation) die Gestalt einer Exponentialfunktion hat. Der Operator  $\mathbf{U}$  verschiebe also ein Teilchen um den Betrag  $\Delta$  in  $x$ -Richtung. Dann ist

$$\mathbf{U}\psi(x) = \psi(x + \Delta)$$

Nun betrachtet man eine infinitesimale Translation ( $\Delta \rightarrow \epsilon$ ) und entwickelt  $\psi(x+\epsilon)$ :

$$\psi(x + \epsilon) = \psi(x) + \epsilon \frac{d\psi}{dx} + \dots \approx \left(1 + \epsilon \frac{d}{dx}\right) \psi(x) = \left(1 + \epsilon \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_x\right) \psi(x)$$

## 7. Symmetrien und Erhaltungssätze

Die endliche Translation um  $\Delta$  erhält man durch n-fache Durchführung der Translation um  $\epsilon$  ( $\Delta = n\epsilon$ ) und Grenzübergang zu infinitesimalem  $\epsilon$ :

$$\psi(x+\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \epsilon \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_x\right)^n \psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\Delta}{n} \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_x\right)^n \psi(x) = \exp\left(i \frac{\Delta}{\hbar} \mathbf{p}_x\right) \psi(x)$$

Also :

$$\mathbf{U} = \exp\left(i \frac{\Delta}{\hbar} \mathbf{p}_x\right)$$

Die Translationen werden also vom Impulsoperator erzeugt.

Die Herleitung wurde vom aktiven Standpunkt aus gemacht, d.h. es wurde das Koordinatensystem als fest angesehen und die Funktion transformiert. Der passive Ansatz (das Koordinatensystem wird transformiert und die Funktion unverändert gelassen) ist völlig äquivalent, führt aber zu einem Minuszeichen im Exponenten.

## 7.2. Ladungserhaltung und Eichinvarianz

Eine der prominentesten additiven Erhaltungsgrößen ist die Ladungserhaltung. Experimentell getestet wurde sie z.B. mit dem Zerfall des Neutrons mit dem Ergebnis

$$\frac{n \rightarrow p + \nu_e + \bar{\nu}_e}{n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e} < 9 \cdot 10^{-24}$$

Die Transformationen, die hierzu gehören, sind die Eichtransformationen. Sie zählen zu den wichtigsten kontinuierlichen Transformationen. Im klassischen Fall läßt sich der Zusammenhang mit der Argumentation von Wigner einsehen. In der Elektrostatik besagt die Eichinvarianz, daß das elektrostatische Potential  $\Phi$  nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Es kommt nicht auf den absoluten Wert, sondern nur auf die Änderung des Potentials an. Es wird nun angenommen, daß die Ladung nicht erhalten ist, man also Ladungen erzeugen und vernichten kann. Es soll an einem Punkt  $P$  die Ladung  $Q$  erzeugt werden, dazu wird die Arbeit  $W$  benötigt. Die Ladung wird nun von  $P$ , wo das elektrostatische Potential den Wert  $\Phi(P)$  hat, zu einem Punkt  $P'$  bewegt. Die Energieänderung ist  $Q(\Phi(P) - \Phi(P'))$ . Bei  $P'$  wird die Ladung wieder vernichtet und so der ursprüngliche Zustand des Systems wiederhergestellt. Die Energiebilanz der gesamten Aktion ist aber  $-W + Q(\Phi(P) - \Phi(P')) + W \neq 0$ . Die Annahme, daß die Ladung nicht erhalten ist, führt also zu einer Verletzung der Energieerhaltung.

In der Quantenmechanik kann man den Effekt einer Eichtransformation leicht an einem Beispiel nachvollziehen. Ein Strom von niederenergetischen Elektronen falle auf einen Doppelspalt AB (Abbildung 7.1). Das Beugungsmuster auf dem Schirm C hängt von der relativen Phase der von A und B kommenden Teilchen ab, nicht jedoch von der globalen Phase. Die Wellenfunktion der einfallenden Elektronen ist von der Form

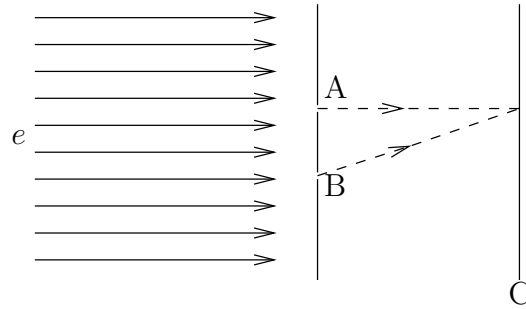


Abbildung 7.1.: Beugung von Elektronen am Doppelspalt

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} = e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

wobei  $p = (E/c, \vec{p})$  der Impuls- und  $x = (ct, \vec{x})$  der Ortsvierervektor ist. Nun wird eine lokale Phasentransformation vorgenommen:

$$\psi \rightarrow \psi e^{\frac{i}{\hbar}e\alpha(x)}$$

Der Ortszeitgradient der Phase der Wellenfunktion ist dann

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{i}{\hbar}(-px + e\alpha) = \frac{i}{\hbar} \left( -p + e \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)$$

Dieser Ausdruck verschwindet im Allgemeinen nicht, also wird sich auch die Phase bei A und B unterschiedlich stark ändern. Das hat zur Folge, dass sich die Phasendifferenz zwischen den beiden Strahlen und damit das Beugungsmuster verändert. Bis jetzt ist aber nicht berücksichtigt worden, daß Elektronen als geladene Teilchen über ein elektromagnetisches Potential  $A = (\Phi, \vec{A})$  wechselwirken. Der Effekt von  $A$  auf die Wellenfunktion ist eine Verschiebung der Phase, da die Ersetzung

$$p \rightarrow p + eA$$

zu machen ist. D.h. der Gradient der Phase wird zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{i}{\hbar}(-px - eAx + e\alpha) = \frac{i}{\hbar} \left( -p - eA + e \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)$$

Das elektromagnetische Potential ist aber nur bis auf die Ableitung einer skalaren Funktion bestimmt. Wir können also  $\alpha(x)$  als diese Funktion wählen und eine Eichtransformation durchführen:

$$A \rightarrow A + \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

Dann ergibt sich für den Gradienten der Phase

$$\frac{i}{\hbar} \left( -p - e \left( A + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + e \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) = \frac{i}{\hbar} (-p - eA)$$

Dieser Ausdruck hängt nicht mehr von  $\alpha$  ab und hat somit auch keinen Einfluß auf den Ausgang des Experiments, also das Beugungsmuster.

Zwei Bedingungen müssen jedoch erfüllt sein, damit das funktioniert: Da der Abstand zwischen A und B sehr groß werden kann, muß das Potential langreichweitig sein und die Ladung muß erhalten sein.

### 7.3. Baryonenzahl

Eine weitere additive Erhaltungsgröße ist die Baryonenzahl  $A$ . Sie hat den Wert  $A=1/3$  für alle Quarks und  $A=-1/3$  für die Antiquarks, also ist für die Baryonen  $A=1$  bzw.  $A=-1$  für Antibaryonen und alle Mesonen haben  $A=0$ . Die Baryonenzahl ist für Leptonen und Bosonen nicht definiert. Die Baryonenzahl ist unter den additiven Erhaltungsgrößen diejenige mit dem besten experimentellen Limit:

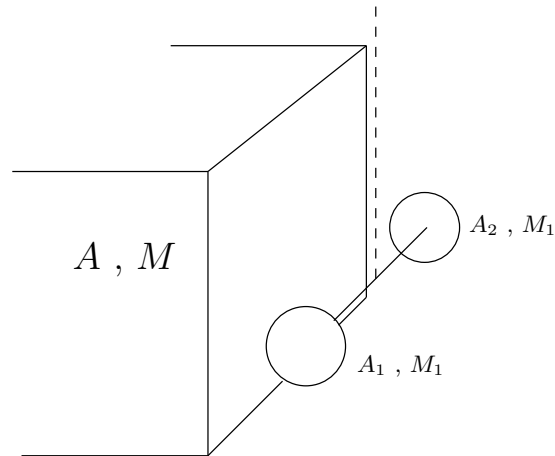
$$\tau(p \rightarrow e^+ + \pi^0) > 10^{33} a$$

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, daß in einer renormierbaren Feldtheorie eine absolut erhaltene Größe ein langreichweitiges Feld erfordert, das an diese Größe koppelt. Wenn also die Baryonenzahl als Folge einer lokalen Eichinvarianz erhalten ist, würde man ein an sie koppelndes langreichweitiges Feld erwarten. In der Tat gibt es aber keinerlei Hinweis auf die Existenz eines solchen Feldes. Experimentell wurde folgendermaßen vorgegangen:

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist das Verhältnis  $R$  von gravitativer (schwerer) Masse zu träger Masse für alle Substanzen gleich. Ein an die Baryonen koppelndes Feld hätte zur Folge, daß  $R$  von Material zu Material unterschiedlich wäre: Vergleicht man Proben zweier unterschiedlicher Substanzen, dann werden die Baryonenzahlen bei identischer Masse verschieden sein. Dies liegt daran, daß aufgrund von unterschiedlichen Packungsdichten und Bindungsenergien in den Atomkernen die Masse pro Nukleon in den beiden Proben verschieden ist. Das Meßprinzip ist in Abbildung 7.2 skizziert. Die Proben werden an einer Torsionswaage vor einer sehr großen Masse mit einer entsprechend hohen Baryonenzahl aufgehängt. Die Kraft, die aufgrund der gravitativen Anziehung auf die Proben wirkt, ist für beide gleich. Existiert jetzt ein wie oben beschrieben geartetes Feld, dann wird es auch eine Kraft aufgrund dieses Feldes geben, die jetzt aber für die beiden Proben verschieden ist. Dreht sich die Probenanordnung, dann ist ein solches Feld vorhanden. Das Verhältnis von gravitativer zu träger Masse ist also vom Material abhängig.

Die präzisesten Messungen wurden mit der Sonne als größter erreichbarer Masse durchgeführt. Dabei nutzt man aus, daß die Gravitation durch die Bahnbewegung der Erde ausgeglichen wird. Die Proben wurden wie oben beschrieben aufgehängt,





**Abbildung 7.2.:** Meßprinzip zur Untersuchung der Frage, ob die Baryonenzahl aufgrund einer Eichinvarianz erhalten ist

man suchte dann nach einer Torsion, deren Amplitude einen sinusförmigen Verlauf mit 24h-Periode zeigt. Letztere wird durch die Rotation der Erde und dem daraus resultierenden Verlauf des Winkels zwischen der Verbindungslinie der beiden Proben und der Verbindung Erde-Sonne hervorgerufen. Es wurde jedoch kein Effekt beobachtet, das Limit ist  $\Delta R/R < 10^{-12}$ . Wenn aber  $R$  eine universelle Konstante ist, die nicht vom Material abhängt, kann es kein langreichweitiges „Baryonenfeld“ (das ja mit unterschiedlichen Substanzen unterschiedlich stark wechselwirken würde) geben. Die Baryonenzahl scheint also nicht aufgrund einer lokalen Eichinvarianz erhalten zu sein.

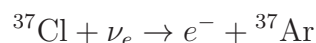
## 7.4. Leptonzahl

Die Leptonzahlerhaltung ist ebenfalls ein empirisches Gesetz, das das Fehlen von Zerfällen der Art  $\gamma \rightarrow e^- + p$  oder  $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$  erklärt. Die Leptonzahl hat den Wert  $L = 1$  für die Leptonen ( $e^-, \mu^-, \tau^-$  und Neutrinos) und  $L = -1$  für die jeweiligen Antiteilchen. In jeder Generation ist die Summe der Leptonzahlen konstant. Eine Einschränkung muß jedoch gemacht werden: Nach neuesten Erkenntnissen auf dem Gebiet der Neutrinoastrophysik sind Oszillationen zwischen den Neutrinos der verschiedenen Generationen möglich. Dies ist aber auch die einzige bekannte Ausnahme.

Einige Fragen und experimentelle Antworten zur Leptonzahlerhaltung:

### 1. Sind Neutrino und Antineutrino identisch (Majorana-Neutrino) oder verschieden (Dirac-Neutrinos)?

Erste Experimente deuteten darauf hin, daß Neutrino und Antineutrino verschieden sind. Untersucht wurde der inverse  $\beta$ -Zerfall des  $^{37}\text{Cl}$



## 7. Symmetrien und Erhaltungssätze

Der Prozess wurde nur in dieser Art beobachtet, der Wirkungsquerschnitt für den Einfang eines Antineutrinos in einer ansonsten identischen Reaktion ist  $\sigma \leq 10^{-42} \text{ cm}^2$ . Durchgeführt wurde das Experiment 1955 von R. Davis.

Später konnte man diesen Befund durch bessere Kenntnis der schwachen Wechselwirkung verstehen. Die Ursache ist die Helizität des Neutrinos (siehe 9.1).

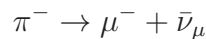
### 2. Sind Neutrinos verschiedener Generationen wirklich verschieden?

Erste Evidenz hierfür gab es 1962 von Brookhaven AGS, 1988 bekamen Lederman, Schwartz und Steinberger für ihr Experiment den Nobelpreis.

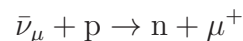
Sie produzierten zunächst Pionen, indem sie einen Strahl aus hochenergetischen Protonen (15 GeV) auf ein Bor-Target schossen:



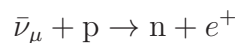
Die Pionen ließen sie dann zerfallen:



Die Myonen wurden dann in Stahl abgestoppt (hierzu waren 13,5 m Stahl nötig) und der Neutrino-Strahl wurde auf ein Wasserstofftarget gelenkt. Die Endzustände der sehr seltenen Wechselwirkungen von Neutrinos mit dem Target wurden dann mit einer großen Funkenkammer beobachtet. Denkbar wären z.B. die Reaktionen



oder



wobei man die erste an der minimal ionisierenden Spur des Myons und die zweite am elektromagnetischen Schauer erkennt. Die zweite Reaktion ist aufgrund der Leptonzahlerhaltung nur möglich, wenn die Neutrinos der verschiedenen Generationen gleich sind. Sie wurde jedoch nie beobachtet, also müssen die Neutrinos verschieden sein.

### 3. Ist vielleicht nur die Helizität aus dem $\beta$ -Zerfall falsch und $\nu_e$ und $\bar{\nu}_e$ sind identisch?

Wenn dem so ist, sollte der neutrinolose doppelte  $\beta$ -Zerfall möglich sein. Im doppelten  $\beta$ -Zerfall zerfallen zwei Neutronen in Protonen, Elektronen und Antielektronenneutrinos. Wenn Neutrino und Antineutrino identisch sind, kann das im ersten Zerfall erzeugte Antineutrino im zweiten Schritt in einem inversen  $\beta$ -Zerfall absorbiert werden:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e (\equiv \nu_e)$$

$$\bar{\nu}_e (\equiv \nu_e) + n \rightarrow p + e^-$$

Im Endeffekt bliebe also

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+2} Y + 2e^-$$

Dieser Prozess kann nur funktionieren, wenn die aus dem normalen  $\beta$ -Zerfall ermittelte Helizität des Neutrinos falsch ist, denn das aus dem ersten Zerfall stammende Neutrino ist rechtshändig und die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines rechtshändigen Teilchens durch das Neutron im zweiten Zerfall ist identisch null. Für den neutrinolosen doppelten  $\beta$ -Zerfall müsste also entweder die Helizität falsch sein, oder die Neutrinos haben eine endliche Ruhemasse. In diesem Fall wäre das Neutrino aus dem ersten Zerfall in keinem reinen rechtshändigen Zustand, sondern es wäre ein linkshändiger Anteil beigemischt.

Im Fall des neutrinolosen doppelten  $\beta$ -Zerfalls ist die Summe der Energien der beiden Elektronen fest. Aus dem Fehlen solch einer diskreten Linie im Energiespektrum kann man eine untere Grenze für die Lebensdauer des Prozesses berechnen. Das bisher genaueste Experiment war Heidelberg-Moskau, in dem nach dem Zerfall  ${}^{76}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}\text{Se} + 2e^-$  gesucht wurde, mit dem Ergebnis

$$\tau(0\nu) > 5 \cdot 10^{24} \text{ a}$$

#### 4. Könnte es massive Neutrinos als Überlagerung von Masseneigenzuständen geben?

Die Antwort lautet hier nicht nur einfach ja, sondern im Moment sieht es ganz danach aus, als ob es tatsächlich so ist.

Die Masseneigenzustände werden mit  $|\nu_1\rangle$ ,  $|\nu_2\rangle$  und  $|\nu_3\rangle$  bezeichnet. Die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung  $|\nu_e\rangle$ ,  $|\nu_\mu\rangle$ ,  $|\nu_\tau\rangle$  sind lineare Überlagerungen der Masseneigenzustände. Im Folgenden werden nur zwei Flavours ( $e$  und  $x$ ) berücksichtigt, die Rechnungen für drei Flavours erfolgen analog, sind aber etwas unübersichtlich.

Die Masseneigenzustände sind Eigenzustände zum Massenoperator  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M}|\nu_i\rangle = m_i|\nu_i\rangle$$

Sie sind stationär, d.h. ihre Zeitabhängigkeit ist gegeben durch

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \approx e^{-iEt} e^{-i\frac{m_i^2}{2E} L} |\nu_i\rangle$$

## 7. Symmetrien und Erhaltungssätze

wobei im zweiten Schritt

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}$$

benutzt wurde und  $L$  der Abstand von der Quelle zum Detektor ist.

Die Flavoureigenzustände sind Linearkombinationen der Masseneigenzustände:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$\vartheta$  ist der Mischungswinkel. Dies hat dann zur Folge, daß auch die Flavoureigenzustände Massen haben.

$$m_\alpha = \langle \nu_\alpha | \mathbf{M} | \nu_\alpha \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 m_i$$

Weiter erhält man für die zeitliche Entwicklung eines anfangs reinen Flavourzustands  $|\nu(0)\rangle = |\nu_e\rangle$

$$\begin{aligned} |\nu(t)\rangle &= \sum_{i,\alpha} U_{ei} U_{\alpha i} e^{-iE_i t} \\ &= \left[ \cos^2 \vartheta e^{-iE_1 t} + \sin^2 \vartheta e^{-iE_2 t} \right] |\nu_e\rangle + \cos \vartheta \sin \vartheta \left[ e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t} \right] |\nu_x\rangle \end{aligned}$$

Für Zeiten  $t > 0$  ist also eine  $|\nu_x\rangle$ -Komponente beigemischt. Eine Konsequenz hiervon sind die Neutrinooszillationen, d.h. die Flavoureigenzustände können sich ineinander umwandeln. Für die Übergangswahrscheinlichkeit erhält man

$$\begin{aligned} P(\alpha \rightarrow \beta, t) = \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\alpha j} U_{\beta i} U_{\beta j} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \\ \Delta &= \frac{\delta m^2 L}{2 E} \\ \delta m^2 &= m_1^2 - m_2^2 \end{aligned}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit hängt nur von der Differenz der Massen ab. Aus der Beobachtung von Oszillationen kann man zwar schließen, daß die Neutrinos verschiedene Massen haben, es ist aber unmöglich, ohne zusätzliche Annahmen die Massen zu bestimmen.

Bei den Fusionsprozessen in der Sonne entstehen Elektronneutrinos. Für diesen Fall bekommt man für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(e \rightarrow x, t) = \sin^2 2\vartheta \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

und die Überlebenswahrscheinlichkeit ist

$$P(e \rightarrow e, t) = 1 - P(e \rightarrow x, t)$$

Neutrinoszillationen wurden kürzlich an dem kanadischen Neutrino-Experiment SNO bei solaren Neutrinos nachgewiesen. Man darf also davon ausgehen, daß die Neutrinos Masse haben.

Die Versuche, die Massen aus z.B. den Endpunkten von  $\beta$ -Spektren direkt zu bestimmen, ergaben bisher nur obere Grenzen:

$$\begin{aligned} m(\nu_e) &< 2,8 \text{ eV} \\ m(\nu_\mu) &< 0,17 \text{ MeV} \\ m(\nu_\tau) &< 71 \text{ MeV} \end{aligned}$$

## 7.5. Strangeness

Seit den 40er Jahren werden die „seltsamen“ Teilchen  $\Lambda$  und  $K^0$  beobachtet, die zwar sehr oft als Paar produziert werden, aber nur sehr langsam zerfallen.

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$$

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

Erzeugt werden sie mit großem Wirkungsquerschnitt in der Reaktion

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda + K^0$$

mit Pionenenergien im Bereich von GeV. Die Halbwertsbreite der Produktion ist mit  $\Gamma_P = 100 \text{ MeV}$  groß, die des Zerfalls klein ( $\Gamma_Z = 6,6 \cdot 10^{-12} \text{ MeV}$ ). Also werden  $\Lambda$  und  $K^0$  in Prozessen der starken Wechselwirkung erzeugt, zerfallen aber über die schwache Wechselwirkung.

Das sonderbare Verhalten von  $\Lambda$  und  $K^0$  führte zunächst auf die Pais-Regel, nach der diese Teilchen nur als Paar erzeugt werden können (assoziierte Produktion), aber zerfallen muß jedes für sich. 1953 führten dann Gell-Mann und Nishijima unabhängig voneinander die Quantenzahl Strangeness (S) ein. Für Nukleonen und Pionen ist  $S=0$ , für Leptonen ist sie nicht definiert und  $\Lambda$  und  $K^0$  haben entgegengesetzte Strangeness. Sie postulierten, daß die starke Wechselwirkung die Strangeness erhält ( $\sum S_i$  ist konstant), während dies in der schwachen Wechselwirkung nicht der Fall ist. Damit ist bei der Produktion  $S=0$ , beim Zerfall aber  $\Delta S=1$ .

Die Zuweisung der Werte von S an  $\Lambda$  und  $K^0$  ist willkürlich und derart, daß  $S(K^0)=1$  und  $S(\Lambda) = -1$ . Außerdem ist  $S(K^+) = 1$  und  $S(K^-) = -1$ . Damit kann die Strangeness anderer Teilchen ermittelt werden, z.B. :

$$p + p \rightarrow p + K^+ + \Sigma^0 \Rightarrow S(\Sigma^0) = -1$$

$$K^- + p \rightarrow \Xi^- + K^+ \Rightarrow S(\Xi^-) = -2$$

Heute wissen wir, daß die Strangeness die Anzahl der s-Quarks in einem Teilchen angibt. Nach der Definition von Gell-Mann und Nishijima ist allerdings  $S(s) = -1$  und  $S(\bar{s}) = +1$ .

## 7. Symmetrien und Erhaltungssätze

$$K^+ = u\bar{s} \quad K^0 = d\bar{s} \quad S = -1$$

$$K^- = \bar{u}s \quad K^0 = \bar{d}s \quad S = +1$$

$$\Lambda = uds \quad S = -1$$

Baryonen, die s-Quarks enthalten, werden auch Hyperonen genannt. Das schwerste Hyperon ist das  $\Omega^-$  mit  $S = -3$ .

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^-$$

Es zeigt sich, daß die Strangeness in der schwachen Wechselwirkung immer nur um  $\Delta S = 1$  verletzt wird. Dies sieht man z.B. am Zerfall des  $\Omega^-$ :

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^- \quad \Delta S = 1$$

$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0 \quad \Delta S = 1$$

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- \quad \Delta S = 1$$

Die in diesem Kapitel diskutierten Phänomene beschränken sich nicht allein auf das s-Quark, sondern treffen ebenso für die anderen schweren Quarks zu. Sie wurden nur beim s zuerst beobachtet, da es das leichteste der schweren Quarks ist. Völlig analog kann man also die Quantenzahlen C, B und T einführen.

# 8. Isospin

## 8.1. Isospin

Die große Ähnlichkeit zwischen Proton und Neutron veranlasste W. Heisenberg 1932, die beiden als zwei verschiedene Ladungszustände eines Teilchens - des Nukleons - zu betrachten. Die These bestätigte sich, als H. Bethe 1937 bei der Analyse von pp- und pn-Streuungen herausfand, daß die Befunde für Proton und Neutron nach Korrektur der elektromagnetischen Wechselwirkung identisch sind. Auch die große Ähnlichkeit der Spektren von Spiegelkernen (Kerne mit gleicher Massenzahl aber vertauschtem  $Z$  und  $N$ ) deutet darauf hin, daß die starke Wechselwirkung zwischen den Nukleonen von der elektrischen Ladung unabhängig ist.

Die Hadronen haben also eine weitere Eigenschaft, die als Isospin bezeichnet wird. Die Algebra ist die gleiche wie beim Spin. Der Isospinoperator  $\vec{I}$  ist

$$\vec{I} = \frac{\vec{\tau}}{2}$$

Wobei  $\vec{\tau}$  die Spinoren sind; sie erzeugen die Drehungen im Isospinraum.

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ein Teilchen wird analog zum Spin durch die beiden Quantenzahlen  $I$  und  $I_3$  beschrieben. Zu jedem Wert von  $I$  gibt es  $2I + 1$  mögliche Orientierungen  $I_3$ . Die Isospins der Konstituenten können auf verschiedene Weise zum Gesamtisospin koppeln, die Teilchen treten also in Multipletts auf. Proton und Neutron bilden ein Dublett, während beispielsweise die Pionen ein Triplet bilden (Abbildung 5.6 und 5.9). Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Drehungen im Isospinraum, d.h. alle  $2I + 1$  Orientierungen sind entartet.

Die Isospinwellenfunktion des Nukleons ist ein zweikomponentiges Objekt:

$$\begin{array}{ll} \text{Proton} & : \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{Neutron} & : \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$I^2 \chi = \frac{3}{4} \chi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \chi \quad I_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 8. Isospin

Also ist für beide  $I = 1/2$ , aber das Proton hat  $I_3 = +1/2$  und das Neutron  $I_3 = -1/2$ . In der Diracschen BraKet-Notation ( $|I, I_3\rangle$ ):

$$|1/2, 1/2\rangle \equiv p \quad |1/2, -1/2\rangle \equiv n$$

Generell kann  $I$  alle nicht negativen ganz- und halbzahlichen Werte annehmen. Für die Ladung der Nukleonen gilt

$$Q = e \left( I_3 + \frac{1}{2} \right)$$

Die elektromagnetische Wechselwirkung bricht die Symmetrie, d.h. die Zustände zu gleichem  $I$  sind nicht mehr entartet. So haben die Teilchen eines Multipletts auch etwas unterschiedliche Massen. Da aber die elektrische Ladung erhalten ist, muß dies auch für die  $z$ -Komponente des Isospins gelten.  $I_3$  ist ebenfalls eine additive Erhaltungsgröße. Da die Brechung der Symmetrie durch die elektromagnetische Wechselwirkung aber relativ schwach ist, ist der Isospin eine sehr nützliche Symmetrie zur Klassifikation von Teilchen.

## 8.2. Isospin für Hadronen und Atomkerne

Ein System aus zwei Nukleonen muß eine total antisymmetrische Wellenfunktion haben. Die Spins können zu einem symmetrischen Triplett ( $S = 1$ ) oder zu einem antisymmetrischen Singlett ( $S = 0$ ) koppeln:

$$\begin{array}{llll} \chi_s(1, 1) = \uparrow\uparrow & \chi_s(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) & \chi_s(1, -1) = \downarrow\downarrow & \text{Triplett} \\ & \chi_s(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) & & \text{Singlett} \end{array}$$

Die Konstruktion der Isospin-Wellenfunktion  $\chi_i(I, I_3)$  funktioniert genauso.  $\chi_i(1/2, 1/2) = p$  ist die Wellenfunktion des Protons,  $\chi_i(1/2, -1/2) = n$  die des Neutrons.

symmetrisches Triplett:

$$\begin{aligned} \chi_i(1, 1) &= \chi_i^{(1)}(1/2, 1/2) \cdot \chi_i^{(2)}(1/2, 1/2) = p^{(1)}p^{(2)} \\ \chi_i(1, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi_i^{(1)}(1/2, 1/2) \cdot \chi_i^{(2)}(1/2, -1/2) + \chi_i^{(1)}(1/2, -1/2) \cdot \chi_i^{(2)}(1/2, 1/2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p^{(1)}n^{(2)} + n^{(1)}p^{(2)}) \\ \chi_i(1, -1) &= \chi_i^{(1)}(-1/2, -1/2) \cdot \chi_i^{(2)}(-1/2, -1/2) = n^{(1)}n^{(2)} \end{aligned}$$



antisymmetrisches Singlett:

$$\begin{aligned}\chi_i(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi_i^{(1)}(1/2, 1/2) \cdot \chi_i^{(2)}(1/2, -1/2) - \chi_i^{(1)}(1/2, -1/2) \cdot \chi_i^{(2)}(1/2, 1/2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p^{(1)}n^{(2)} - n^{(1)}p^{(2)})\end{aligned}$$

Es gibt also zwei Möglichkeiten, einen Zustand aus einem Proton und einem Neutron zu basteln; Proton-Proton und Neutron-Neutron sind eindeutig.

Das Deuteron hat  $L = 0$  und  $S = 1$ , also sind die Orts- und die Spinwellenfunktion symmetrisch. Damit die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch ist, muß die Isospinwellenfunktion antisymmetrisch sein. Das Proton und das Neutron befinden sich also im Isospin-Singlett ( $I = 0$ ).

Wir betrachten nun den Prozess

$$\begin{array}{rcccc} p + p & \rightarrow & d & + & \pi^+ \\ I: & 1 & 0 & & 1 \\ I_3: & 1 & 0 & & 1 \end{array}$$

Hieraus wird deutlich, daß das  $\pi^+$  zu einem Isospin-Triplett ( $I = 1$ ) gehören muß. Die beiden anderen Partner sind das  $\pi^0$  mit  $I_3 = 0$  und das  $\pi^-$  mit  $I_3 = -1$ .

$$\begin{array}{rcccc} p + n & \rightarrow & d & + & \pi^0 \\ I: & 0,1 & 0 & & 1 \end{array}$$

Hier sind im Gegensatz zu oben im Anfangszustand die Konfigurationen  $I = 0$  und  $I = 1$  möglich, aber die Reaktion kann nur aus dem Zustand mit  $I = 1$  heraus ablaufen. Man erwartet also, daß der Wirkungsquerschnitt nur halb so groß ist wie bei der vorigen Reaktion. Dies wird auch beobachtet.

Der Isospin(vektor) eines Atomkerns mit Massenzahl  $A = Z + N$  ist durch die Summe der Isospins der Nukleonen gegeben.

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A \vec{I}^{(i)} \quad \Rightarrow \quad I_3 = \sum_{i=1}^A I_3^{(i)}$$

Die  $z$ -Komponente ist für jeden Atomkern eine feste Zahl:

$$I_3 = \frac{1}{2}(Z - N) = Z - \frac{1}{2}A$$

Die Ladung läßt sich auch hier mit Hilfe des Isospins ausdrücken:

$$Q = Ze = \sum_{i=1}^A q^{(i)} = e \sum_{i=1}^A \left( I_3^{(i)} + \frac{1}{2} \right) = e \left( I_3 + \frac{1}{2}A \right)$$

## 8. Isospin

Nicht festgelegt ist dagegen die „Länge“ des Gesamtisospins bzw. die Quantenzahl  $I$ . Man kann lediglich eine Einschränkung machen:

$$I_{max} = \frac{1}{2}(Z + N) \quad I_{min} = \frac{1}{2}|Z - N|$$

Da die Atomkerne elektrisch geladen sind, tritt eine leichte Brechung der Isospin-symmetrie auf.

Die beiden Kerne  ${}^7_3\text{Li}$  ( $I_3 = -1/2$ ) und  ${}^7_4\text{Be}$  ( $I_3 = 1/2$ ) haben die gleiche Massenzahl, aber unterschiedliche Kernladungszahlen.  $I_{min} = 1/2$  und  $I_{max} = 7/2$  sind für beide gleich. Der Energieunterschied sollte nur auf der Diferenz zwischen der Proton- und Neutronmasse und dem Unterschied in der Coulombenergie beruhen.

$$\Delta E = E(A, Z + 1) - E(A, Z) = \left. \frac{\partial E}{\partial Z} \right|_{\Delta Z=1} = \frac{\partial E_{Cl}}{\partial Z} - \underbrace{(m_n - m_p)}_{1,29 \text{ MeV}}$$

Für eine homogen geladene Kugel ist

$$E_{Cl} = \frac{3(Ze)^2}{5R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_{Cl}}{\partial Z} = \frac{6Ze^2}{5R} = \frac{6}{5} Z \frac{1,44 \text{ MeV fm}}{A^{1/3} 1,2 \text{ fm}}$$

Für  $Z = 3$  und  $A = 7$ :

$$\frac{\partial E_{Cl}}{\partial Z} = 2,26 \text{ MeV}$$

Damit ist die erwartete Energiedifferenz

$$\Delta E = (2,26 - 1,29) \text{ MeV} = 0,97 \text{ MeV}$$

Der experimentelle Wert ist 0,86 MeV

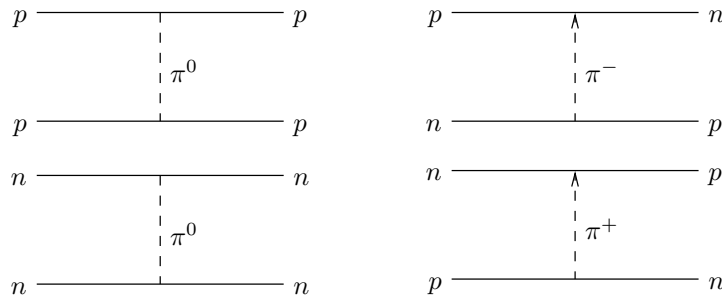
Nach Yukawa vermitteln die Pionen die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen (Abbildung 8.1).

Für das Nukleon ist  $\Delta I_3 = 0, \pm 1$ , die Pionen bilden also ein Isospin-Triplett mit  $I = 1$  und  $I_3 = -1, 0, 1$  für  $\pi^-, \pi^0, \pi^+$ . Für die Ladung der Pionen gilt

$$Q = eI_3$$

Das Hyperon  $\Lambda$  ist ein Isospin-Singlett. In seinem Zerfall ist  $I_3$  nicht erhalten:

$$\begin{array}{rcccc} \Lambda & \rightarrow & p & + & \pi^- \\ I & 0 & 1/2 & & 1 \\ I_3 & 0 & 1/2 & & -1 \quad \Delta I_3 = -1/2 \end{array}$$



**Abbildung 8.1.:** Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch Pion-Austausch

Die Kaonen haben alle  $I = 1/2$ , es gibt zwei Dubletts:  $K^0$  ( $I_3 = -1/2$ ) und  $K^+$  ( $I_3 = 1/2$ ) bilden das eine,  $K^-$  ( $I_3 = -1/2$ ) und  $\bar{K}^0$  ( $I_3 = 1/2$ ) das andere. Die Ladung ist

$$Q = e \left( I_3 + \frac{1}{2} \right)$$

Die Ladungsregeln für die verschiedenen Teilchen können zur Gell-Mann – Nishijima-Regel verallgemeinert werden:

$$Q = e \left( I_3 + \frac{A}{2} + \frac{S}{2} \right) = e \left( I_3 + \frac{Y}{2} \right)$$

$Y = A + S$  ist die sog. Hyperladung. Diese Beziehung gilt auch auf dem Quark-Niveau. In Tabelle 8.1 sind noch einmal einige der Quantenzahlen der Quarks vereinigt.

**Tabelle 8.1.:** Quantenzahlen der leichten Quarks

	$A$	$I$	$I_3$	$S$	$Q/e$
$u$	1/3	1/2	1/2	0	2/3
$d$	1/3	1/2	-1/2	0	-1/3
$s$	1/3	0	0	-1	-1/3

Die Kopplung der Isospinvektoren bei Baryonen ist völlig analog zum Spin. Als Beispiel sind in Tabelle 8.2 die Multipletts der leichten Hadronen aufgeführt.

**Tabelle 8.2.:** Multipletts der leichten Hadronen

# $u$ - und $d$ -Quarks	Teilchen	$I$	Multiplett
0	$\Omega$	0	Singlett
1	$\Xi$	1/2	Dublett
2	$\Lambda$	0	Singlett
	$\Sigma$	1	Triplett
3	$p, n$	1/2	Dublett
	$\Delta$	3/2	Quartett

# 9. Multiplikative Erhaltungssätze

## 9.1. Parität

Unter der Paritätstransformation versteht man die Inversion der räumlichen Koordinaten  $((x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z))$ .

$$\mathbf{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

Die Eigenwerte von  $\mathbf{P}$  werden mit  $\pi$  bezeichnet. Da zweifache Anwendung des Paritätsoperators den ursprünglichen Zustand reproduziert, sind die einzigen möglichen Eigenwerte  $\pi = 1$  („symmetrisch“) und  $\pi = -1$  („antisymmetrisch“). Der Eigenwert wird auch Parität des Systems genannt. Beispiele für Eigenfunktionen sind

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cos(x) &= \cos(-x) = \cos(x) \text{ also } \pi = +1 \\ \mathbf{P} \sin(x) &= \sin(-x) = -\sin(x) \text{ also } \pi = -1\end{aligned}$$

Dagegen hat die Funktion  $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$  keine definierte Parität:

$$\mathbf{P}f(x) = \cos(x) - \sin(x) \neq \pm f(x)$$

Die Observablen werden nach ihrem Verhalten unter Paritätstransformation in verschiedene Gruppen eingeteilt:

- **polare Vektoren** (z.B.  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{a}, \vec{E}$ ) kehren unter Paritätstransformation ihr Vorzeichen um
- **Pseudo- oder axiale Vektoren** (z.B.  $\vec{L}, \vec{S}, \vec{B}$ ) behalten ihr Vorzeichen bei
- **echte Skalare** (Skalarprodukte aus zwei axialen oder zwei polaren Vektoren) kehren ihr Vorzeichen nicht um
- **Pseudoskalare** (Skalarprodukte aus einem polaren und einem axialen Vektor) ändern ihr Vorzeichen

Der räumlichen Inversion  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  in kartesischen Koordinaten entspricht der Übergang  $(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \phi + \pi)$  in Kugelkoordinaten. Damit ergibt sich für das Verhalten der Kugelflächenfunktionen unter  $\mathbf{P}$ :

## 9. Multiplikative Erhaltungssätze

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$\mathbf{P}e^{im\phi} = e^{im(\phi+\pi)} = (-1)^m e^{im\phi}$$

$$\mathbf{P}P_l^m(\cos \theta) = P_l^m(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^{l+m} P_l^m(\cos \theta)$$

$$\mathbf{P}Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{l+2m} Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

Insbesondere haben z.B. die s,d,g,...- Zustände des Wasserstoffatoms  $\pi = +1$ , während die p,f,h,...- Zustände  $\pi = -1$  haben.

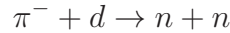
Die Wellenfunktion eines 2-Teilchen-Systems mit den Teilchen  $\alpha$  und  $\beta$  läßt sich in der Form

$$\psi_{\alpha\beta}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta) = \psi_\alpha(\vec{r}_\alpha) \psi_\beta(\vec{r}_\beta) \phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$$

schreiben.  $\phi$  ist die Relativbewegung, sie kann immer in Kugelflächenfunktionen entwickelt werden. Damit erhält man für das Verhalten unter Paritätstransformation

$$\mathbf{P}\psi_{\alpha\beta} = \pi_\alpha \cdot \pi_\beta \cdot (-1)^l \cdot \psi_{\alpha\beta}$$

Die starke und die elektromagnetische Wechselwirkung erhalten die Parität. Ein Beispiel für eine paritätserhaltende Reaktion ist der Einfang eines Pions durch ein Deuteron.



Das Deuteron hat  $L=0$ ,  $S=1$  und  $J=1$ , also ist  $\pi_d = \pi_p \cdot \pi_n \cdot (-1)^0$ . Das Pion wird aus einem elektronischen s-Zustand eingefangen, sodaß die Bilanz lautet

$$\pi_{\pi^-} \cdot \pi_p \cdot \pi_n = \pi_n^2 \cdot (-1)^{L_f} = (-1)^{L_f}$$

Die Wellenfunktion des 2-Neutronen-Zustandes läßt sich als Produkt aus Orts- und Spinwellenfunktion schreiben. Die Spins der Neutronen können zu einem symmetrischen Triplett ( $S = 1$ ,  $S_z = -1, 0, 1$ ) oder zu einem antisymmetrischen Singlett ( $S = 0$ ,  $S_z = 0$ ) koppeln. Die Symmetrie der Spinwellenfunktion unter Teilchenaustausch ist also  $(-1)^{S+1}$ . Die Symmetrie der Ortswellenfunktion ist  $(-1)^L$ , sodaß sich für die gesamte Wellenfunktion  $(-1)^{L+S+1}$  ergibt. Da es sich aber um die Wellenfunktion zweier identischer Fermionen handelt, muß die totale Wellenfunktion antisymmetrisch unter Teilchenaustausch sein. Also muß  $L + S$  gerade sein. Im Ausgangszustand der Reaktion ist  $J = 1$ . Dies ermöglicht im Endzustand die Kopplungen

L	S
0	1
1	0,1
2	1

Von allen Möglichkeiten erfüllt nur  $L = S = 1$  die Vorgabe, daß  $L + S$  gerade ist. Da die Parität der Nukleonen zu  $\pi_p = \pi_n = +1$  gewählt wird, erhält man für das Pion  $\pi_{\pi^-} = -1$ .

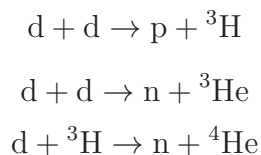
Die Reaktion  $\pi^- + d \rightarrow n + n + \pi^0$  wird nicht beobachtet, woraus man schließen kann, daß das neutrale Pion ebenfalls antisymmetrisch ist. Zu demselben Ergebnis kommt man auch, wenn man die Polarisation im Zerfall  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  untersucht.

Generell haben alle Eichbosonen ( $\gamma, W, Z, \dots$ ) negative Parität. Im Fall des Photons ist dies direkt aus den elektrischen Dipolübergängen in den Atomhüllen ersichtlich: Es gilt die Auswahlregel  $\Delta l = \pm 1$ , der Zustand des Atoms ändert also seine Parität. Da die elektromagnetische Wechselwirkung die Parität erhält, muß also das Photon negative Parität haben.

Es ist üblich, Teilchen durch die Größe  $J^\pi$  zu charakterisieren. Zum Beispiel haben die Pionen  $J^\pi = 0^-$ . Solche Teilchen heißen Pseudoskalare Mesonen, da ihre Wellenfunktion die räumlichen Transformationseigenschaften eines Pseudoskalars hat. Analog dazu gibt es Vektormesonen ( $1^-$ ), skalare Mesonen ( $0^+$ ) und axiale Vektormesonen ( $1^+$ ).

Bei Fermionen haben Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzte Parität, bei Bosonen haben sie die gleiche.

Bei Atomkernen ist die Parität durch den Bahndrehimpuls festgelegt. Man kann sie ermitteln, indem man in Reaktionen der Art



in denen die intrinsischen Paritäten der Reaktionspartner bekannt sind, den Bahndrehimpuls im Anfangs- und Endzustand bestimmt. So erhält man zum Beispiel aus der ersten Reaktion für das  ${}^3\text{H}$   $1/2^+$ . Generell haben alle gg-Kerne im Grundzustand  $S = 0$  und  $L = 0$  und positive Parität.

Ein Test für die Erhaltung der Parität ist der  $\alpha$ -Zerfall des angeregten  ${}^{16}\text{O}$  ( $E^* = 8,87\text{ MeV}$ ). Energetisch ist der Zerfall in den Grundzustand von  ${}^{12}\text{C}$  möglich, die Parität ist in dieser Reaktion jedoch nicht erhalten. Das  ${}^{16}\text{O}^*$  hat  $2^-$ , man kann sich jedoch leicht überzeugen, daß der Endzustand positive Parität hat. Die Halbwertsbreite des Zerfalls ist denn auch mit  $\Gamma_\alpha = 10^{-10}\text{ eV}$  extrem klein.

In den 50er Jahren beschäftigte ein Problem die Physiker, daß unter dem Namen theta-tau-puzzle bekannt geworden ist. Es handelt sich um zwei neutrale Teilchen mit identischer Masse, Lebensdauer und Spin ( $s = 0$ ), die jedoch auf unterschiedliche Weise über die schwache Wechselwirkung zerfallen:

$$\vartheta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$\tau^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

In der ersten Reaktion hat der Endzustand positive Parität, in der zweiten negative. Es waren Yang und Lee, die schließlich auf des Rätsels Lösung kamen: Es gibt keinerlei Evidenz dafür, daß die schwache Wechselwirkung die Parität erhält. Den Beweis für die Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung lieferte dann Frau Wu *et al.* Sie beobachtete den  $\beta$ -Zerfall einer polarisierten  $^{60}\text{Co}$ -Quelle und stellte dabei fest, daß die Intensität der  $\beta$ -Strahlung eine Winkelabhängigkeit zeigt. Die Elektronen werden bevorzugt entgegen der Richtung des Kernspins emittiert, dies bedeutet eine Nichterhaltung der Parität.

Der Grund für die Paritätsverletzung im  $\beta$ -Zerfall ist die Helizität des Neutrinos. Die Helizität  $H$  eines Teilchens ist definiert als

$$H = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{v}|}$$

Ein Elektron, bei dem der Spin parallel zur Flugrichtung eingestellt ist, hat demnach positive Helizität. Normalerweise ist die Helizität keine Erhaltungsgröße, denn wenn ein Teilchen sich mit einer Geschwindigkeit  $v < c$  bewegt, kann man eine Transformation in ein Koordinatensystem vornehmen, daß sich mit  $v' > v$  in die Richtung von  $v$  bewegt. In diesem Koordinatensystem hat sich das Vorzeichen der Geschwindigkeit des Teilchens umgedreht, während der Spin unverändert ist, die Helizität hat sich geändert. Für massive Teilchen hängt die Helizität somit von der Wahl des Koordinatensystems ab. Teilchen mit negativer Helizität (d.h. Geschwindigkeit und Spin sind antiparallel) werden auch linkshändig, solche mit positiver Helizität rechtshändig genannt.

Man hat bisher nur linkshändige Neutrinos und rechtshändige Antineutrinos beobachtet. Unter Paritätstransformation ändert die Helizität als Pseudoskalar ihr Vorzeichen, aus einem rechtshändigen Antineutrino würde also ein linkshändiges, das es aber nicht gibt. Von dieser Paritätsverletzung ist aber nur die schwache Wechselwirkung betroffen, denn an der starken und elektromagnetischen nimmt das Neutrino nicht teil.

## 9.2. Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation  $\mathbf{C}$  dreht das Vorzeichen aller Ladungsquantenzahlen (elektrische Ladung, Leptonzahl, Baryonenzahl, Strangeness, ...) um. D.h. ein Teilchen wird in sein Antiteilchen verwandelt und umgekehrt. Eigenzustände sind daher nur ladungsneutrale Teilchen. Experimentell ist belegt, daß starke und elektromagnetische Wechselwirkungen unter  $\mathbf{C}$  invariant sind. Da  $\mathbf{C}^2 = \mathbf{1}$  ist, kommen nur  $\eta_{\mathbf{C}} = \pm 1$  als Eigenwerte in Frage. Elektromagnetische Felder werden durch bewegte



Ladungen hervorgerufen, also ändern sie unter Ladungskonjugation ihr Vorzeichen. Hieraus folgt auch, daß für das Photon  $\eta_C = -1$  ist.

Ein weiterer Eigenzustand zu **C** ist das neutrale Pion. Es zerfällt in zwei Photonen, muß also  $\eta_C = +1$  haben, da es sich ja um eine multiplikative Erhaltungsgröße handelt. Damit ist der Zerfall in drei Photonen verboten und liefert gleichzeitig einen Test für die C-Erhaltung. Das experimentelle Limit ist

$$\frac{\pi^0 \rightarrow 3\gamma}{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} < 3 \cdot 10^{-8}$$

Prozesse der schwachen Wechselwirkung sind unter **C** nicht invariant und wieder hängt dies mit den Neutrinos zusammen. Die Ladungskonjugation würde nämlich aus einem linkshändigen Neutrino ein linkshändiges Antineutrino machen. Aber die Anwendung von **C** und **P** hintereinander führt auf ein rechtshändiges Antineutrino und sollte somit in Ordnung sein.

### 9.3. Zeitumkehrinvarianz

Der Zeitumkehroperator **T** macht das, was sein Name verheißt: Er dreht die Richtung der Zeit um. Der Impuls und Spin sowie das Magnetfeld ändern unter Zeitumkehr ihr Vorzeichen.

Die Invarianz unter Zeitumkehr kann man z.B. in der starken Wechselwirkung durch den Vergleich der Wirkungsquerschnitte für die Hin- und die Rückreaktion testen. Bei einem Prozess  $A + B \leftrightarrow C + D$  sollten die Matrixelemente bei Zeitumkehrinvarianz gleich sein, d.h. nach Phasenraumkorrektur sollten die Wirkungsquerschnitte gleich sein. Bis jetzt wurde noch keine Abweichung davon nachgewiesen, die starke Wechselwirkung ist also zeitumkehrinvariant.

Ein statisches elektrisches Dipolmoment (EDM) der Elementarteilchen würde die T-Symmetrie verletzen, da es unter Zeitumkehr sein Vorzeichen ändern würde. Die experimentellen Limits sind für das EDM des Neutrons  $< 1,2 \cdot 10^{-25}$  e cm und für das des Elektrons  $< (3 \pm 8) \cdot 10^{-27}$  e cm. Die elektromagnetische Wechselwirkung scheint also ebenfalls T zu erhalten.

**Tabelle 9.1.:** Verhalten einiger Größen unter P-, C- und T-Transformation

Größe	<b>P</b>	<b>C</b>	<b>T</b>
$q$	$q$	$-q$	$q$
$t$	$t$	$t$	$-t$
$\vec{r}$	$-\vec{r}$	$\vec{r}$	$\vec{r}$
$\vec{p}$	$-\vec{p}$	$\vec{p}$	$-\vec{p}$
$\vec{a}$	$-\vec{a}$	$\vec{a}$	$\vec{a}$
$\vec{L}$	$\vec{L}$	$\vec{L}$	$-\vec{L}$
$\vec{s}$	$\vec{s}$	$\vec{s}$	$-\vec{s}$
$\vec{E}$	$-\vec{E}$	$-\vec{E}$	$\vec{E}$
$\vec{B}$	$\vec{B}$	$-\vec{B}$	$-\vec{B}$

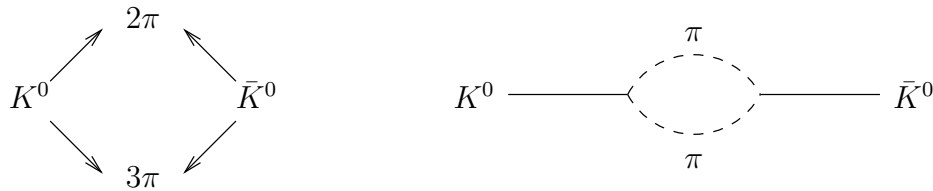
### 9.4. CP-Verletzung und CPT

Das neutrale Kaon  $K^0$  ( $d\bar{s}$ ) und sein Antiteilchen  $\bar{K}^0$  ( $\bar{d}s$ ) gehen unter Paritätstransformation in ihr Negatives über und sind deshalb keine Eigenzustände zu **CP**:

$$\mathbf{P}|K^0\rangle = -|K^0\rangle \quad \mathbf{CP}|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$$

$$\mathbf{P}|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad \mathbf{CP}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

Beide zerfallen in Prozessen der schwachen Wechselwirkung mit  $|\Delta S| = 1$  in zwei oder drei Pionen. Über virtuelle Zustände von Pionen können sich das  $K^0$  und das  $\bar{K}^0$  ineinander umwandeln.



Es kommt also zu einer Mischung der Zustände  $K^0$  und  $\bar{K}^0$ .

Die Pion-Zustände sind Eigenzustände zu **CP**; der  $2\pi$ -Zustand ( $\pi^0\pi^0$  oder  $\pi^+\pi^-$ ) hat den Eigenwert  $+1$ , der  $3\pi$ -Zustand ( $\pi^0\pi^0\pi^0$  oder  $\pi^+\pi^-\pi^0$ ) hat den Eigenwert  $-1$ . Wir erwarten, daß die schwache Wechselwirkung CP erhält, also sollte auch der zerfallende Zustand ein CP-Eigenzustand sein. Die CP-Eigenzustände im Fall der Kaonen sind

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad \mathbf{CP}|K_1\rangle = +|K_1\rangle$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad \mathbf{CP}|K_2\rangle = -|K_2\rangle$$

$K_1$  und  $K_2$  sind nicht mehr Teilchen und Antiteilchen, sondern haben verschiedene Eigenschaften. Ihre Massen sind nicht identisch:  $\Delta m = 3,521 \cdot 10^{-12} \text{ MeV}$  ( $m = 497,7 \text{ MeV}$ ).

Das  $K_1$  sollte immer in zwei, das  $K_2$  in drei Pionen zerfallen, wenn CP erhalten ist. Die Lebensdauer für den  $2\pi$ -Zerfall ist aus Gründen, die mit dem Phasenraum zusammenhängen, wesentlich kürzer:

$$\begin{aligned}\tau_{K_1} &= 0,89 \cdot 10^{-10} \text{ s} \\ \tau_{K_2} &= 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}\end{aligned}$$

Zur Überprüfung, ob die Mischung tatsächlich stattfindet, produziert man einen reinen  $K^0$ -Strahl.

$$K^+ + p \rightarrow K^0 + \Delta^{++}$$

Das  $K^0$  oszilliert dann in  $\bar{K}^0$  und bildet  $K_1$  und  $K_2$ . Das kurzlebige  $K_1$  ist nach einer gewissen Strecke zerfallen und es ist nur noch  $K_2$  übrig. Aus einem Strahl mit anfänglich reiner Strangeness  $S = 1$  ist dann ein Strahl mit gemischter Strangeness geworden.

Zum Test der CP-Erhaltung eignet sich die Suche nach  $2\pi$ -Zerfällen des  $K_2$ . Ein derartiges Experiment wurde 1964 von Christenson, Cronin, Fitch und Turlay am AGS (Alternating Gradient Synchrotron) des BNL durchgeführt. Dabei stellte es sich heraus, daß der Zerfall in zwei Pionen mit einer Wahrscheinlichkeit von  $2 \cdot 10^{-3}$  stattfindet. D.h. die physikalischen Zustände haben eine geringe Beimischung der jeweils „falschen“ Komponente:

$$\begin{aligned}|K_S\rangle &= \mathcal{N}(|K_1\rangle - \epsilon|K_2\rangle) = \mathcal{N}((1 + \epsilon)|K^0\rangle - (1 - \epsilon)|\bar{K}^0\rangle) \\ |K_L\rangle &= \mathcal{N}(\epsilon|K_1\rangle + |K_2\rangle) = \mathcal{N}((1 + \epsilon)|K^0\rangle + (1 - \epsilon)|\bar{K}^0\rangle)\end{aligned}$$

Der Parameter  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  gibt die Stärke der CP-Verletzung an ( $\mathcal{N}$  ist eine Normierungskonstante). Die Beimischung der Komponente mit dem anderen CP-Eigenwert wird als indirekte CP-Verletzung bezeichnet. Im Gegensatz dazu gibt es noch die direkte CP-Verletzung, die beim eigentlichen Zerfall auftritt und durch die Größe  $\epsilon'$  charakterisiert wird.

$$\epsilon' = (12,2 \pm 2,4_{stat} \pm 4,0_{syst}) \cdot 10^{-4}$$

Für relativistische Feldtheorien gibt es ein auf sehr allgemeinen Axiomen fußendes Theorem: Alle Wechselwirkungen sind invariant unter der Hintereinanderausführung von **C**, **P** und **T** in beliebiger Reihenfolge. Das CPT-Theorem hat weitreichende Konsequenzen für die Teilchenphysik. So folgt daraus beispielsweise die Gleichheit

## 9. Multiplikative Erhaltungssätze

von Masse, Betrag der elektrischen Ladung und Lebensdauer bei Teilchen und Antiteilchen. Die CP-Verletzung in der schwachen Wechselwirkung impliziert damit eine T-Verletzung, die aber bisher nicht direkt nachgewiesen wurde.

Experimentell gibt es keinerlei Hinweise auf eine CPT-Verletzung:

$$\frac{m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}}{m_{K^0} + m_{\bar{K}^0}} < 10^{-19} \quad \frac{Q_p - Q_{\bar{p}}}{e} < 2 \cdot 10^{-5} \quad \frac{\tau_{\mu^+} - \tau_{\mu^-}}{\tau_{\mu^+} + \tau_{\mu^-}} < 10^{-4}$$

# 10. Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

H. Yukawa formulierte 1934 eine der elektromagnetischen Wechselwirkung analoge Theorie der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Das durch eine zeitlich konstante Ladungsverteilung  $q\rho(\vec{x})$  erzeugte elektrische Potential  $A_0$  erfüllt die Gleichung

$$\Delta A_0(\vec{x}) = -4\pi q\rho(\vec{x})$$

Sie wird von

$$A_0(\vec{x}) = \int \frac{q\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

gelöst. Im Falle einer Punktladung im Ursprung ( $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ ) ergibt dies das Coulombpotential

$$A_0(r) = \frac{q}{r}$$

Nach Yukawa kann die elektromagnetische Wechselwirkung für die Wechselwirkung zwischen Nukleonen zwar als Vorbild dienen, aber das elektromagnetische Potential fällt nicht schnell genug ab. Er führte deshalb in der Differentialgleichung für das Feld  $\phi$  einen zusätzlichen Term  $-k^2\phi$  ein.

$$(\Delta - k^2)\phi(\vec{x}) = 4\pi g\rho(\vec{x})$$

$g\rho$  ist die hadronische Quelle, wobei  $g$  die Stärke und  $\rho$  die räumliche Verteilung (also die Wahrscheinlichkeitsdichte) angibt. Die Lösung der Gleichung ist

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{e^{-k|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} g\rho(\vec{x}') d^3x'$$

Für eine hadronische Punktquelle im Koordinatenursprung erhält man das Yukawa-Potential

$$\phi(r) = -g \frac{e^{-kr}}{r}$$

Zur Bestimmung von  $k$  betrachtet man die Differentialgleichung für ein freies Feld ( $\rho = 0$ ).

## 10. Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

$$(\Delta - k^2)\phi(\vec{x}) = 0$$

Die dazugehörige quantisierte Gleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung, die aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  folgt.

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{x},t) = 0$$

Durch Vergleich der beiden Gleichungen ergibt sich

$$k = \frac{mc}{\hbar}$$

Dies ist die inverse Comptonwellenlänge des ausgetauschten Teilchens. Im Gegensatz zur elektromagnetischen Wechselwirkung ist das Feldquant hier massiv. Die Reichweite der Wechselwirkung ist also durch die Masse des Austauschteilchens gegeben. Aufgrund dieser Ergebnisse postulierte Yukawa die Existenz eines Bosons mit einer Masse von etwa 140 MeV, das die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen vermittelt. Später wurde das Pion entdeckt und mit diesem Feldquant identifiziert.

Es soll nun für den nichtrelativistischen Fall der Hamiltonoperator  $\mathbf{H}_{\pi N}$  für den Pionenaustausch zwischen Nukleonen bestimmt werden. Dabei ist folgendes zu beachten: Das Pion ist ein pseudoskalares Boson mit Isospin 1, d.h. seine Wellenfunktion  $\vec{\phi}(\vec{x})$  ist im Ortsraum ein Pseudoskalar und im Isospinraum ein Vektor. Das Nukleon ist in beiden Räumen ein Vektor.

Als Zutaten stehen außer der Wellenfunktion des Pions die Operatoren

$$\vec{\tau} = 2\vec{\mathbf{I}} \quad \text{und} \quad \vec{\sigma} = \frac{2\vec{\mathbf{S}}}{\hbar}$$

die mit dem Isospin- bzw. Spinoperator des Nukleons zusammenhängen, zur Verfügung. Der Hamiltonoperator muß im Orts- und im Isospinraum ein Skalar sein. Im Isospin erreicht man dies am einfachsten durch die Bildung des Skalarprodukts der beiden Vektoren

$$\mathbf{H}_{\pi N} \sim \vec{\tau} \cdot \vec{\phi}(\vec{x})$$

$\sigma$  ist ein axialer Vektor im Ortsraum, aber  $\phi(\vec{x})$  ist ein Pseudoskalar. Man kann sich aber durch Bildung des Gradienten einen axialen Vektor beschaffen.

$$\mathbf{H}_{\pi N} \sim \vec{\sigma} \cdot \nabla\phi(\vec{x})$$

Die Kombination von beiden ergibt dann

$$\mathbf{H}_{\pi N} = F_{\pi N}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla\phi(\vec{x}))$$

$F_{\pi N}$  ist die Kopplungskonstante. Dieser Hamiltonoperator beschreibt eine Punktwechselwirkung, für ein ausgedehntes Nukleon erhält man

$$\mathbf{H}_{\pi N} = F_{\pi N} \int \rho(\vec{x}) \vec{\sigma} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla \phi(\vec{x})) d^3x$$

Für eine sphärische Quelle  $\rho(\vec{x}) = \rho(r)$  verschwindet dieser Ausdruck immer, außer wenn die Pionwellenfunktion eine  $p$ -Welle beschreibt ( $l = 1$ ). Dieser Befund ist im Einklang mit experimentellen Daten aus Pion-Nukleon-Streuung.

Die Kopplungskonstante  $F_{\pi N}$  ist dimensionsbehaftet, man verwendet deshalb lieber die dimensionslose Kopplungskonstante

$$f_{\pi NN}^2 = \frac{m_\pi^2}{4\pi\hbar^5 c} F_{\pi N}^2 = 0,080 \pm 0,005$$

Aus den beobachteten Eigenschaften von Kernen und Streuexperimenten kann man einige Charakteristika der Kraft zwischen Nukleonen ableiten.

- Sie ist hauptsächlich attraktiv.
- Die Reichweite ist etwa 1 fm, daraus folgt eine Potentialtiefe von etwa 50 MeV.
- Sie ist unabhängig von der elektrischen Ladung.
- Sie zeigt Sättigung, denn sonst würde die Bindungsenergie proportional zu  $A^2$  anstatt zu  $A$  sein und alle Kerne hätten einen Durchmesser von 1 fm. D.h. es muß eine Austauschwechselwirkung geben, oder die Nukleon-Nukleon-Kraft wird bei kleinen Abständen repulsiv (in der Tat gibt es Evidenz für beide Effekte).
- Sie hängt von der Orientierung der Nukleospins ab.
- Sie hat eine nicht-zentrale Komponente.
- Es gibt eine Abhängigkeit von der relativen Orientierung der Spins zu den Bahndrehimpulsen.

Die nicht-zentrale Komponente der Nukleon-Nukleon-Kraft wird Tensorkraft genannt. Sie hängt vom Winkel zwischen der Verbindungslinie zwischen den Nukleonen und dem Spin ab. In Abbildung 10.1 sind zwei extreme Fälle skizziert. Das Verhalten ist analog zu dem von zwei Stabmagneten. Die Wechselwirkungsenergie zweier magnetischer Dipolmomente  $\vec{m}_{1,2}$  ist

$$E_{12} = \frac{1}{r^3} (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r}))$$

Der Tensoroperator für den Fall zweier Nukleonen ist

## 10. Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung



**Abbildung 10.1.:** Tensorkraft der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung in Analogie zur Kraft zwischen Stabmagneten

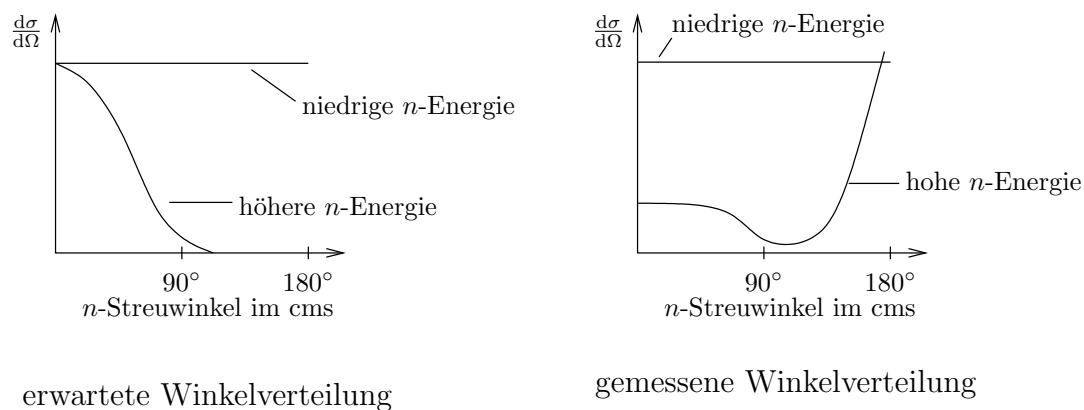
$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

$\sigma_{1,2}$  sind die Spinoperatoren. Der Term  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$  sorgt dafür, daß  $S_{12}$  über alle Winkel gemittelt verschwindet und eliminiert so Komponenten der zentralen Kraft.

Noch ein paar Bemerkungen zur Austauschwechselwirkung: Der Wirkungsquerschnitt für  $np$ -Streuung ist (in der Bornschen Näherung)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2 \quad f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\vec{x}) \exp\left(\frac{i\vec{q} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right) d^3x$$

$V(\vec{x})$  ist das Wechselwirkungspotential. Das erwartete und das gemessene Verhalten sind in Abbildung 10.2 dargestellt.



**Abbildung 10.2.:** Erwartete und gemessene Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für  $np$ -Streuung

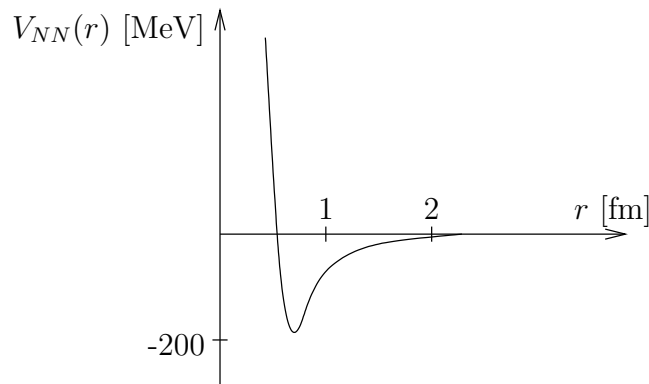
Die Erklärung für diese Diskrepanz ist der Austausch von geladenen Pionen bei höheren Neutronenergien. Dadurch wird das Proton in ein Neutron verwandelt und umgekehrt. Das vorwärts fliegende Nukleon ist dann ein Proton geworden und das Target, das den Rückstoß aufnimmt, ist ein Neutron.

Die Wechselwirkungsenergie zweier Nukleonen  $A$  und  $B$  durch Pionenaustausch ist



$$\begin{aligned}
V_{\pi NN} &= F_{\pi NN} \vec{\tau}_A \cdot \vec{\tau}_B (\sigma_A \cdot \nabla)(\sigma_B \cdot \nabla) \frac{e^{-kr}}{r} \\
&= 4\pi \hbar c f_{\pi NN}^2 \vec{\tau}_A \cdot \vec{\tau}_B \left\{ \frac{1}{3} \vec{\sigma}_A \cdot \vec{\sigma}_B + S_{AB} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right) \right\} k^2 \frac{e^{-kr}}{r}
\end{aligned}$$

Um die aus experimentellen Ergebnissen abgeleitete potentielle Energie in zufriedenstellender Weise reproduzieren zu können, muß man aber noch den Austausch anderer Mesonen sowie zwei-Pion-Austausch berücksichtigen. Die Beiträge der anderen Mesonen werden aufgrund ihrer größeren Masse erst bei kleineren Abständen wichtig. Der Austausch von Vektormesonen ( $\rho$ ,  $\omega$ , ...) führt zu einem stark repulsiven Verhalten bei kleinen Abständen (Abbildung 10.3). Der ein-Pion-Austausch nach Yukawa ist für den langreichweitigen Teil verantwortlich. Das Potential hängt stark vom Spin und der Parität des betreffenden Zustands ab.



**Abbildung 10.3.:** Ungefäherer Verlauf des NN-Potentials

# 11. Einfache Kernmodelle

Für die Masse von Atomen gilt die Bethe-Weizsäcker-Formel

$$m(Z,N) = Zm_H + Nm_n - B(Z,N)$$

$m_H$  : Masse des H-Atoms  
 $m_n$  : Neutronmasse  
 $B(Z,N)$  : Bindungsenergie

Die Differenz zwischen der Masse des Kerns und der Masse seiner Bestandteile muss die Bindungsenergie sein. Im Prinzip ist noch eine Korrektur der Bindungsenergien der Elektronen nötig, sie ist aber klein und wird deshalb vernachlässigt. Die Bindungsenergie pro Nukleon ist in Abbildung 11.1 skizziert. Sie hat ein Maximum bei etwa  $A \simeq 60$ , es kann also sowohl durch die Spaltung schwerer als auch durch die Fusion leichter Kerne Energie gewonnen werden.

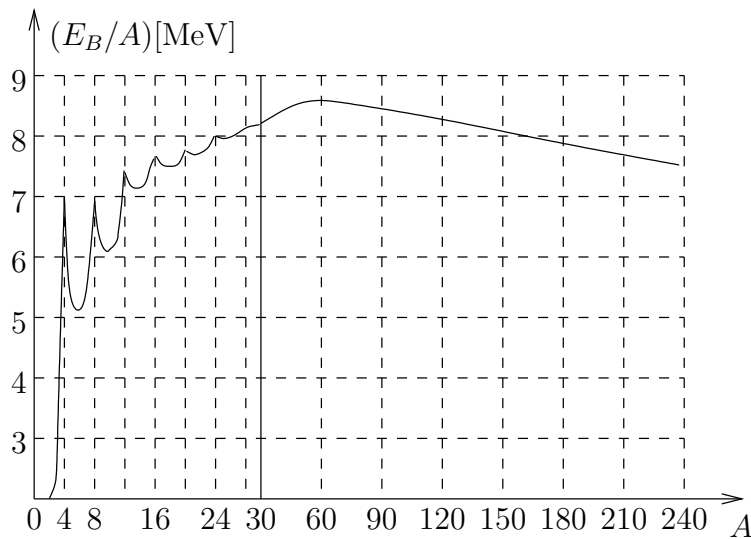
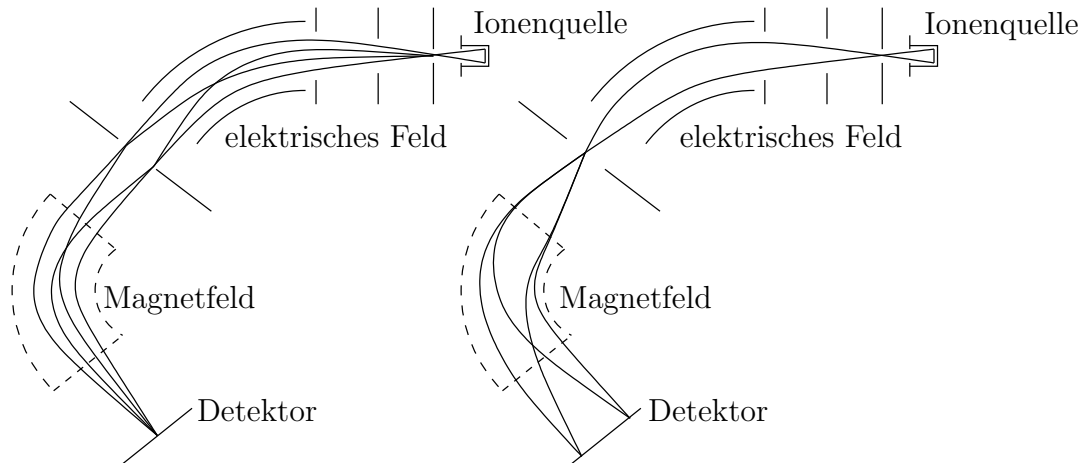


Abbildung 11.1.: Bindungsenergie pro Nukleon

Die Massen oder Bindungsenergien können auf verschiedene Arten gemessen werden:

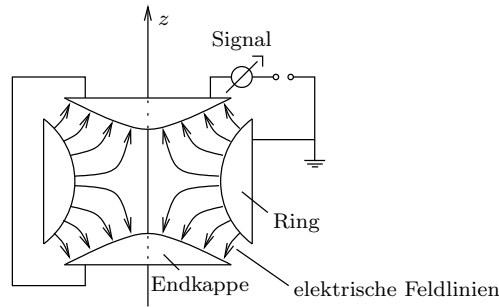
- **Präzisionsmassenspektroskopie:** In einem Massenspektrometer mit doppelter Fokussierung werden die Ionen zunächst beschleunigt und dann in einem Zylinderkondensator durch das elektrische Feld abgelenkt. Sie werden



**Abbildung 11.2.:** Funktionsweise eines doppelfokussierenden Massenspektrometers, links zwei Strahlen mit Ionen gleicher Masse und verschiedenen Impulsen, rechts mit Ionen unterschiedlicher Masse und gleicher Energie

gemäß ihrer Energie auf Punkte in einer Ebene fokussiert, wo mit einer Blende die gewünschte Energie selektiert wird. Danach passieren sie ein Magnetfeld, das die Ionen nach ihrer Masse trennt und gleichzeitig Teilchen mit gleicher Masse und unterschiedlichem Impuls wieder auf einen Punkt fokussiert. Diese Anordnung erlaubt sehr genaue Messungen, so können zum Beispiel Molekülionen mit gleicher Kernmassenzahl unterschieden werden. Die Massenspektroskopie eignet sich für geladene stabile Teilchen.

- Bei instabilen Teilchen kann man die **Übergangsenergie beim Zerfall** messen und daraus die Masse eines beteiligten Teilchens bestimmen, wenn die Massen der anderen Partner bekannt sind. Beim Zerfall wird die Differenz in der Masse zwischen dem zerfallenden Teilchen und den Zerfallsprodukten als Energie frei.
- **Energiegrenzen bei Kernreaktionen:** Andersherum kann man auch untersuchen, wieviel Energie man aufbringen muss, um eine bestimmte Reaktion zu ermöglichen. Daraus kann man Rückschlüsse auf die Bindungsenergien und somit die Massen ziehen.
- Die Masse des Protons und anderer positiver Ionen kann mit einem **Zyklotron-Resonanz-Spektrometer** mit großer Genauigkeit gemessen werden. Dazu werden die Ionen in einer evakuierten Penningfalle eingefangen. Sie besteht aus einem homogenen Magnetfeld in  $z$ -Richtung und einem um die  $z$ -Achse rotationssymmetrischen hyperbolischen elektrischen Feld (Abbildung 11.3). In den beiden Feldern bewegen sich die Ionen auf komplizierten Bahnen, die in verschiedene Anteile zerlegt werden können. Sie bestehen aus einem Kreis



**Abbildung 11.3.:** Querschnitt durch eine Penningfalle

in der  $xy$ -Ebene mit der Kreisfrequenz  $\omega_z$  (Zyklotronbewegung), dessen Mittelpunkt eine Schwingung in  $z$ -Richtung mit der Kreisfrequenz  $\omega_{el}$  ausführt und dabei langsam auf einer Kreisbahn in der  $xy$ -Ebene driftet (Betatronbewegung). Die Kreisfrequenz der resultierenden Bewegung ist

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_z}{2}\right)^2 - \frac{\omega_{el}^2}{2}}$$

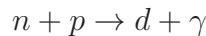
In den Polkappen wird durch die Bewegung der Ionen eine elektrische Spannung  $U(t)$  induziert, deren Fouriertransformierte scharfe Maxima bei  $\omega = \omega_{\pm}$  zeigt:

$$U(\omega - \omega_{\pm}) = \int U(t) e^{i(\omega - \omega_{\pm})t} dt$$

Aus den Werten für  $\omega_{\pm}$  kann man die Zyklotronfrequenz und daraus die Masse bestimmen.

$$\omega_z = \omega_+ + \omega_- = \frac{qB}{m}$$

- Die **Neutronmasse** kann aus der Reaktion



bestimmt werden, indem die Energie der Röntgenstrahlung (etwa 2,2 MeV) durch Kristallbeugung gemessen wird. Wenn sich das Neutron beim Einfang in Ruhe befindet, gilt

$$m_n + m_p - m_d = \hbar\omega + \frac{\hbar^2\omega^2}{2m_d}$$

Der letzte Term ist die kinetische Energie, die das Deuteron durch den Rückstoß erhält. Wenn die Proton- und die Deuteronmasse bekannt sind, kann man die Neutronmasse bestimmen.

## 11.1. Tröpfchenmodell

Die Kernkräfte sind kurzreichweitig, so daß der größte Teil der Wechselwirkungen zwischen den nächsten Nachbarn stattfindet und es im Kern zur Sättigung kommt. Die Nukleondichte ist konstant und so gilt für den Radius

$$r = r_0 \cdot A^{1/3}$$

Das Tröpfchenmodell behandelt den Kern wie einen Tropfen einer inkompressiblen Flüssigkeit. Zur Bindungsenergie tragen verschiedene Terme bei:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$$

1. Der Löwenanteil ist die Energie, die aufgrund der Kernkräfte bei der Vereinigung von Nukleonen frei wird. Sie ist aufgrund der kurzen Reichweite der Kraft proportional zur Anzahl der Nukleonen

$$B_1 = a_V \cdot A$$

Da  $A$  proportional zum Kernvolumen ist, heißt dieser Beitrag **Volumen-Energie**.

2. Die Nukleonen an der Oberfläche haben weniger Nachbarn und sind deshalb auch weniger stark gebunden. Diesem Effekt trägt die **Oberflächenenergie**

$$B_2 = -a_S \cdot A^{2/3}$$

rechnung.

3. Die Coulombabstoßung zwischen den Protonen verringert ebenfalls die Bindungsenergie. Für eine homogen geladene Kugel ist die **Coulomb-Energie** proportional zu  $q^2/R$ , also im Fall des Kerns

$$B_3 = -a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

4. Ein Überschuss an Neutronen führt ebenfalls zu einer Verringerung der Bindungsenergie um

$$B_4 = -a_A \cdot \frac{(Z - A/2)^2}{A}$$

Dieser Term heißt **Asymmetrie-Energie**.

5. Eine gerade Anzahl Nukleonen einer Sorte ist stärker gebunden als ein ungerade. Es gibt also noch einen Beitrag der **Paarungsenergie**, der für Kerne mit geradem  $Z$  und  $N$  (gg-Kerne) positiv und für uu-Kerne (ungerades  $Z$  und  $N$ ) negativ ist, für gemischte (ug und gu) verschwindet er:

$$B_5 = \begin{cases} a_P \cdot A^{-1/2} & \text{für } gg \\ 0 & \text{für } ug, gu \\ -a_P \cdot A^{-1/2} & \text{für } uu \end{cases}$$

## 11. Einfache Kernmodelle

Die Konstanten werden empirisch aus einer möglichst großen Menge von Daten bestimmt.

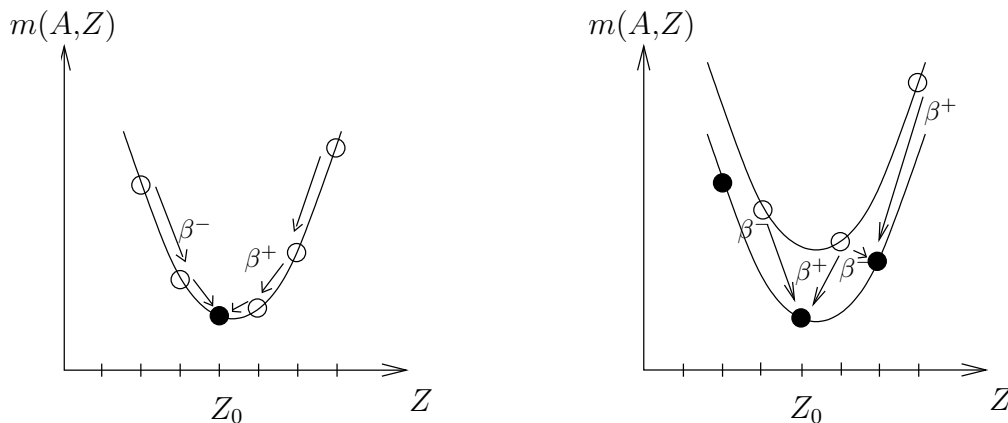
$$\begin{aligned} a_V &= 15,85 \text{ MeV} \\ a_S &= 18,34 \text{ MeV} \\ a_C &= 0,71 \text{ MeV} \\ a_A &= 92,86 \text{ MeV} \\ a_P &= 11,46 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Die Formel beschreibt das mittlere Verhalten der Kerne und kann die insbesondere bei kleinen Massenzahlen vorkommenden Schaleneffekte nicht erklären, oberhalb von  $A = 40$  ist sie aber auf 1% genau.

Einsetzen in die Bethe-Weizsäcker-Formel ergibt für die Kernmasse

$$m(A,Z) = Zm_H + (A-Z)m_n - \left( a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A} \pm a_P \frac{1}{A^{1/2}} \right)$$

Ein wichtiger Punkt ist das Verhalten innerhalb einer Isobare (d.h.  $A$  ist konstant). Bei festem  $A$  hat die Masse als Funktion von  $Z$  alleine die Form einer Parabel. Für ungerades  $A$  erhält man eine Parabel, für gerades  $A$  zwei: eine für gg- und eine für uu-Kerne. Im Prinzip ist nur der Kern mit der geringsten Masse (also der größten Bindungsenergie) stabil, die anderen können durch  $\beta$ -Zerfälle einen energetisch günstigeren Zustand erreichen (Abbildung 11.4).



**Abbildung 11.4.:** Kernmassen innerhalb der Isobaren für ungerades (links) und gerades  $A$  (rechts)

Die Lage des Minimums und damit des stabilsten Kerns lässt sich leicht aus der Massenformel zu

$$Z_0(A) = \frac{A}{2} \left( \frac{m_n - m_H + a_A}{a_C A^{2/3} + a_A} \right)$$

bestimmen. Die Werte für  $Z_0$  in der  $N$ - $Z$  - Ebene ergeben die Linie der größten Stabilität (Abbildung 11.5).

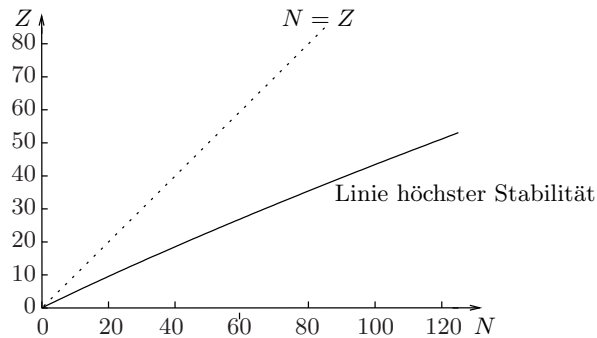


Abbildung 11.5.: Lage der stabilsten Kerne in der  $N$ - $Z$  - Ebene

## 11.2. Fermigasmodell

Die Atomkerne haben viele Eigenschaften, die am besten durch ein Modell unabhängiger Teilchen beschrieben werden können. Das einfachste Modell dieser Art ist das Fermigasmodell. Danach können sich die Nukleonen frei in einer Kugel mit Radius  $r_0 A^{1/3}$  bewegen ohne in Wechselwirkung zu treten. Einzig das Pauliprinzip muß beachtet werden.

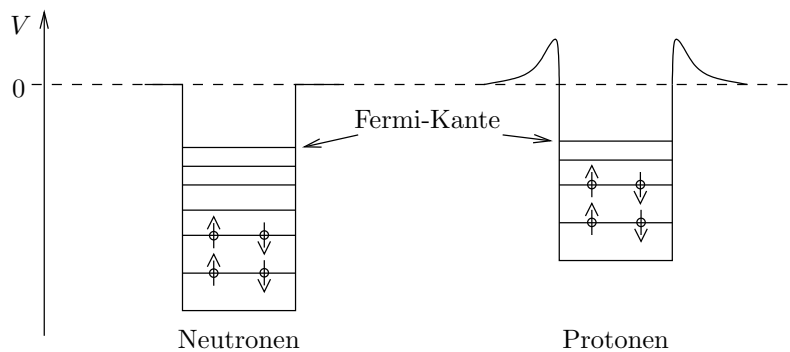


Abbildung 11.6.: Potentiale für Protonen und Neutronen (die anderen eingezeichneten Niveaus sollen ebenfalls besetzt sein, die Nukleonen sind aus Platzgründen weggelassen)

Das Potential sieht für Protonen und Neutronen etwas unterschiedlich aus, da bei den Protonen die Coulombabstoßung zu berücksichtigen ist (Abbildung 11.6). Das Potential der Protonen ist also weniger tief. In jedem Potential stehen eine endliche Zahl diskreter Energieniveaus zur Verfügung, die mit je zwei Nukleonen besetzt werden können (Pauli-Prinzip). Im Grundzustand, also dem energetisch günstigsten Zustand, sind die Niveaus von unten her aufgefüllt. Es sind dann alle Zustände bis zur Fermi-Grenze besetzt, sie wird durch die Fermienergie  $E_F$  oder den Fermiimpuls  $p_F$  charakterisiert. Die Fermi-Kanten von Protonen und Neutronen liegen bei  $\beta$ -stabilen Kernen in etwa gleich hoch, denn sonst könnte ein Nukleon durch Umwandlung in die andere Sorte einen niedrigeren Zustand besetzen. Dies führt also dazu, daß es in den meisten Kernen mehr Neutronen als Protonen gibt.

## 11. Einfache Kernmodelle

Um den Fermiimpuls berechnen zu können muß man die Nukleonen im Phasenraum unterbringen, wo jedes ein Volumen  $h^3$  beansprucht. Die Zahl der Zustände ist das zur Verfügung stehende Volumen geteilt durch  $h^3$ . Am Beispiel der Neutronen (zwei Neutronen pro Zustand):

$$\begin{aligned} N &= 2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x d^3p = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int p^2 d\Omega_p dp = \frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{F,n}} p^2 dp \\ &= \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} p_{F,n}^3 = \frac{4r_0^3 A}{9\pi\hbar^3} p_{F,n}^3 \\ \Rightarrow p_{F,n} &= \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9\pi N}{4A} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

Zu beachten ist, daß diese Formel den Impuls bzw. die Energie relativ zum Grund des Potentials, nicht aber den absoluten Wert angibt. Analog ergibt sich für die Protonen

$$p_{F,p} = \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9\pi Z}{4A} \right)^{1/3}$$

Ein typischer Zahlenwert ist

$$p_F \simeq 250 \frac{\text{MeV}}{c}$$

Die mittlere Energie pro Nukleon ist

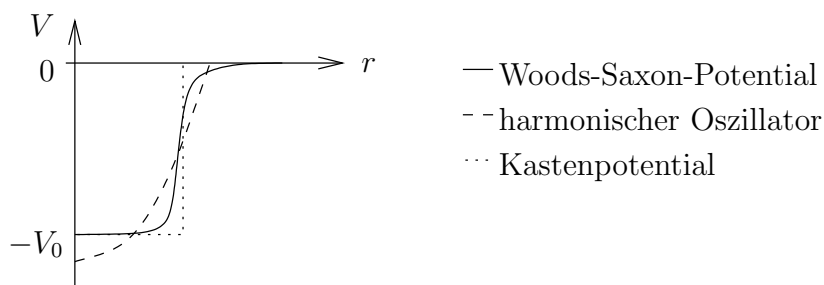
$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E d^3p}{\int_0^{p_F} d^3p} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \simeq 25 \text{ MeV}$$

Genaugenommen ist das Potential natürlich kein Kasten, sondern hat die in Abbildung 12.1 skizzierte Form des Woods-Saxon-Potentials.



## 12. Schalenmodell

Die meisten allgemeinen Eigenschaften von Kernen können mit Tröpfchen- oder Fermigasmodell beschrieben werden. Es gibt aber auch Befunde, die auf Schalenefekte ähnlich denen in der Hülle hinweisen und mit diesen Modellen nicht erklärt werden können. Auch hier treten immer wieder sog. magischen Zahlen 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 in Erscheinung. Beispiele hierfür sind die relativen Häufigkeiten von  $gg$ -Isotopen, die als Funktion von  $A$  auffällige Peaks bei  $N = 50, 82, 126$  zeigen, sowie die Zahl der stabilen Isotope. Die Separationsenergien des letzten Nukleons sind ebenfalls bei abgeschlossenen Schalen besonders hoch, bei einem zusätzlichen Nukleon sehr niedrig. Kerne mit abgeschlossenen Schalen sollten kugelsymmetrisch sein, verschwindenden Gesamtdrehimpuls haben und besonders stabil sein. Messungen der Quadrupolmomente bestätigen die Kugelsymmetrie und die ersten angeregten Zustände haben bei abgeschlossenen Schalen besonders hohe Energien, diese Konfigurationen sind also besonders stabil.



**Abbildung 12.1.:** Woods-Saxon-Potential des Atomkerns und Näherung durch Kastenpotential oder harmonischen Oszillator

Eine erste Möglichkeit, sich dem Problem zu nähern, besteht wie so oft in einem Modell unabhängiger Teilchen. Dabei wird angenommen, daß Kollisionen unter den Nukleonen durch das Pauliprinzip stark unterdrückt sind und sie sich daher unabhängig voneinander in einem kugelsymmetrischen Kernpotential bewegen. Das Potential, das ein bestimmtes Nukleon zu spüren bekommt, sollte aufgrund der kurzen Reichweite der Kernkräfte proportional zur Dichteverteilung sein. Die Dichteverteilung ist näherungsweise gleich der Ladungsverteilung und diese ist durch die Fermiverteilung gegeben. Ein naheliegender Ansatz für das Potential wäre also ein attraktives Potential von der Form der Fermiverteilung (Abbildung 12.1). Es hat allerdings den Nachteil, daß die Lösungen der Schrödingergleichung nicht in geschlossener Form angegeben werden können. Für die ersten Überlegungen kann man sich auf ein Kastenpotential oder einen harmonischen Oszillator zurückzie-

## 12. Schalenmodell

hen. Die Zustände eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators sind bekannt und in Tabelle 12.1 angegeben. Da in jedem Niveau zwei Nukleonen unterkommen können, ist der Entartungsgrad  $(N+1)(N+2)$ . In sphärischen Koordinaten werden die Zustände durch  $n$  und  $l$  charakterisiert; es ist  $N = 2n + l$ .

**Tabelle 12.1.:** Energieniveaus des dreidimensionalen harmonischen Oszillators

$N$	Orbitale $((n+1)l)$	Parität	Entartungsgrad	Gesamtzahl der Zustände
0	1s	+	2	2
1	1p	-	6	8
2	2s,1d	+	12	20
3	2p,1f	-	20	40
4	3s,2d,1g	+	30	70
5	3p,2f,1h	-	42	112
2	4s,3d,2g,1i	+	56	168

Die ersten drei magischen Zahlen sind also richtig, die nachfolgenden aber nicht mehr. Die Entartung von Zuständen mit unterschiedlicher Drehimpulsquantenzahl  $l$  ist zufällig und hängt mit der speziellen Form des Potentials zusammen. Es ist also anzunehmen, daß diese Entartung bei anders geformten Potentialen nicht auftritt. Insbesondere muss man davon ausgehen, daß es im Kern zur Aufspaltung kommt. Dies kann aber das Problem mit den magischen Zahlen nicht lösen, da die Aufspaltung nur die Struktur innerhalb der einzelnen Schalen betrifft.

Bisher wurde der Spin der Nukleonen nicht berücksichtigt, da die beiden Zustände  $l \pm 1/2$  eines Nukleon mit Drehimpuls  $l$  im Kastenpotential und beim harmonischen Oszillator entartet sind. Im Kern führt die Wechselwirkung des Spins mit dem Bahndrehimpuls zu einer Aufspaltung dieser Niveaus, das mit  $l+1/2$  ist energetisch bevorzugt. Der Gesamtdrehimpuls eines Nukleons ist

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

Die Niveaus werden jetzt mit  $(n+1)l_j$  (also z.B.  $1p_{1/2}$  und  $1p_{3/2}$ ) bezeichnet. Die Nukleonen haben eine zusätzliche Energie

$$V_{ls} = C_{ls} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$$

kann man leicht die Wirkung des Operators  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  auf einen Zustand  $|\vec{\alpha}, j, l, s\rangle$ , wobei  $\vec{\alpha}$  alle anderen Quantenzahlen repräsentiert, ausrechnen:

$$\vec{l} \cdot \vec{s} |\vec{\alpha}, j, l, s\rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) |\vec{\alpha}, j, l, s\rangle$$

Für ein Nukleon ( $s = 1/2$ ,  $j = l \pm 1/2$ ) ergibt sich

$$\vec{l} \cdot \vec{s} |\vec{\alpha}, j, l, 1/2\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \hbar^2 l |\vec{\alpha}, j, l, 1/2\rangle & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \hbar^2 (l + 1) |\vec{\alpha}, j, l, 1/2\rangle & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Die Energieaufspaltung zwischen den beiden Niveaus ist also

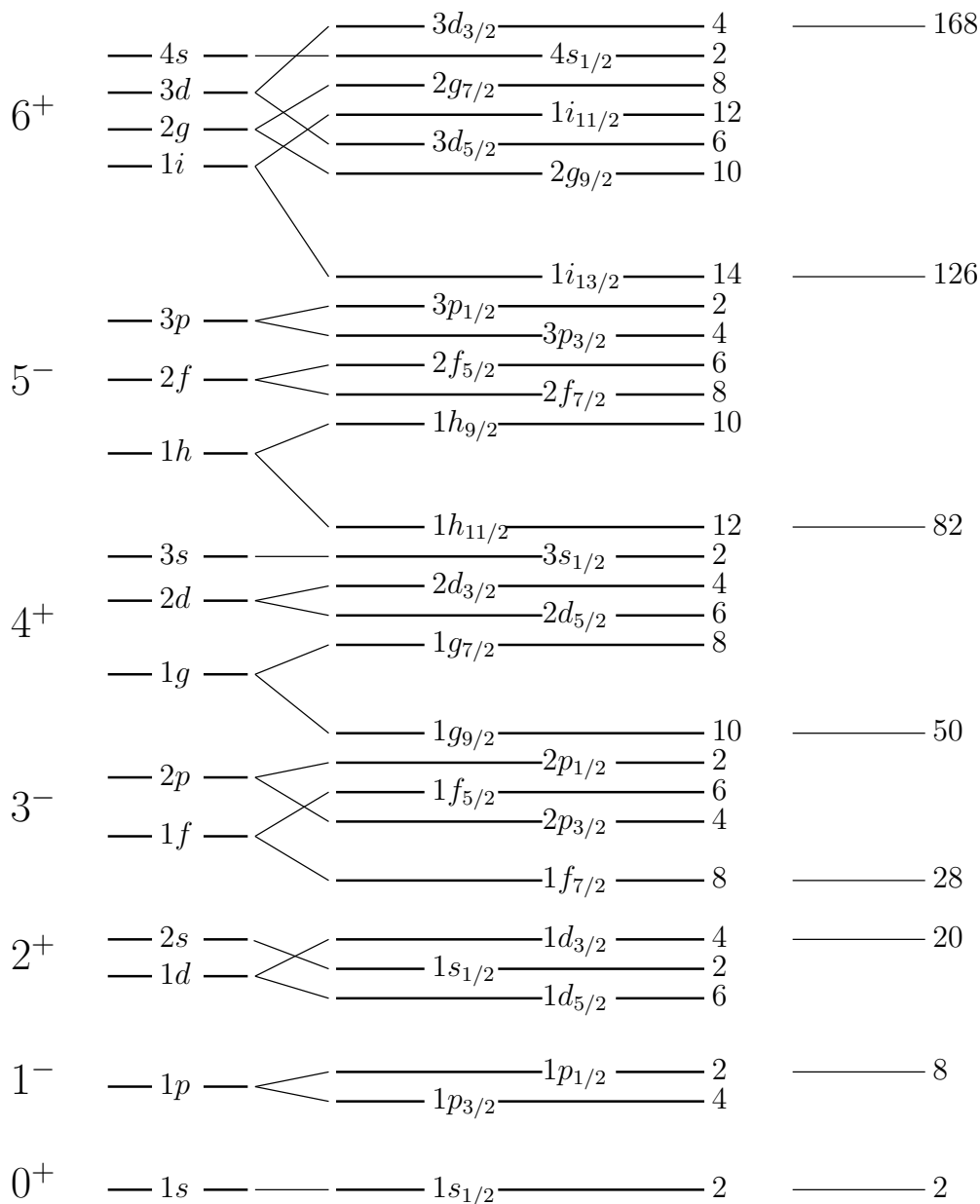
$$\Delta E_{ls} = \left( l + \frac{1}{2} \right) \hbar^2 C_{ls}$$

Der Effekt wird also mit zunehmendem  $l$  größer.  $\Delta E_{ls}$  liegt in der Größenordnung von ein paar MeV und ist damit groß genug, um die Schalen des harmonischen Oszillators durcheinanderzubringen. Die Energieniveaus unter Berücksichtigung der  $ls$ -Kopplung sind in Abbildung 12.2 skizziert. Jetzt ergeben sich also auch die richtigen magischen Zahlen. Die Niveaus sind bis etwa 50 für Protonen und Neutronen im Wesentlichen dieselben, darüber gibt es Abweichungen.

In Kapitel 10 wurde erwähnt, daß die Kraft zwischen den Nukleonen eine Komponente enthält, die von der Orientierung der Spins relativ zu den Bahndrehimpulsen abhängt. Sie kann mit der  $ls$ -Kopplung identifiziert werden.

Die exakte Lösung des Schalenmodells wird mit zunehmendem  $A$  unmöglich, weil der Rechenaufwand zum Diagonalisieren großer Matrizen zu groß wird. Die Grenze ist etwa bei der  $(f,p)$ -Schale erreicht. Danach kann man das Problem nur noch mit Monte Carlo Methoden numerisch lösen.

12. Schalenmodell



**Abbildung 12.2.:** Aufspaltung der Energieniveaus des harmonischen Oszillators durch die Aufhebung der Entartung von Niveaus mit unterschiedlichem Drehimpuls und durch die  $ls$ -Kopplung (von links nach rechts), angegeben sind außerdem die Zahl der Zustände in jedem Niveau und insgesamt bis zu einem bestimmten Niveau (magische Zahlen)

# 13. Elektromagnetische Wechselwirkung

In diesem Kapitel sollen elektromagnetische Übergänge in Atomkernen behandelt werden. Es ist zweckmäßig, das elektromagnetische Feld des Atomkerns in Multipolkomponenten zu entwickeln, da diese einen definierten Drehimpuls und Parität haben. Mithilfe von Erhaltungssätzen kann man dann Auswahlregeln aufstellen.

Der Atomkern soll durch eine räumlich begrenzte Ladungs- und Stromverteilung beschrieben werden. Unter der Annahme, daß sich die zeitliche Entwicklung in Fourierkomponenten zerlegen läßt, kann man sich auf Zeitabhängigkeiten der Form  $e^{-i\omega t}$  beschränken. Die Maxwellgleichungen im quellenfreien Raum lauten dann

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= ik\vec{H} & \nabla \times \vec{H} &= -ik\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{H} &= 0\end{aligned}$$

mit  $k = \omega/c$ . Die Lösungen sind elektrische und magnetische Multipolfelder der Ordnung  $(l, m)$  ( $El$ - bzw.  $Ml$ -Felder).

$$\begin{aligned}\vec{H}_{lm}^{(E)} &= h_l^{(1)}(kr)\vec{L}Y_{lm}(\vartheta, \phi) \\ \vec{E}_{lm}^{(E)} &= \frac{i}{k}\nabla \times \vec{H}_{lm}^{(E)} \\ \vec{E}_{lm}^{(M)} &= h_l^{(1)}(kr)\vec{L}Y_{lm}(\vartheta, \phi) \\ \vec{H}_{lm}^{(M)} &= -\frac{i}{k}\nabla \times \vec{E}_{lm}^{(M)}\end{aligned}$$

wobei

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}(J_{l+1/2}(x) + iN_{l+1/2}(x))$$

die sphärische Hankelfunktion und

$$\vec{L} = \frac{1}{i}(\vec{r} \times \nabla)$$

ist. Die allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen kann als Linearkombination dieser Felder geschrieben werden.

$$\vec{H} = \sum_{l,m} \left( \frac{a_E(l,m)}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{H}_{lm}^{(E)} + \frac{a_M(l,m)}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{H}_{lm}^{(M)} \right)$$

### 13. Elektromagnetische Wechselwirkung

$$\vec{E} = \sum_{l,m} \left( \frac{a_E(l,m)}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{E}_{lm}^{(E)} + \frac{a_M(l,m)}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{E}_{lm}^{(M)} \right)$$

Die Koeffizienten  $a_E(l,m)$  und  $a_M(l,m)$  geben die Anteile der verschiedenen Multipolfelder an. Sie können aus der Ladungs- und Stromverteilung und der intrinsischen Magnetisierung des Atomkerns bestimmt werden. Für die Zeitabhängigkeit wird wieder

$$\rho(\vec{x},t) = \rho(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad \vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad \vec{\mathcal{M}}(\vec{x},t) = \vec{\mathcal{M}}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

angenommen. Mithilfe der Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{H} &= 0 & \nabla \times \vec{E} - ik\vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \vec{H} + ik\vec{E} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + 4\pi\nabla \times \vec{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$i\omega\rho = \nabla \cdot \vec{j}$$

können die  $a_E(l,m)$  und  $a_M(l,m)$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned} a_E(l,m) &= \frac{1k^3}{\sqrt{l(l+1)}} \int j_l(kr) Y_{lm}^* \vec{L} \cdot \left( \vec{\mathcal{M}} + \frac{1}{k^2} \nabla \times \vec{j} \right) d^3x \\ a_M(l,m) &= \frac{-k^2}{\sqrt{l(l+1)}} \int j_l(kr) Y_{lm}^* \vec{L} \cdot \left( \vec{j} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}} \right) d^3x \end{aligned}$$

Meistens ist bei Kernen die Ausdehnung der Quelle klein gegenüber der Wellenlänge der emittierten Strahlung, sodaß man die sphärischen Besselfunktionen

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$$

für kleines  $kr$  entwickeln kann. Dann vereinfachen sich die Ausdrücke erheblich und man erhält

$$\begin{aligned} a_E(l,m) &\simeq \frac{ck^{l+2}}{i(2l+1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l}} (Q_{lm} + Q'_{lm}) \\ a_M(l,m) &\simeq \frac{ik^{l+2}}{(2l+1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l}} (M_{lm} + M'_{lm}) \end{aligned}$$

mit den Multipolmomenten

$$\begin{aligned}
Q_{lm} &= \int r^l Y_{lm}^* \rho d^3x \\
Q'_{lm} &= -\frac{ik}{c(l+1)} \int r^l Y_{lm}^* \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{\mathcal{M}}) d^3x \\
M_{lm} &= -\frac{1}{c(l+1)} \int r^l Y_{lm}^* \nabla \cdot (\vec{r} \times \vec{j}) d^3x \\
M'_{lm} &= -\int r^l Y_{lm}^* \nabla \cdot \mathcal{M} d^3x
\end{aligned}$$

Für die Anwendung auf Übergänge in Atomkernen ist die klassische Behandlung nicht immer ausreichend. Um quantenmechanisch rechnen zu können, muss man von den Multipolmomenten zu den Matrixelementen der entsprechenden Operatoren übergehen. Zum Beispiel

$$Q_{lm} \rightarrow \langle \psi_f | \mathbf{Q}_{lm} | \psi_i \rangle = q \int r^l Y_{lm}^* \psi_f^* \psi_i d^3x$$

Wenn ein Matrixelement für eine bestimmte Multipolkomponente verschwindet, ist der Übergang verboten und diese Komponente kommt nicht vor. Man kann also aus den Matrixelementen und Erhaltungssätzen Auswahlregeln ableiten.

Wir interessieren uns für Übergänge von einem Kern im Anfangszustand  $|i\rangle = |J_i, M_i, \alpha\rangle |0\rangle$  zu einem Kern im Endzustand und einem Photon  $|f\rangle = |J_f, M_f, \beta\rangle |k, l\rangle$  ( $J, M$  sind die Gesamtdrehimpulsquantenzahlen des Kerns,  $\alpha, \beta$  alle anderen Quantenzahlen und  $k, l$  Wellenzahl und Drehimpuls des emittierten Photons). Da der Drehimpuls erhalten ist, gilt

$$\vec{J}_i + \vec{l} = \vec{J}_f$$

Daraus ergibt sich für die Drehimpulsquantenzahl des Photons die Einschränkung

$$|J_i - J_f| \leq l \leq J_i + J_f$$

Aus dem Verhalten unter Paritätstransformation

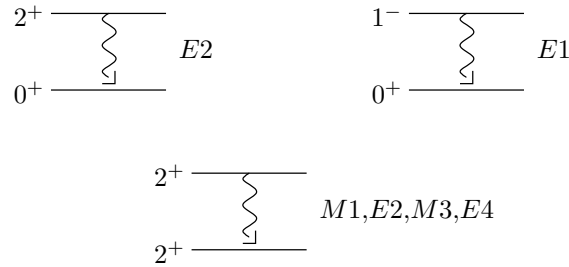
$$\mathbf{P} \mathbf{Q}_{lm} = (-1)^l \mathbf{Q}_{lm}$$

$$\mathbf{P} \mathbf{M}_{lm} = (-1)^{l+1} \mathbf{M}_{lm}$$

folgt eine weitere Bedingung für  $l$ :

$$\begin{aligned}
\pi_i \pi_f &= (-1)^l && \text{für elektrische Übergänge} \\
\pi_i \pi_f &= (-1)^{l+1} && \text{für magnetische Übergänge}
\end{aligned}$$

### 13. Elektromagnetische Wechselwirkung



**Abbildung 13.1.:** Beispiele für erlaubte Übergänge

In Abbildung 13.1 sind die erlaubten Multipolordnungen für einige Übergänge gezeigt.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\lambda^{(E)}(l, m) = \frac{8\pi k^{2l+1}}{\hbar[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l}\right) |\langle f | \mathbf{Q}_{lm} | i \rangle + \langle f | \mathbf{Q}'_{lm} | i \rangle|^2$$

und

$$\lambda^{(M)}(l, m) = \frac{8\pi k^{2l+1}}{\hbar[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l}\right) |\langle f | \mathbf{M}_{lm} | i \rangle + \langle f | \mathbf{M}'_{lm} | i \rangle|^2$$

$x!!$  bedeutet  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot x$  für ungerades und  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot x$  für gerades  $x$ .

Sie enthalten aber noch die Abhängigkeit von den Richtungsquantenzahlen  $m$ ,  $M_i$ ,  $M_f$ . Normalerweise interessiert man sich aber für eine unpolarisierte Quelle und auch nicht für die Polarisation des Photons. Dann muss man die Abhängigkeit von den  $m$ 's durch Mittelung im Anfangs- und Summation im Endzustand eliminieren. Davon sind natürlich nur die Matrixelemente betroffen. Man bezeichnet die so behandelten Ausdrücke  $|\langle f | \mathbf{Q}_{lm} | i \rangle + \langle f | \mathbf{Q}'_{lm} | i \rangle|^2$  ( $|\langle f | \mathbf{M}_{lm} | i \rangle + \langle f | \mathbf{M}'_{lm} | i \rangle|^2$ ) mit  $B(El)$  ( $B(Ml)$ ) für die sog. reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit. Damit ergibt sich dann

$$\lambda(\sigma, l) = \frac{8\pi k^{2l+1}}{\hbar[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{l+1}{l}\right) B(\sigma, l) \quad \sigma = E, M$$

Sie hängt stark von der Energie des Photons ab ( $k^{2l+1}$ ).

Die Kontinuitätsgleichung sorgt dafür, daß elektrische und magnetische Übergänge immer zusammen auftreten, aber die magnetische Übergangsrate ist typischerweise zwei Größenordnungen kleiner als die elektrische.

Um  $B(\sigma, l)$  ausrechnen zu können, muss man die Wellenfunktion des gesamten Kerns sowie die Koordinaten jedes Nukleons kennen. Da man in der Regel keine so detaillierte Kenntnis hat, muss man sich auf Näherungen zurückziehen. V. Weisskopf hat die Übergangsrate unter der Annahme, daß sich nur die Wellenfunktion eines einzigen Nukleons ändert, abgeschätzt. Der interessante Teil der Kernwellenfunktion ist dann



$$\psi = R(r)Y_{JM}$$

Mit der Näherung

$$R(r) = \begin{cases} \text{const} = \sqrt{3/R_0^3} & r \leq R_0 = r_0 A^{1/3} \\ 0 & r > R_0 \end{cases}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} B(El) &= \left( e \int R^*(r) r^l R(r) r^2 dr \right)^2 \cdot \underbrace{\left( \sum_{M_i+m=M_f} \int Y_{J_f M_f}^* Y_{lm} Y_{J_i M_i} d\Omega \right)^2}_{\simeq (4\pi)^{-1}} \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \left( \int_0^{R_0} \frac{3}{R_0} r^{l+2} dr \right)^2 \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \left( \frac{3}{l+3} \right)^2 r_0^{2l} A^{2l/3} \end{aligned}$$

Es gewinnt also die größte Photonenergie und die kleinste Multipolarität, die Abhängigkeit von  $A$  ist gering.

Analog ergibt sich für die magnetischen Übergänge mit

$$\mathbf{M}_{lm} = \mu_N \left( g_s \mathbf{s} + \frac{2}{l+1} g_l \mathbf{l} \right) \nabla r^l Y_{lm}$$

$$B(Ml) = \frac{10}{\pi} \left( \frac{3}{l+3} \right)^2 r_0^{2l-2} A^{(2l-2)/3}$$

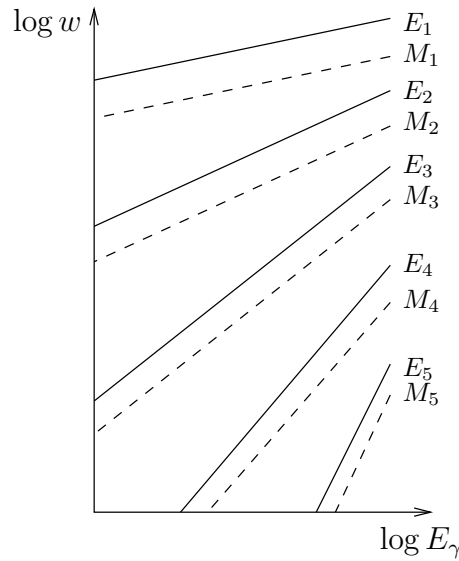
Es kann also nur eine niedrigere magnetische Multipolordnung mit einer höheren elektrischen konkurrieren (z.B.  $M1$  mit  $E2$ ).

Angeregte Kerne können ihre Energie auch über innere Konversion oder innere Paarbildung abgeben. Bei der inneren Konversion wird die Energie auf ein Hüllenelektron übertragen, das daraufhin das Atom verläßt. Alternativ kann im Kern ein Elektron-Positron-Paar erzeugt werden, das dann emittiert wird (innere Paarerzeugung). Diese Prozesse spielen insbesondere dann, wenn die Emission eines reellen Photons durch Auswahlregeln verboten ist, eine große Rolle.

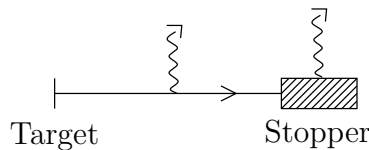
Experimentelle Bestimmung der  $\gamma$ -Übergangswahrscheinlichkeiten:

- direkte Messung der Halbwertszeit (bis zu ns)
- Dopplerverschiebung mit Stopper:

### 13. Elektromagnetische Wechselwirkung



**Abbildung 13.2.:** Übergangsraten für Strahlung verschiedener Multipolarität als Funktion der Photonenergie



Die angeregten Kerne werden durch Beschuß eines stationären Targets erzeugt und fliegen aufgrund von Impulserhaltung weiter, nach einer bestimmten Strecke werden sie abgestoppt. Ein Teil der Kerne zerfällt im Flug, die anderen im Stopper. Im Spektrum sind also zwei Linien zu sehen, die eine ist die dopplerverschobene Linie. Durch Vergleich der Intensitäten bei verschiedenen Abständen zwischen dem Target und dem Stopper kann die Halbwertszeit bestimmt werden. Die Methode ist geeignet für  $\tau = 10^{-9} - 10^{-12}$  s.

- Doppler Shift Attenuation Method (DSAM): Die Kerne werden direkt in einem dicken Target abgestoppt. Aus der Form der dopplerverschmierten Linie wird die Halbwertszeit bestimmt (geeignet für  $\tau = 5 \cdot 10^{-12} - 10^{-13}$  s).
- Coulombanregung: Der Targetkern wird durch den Induktionsstoß, der durch ein vorbeifliegendes geladenes Teilchen verursacht wird, angeregt. Wegen der höheren Kernladungszahl eignen sich besonders schwere Kerne als Projektile. Die berechnete Anregungswahrscheinlichkeit wird mit der gemessenen  $\gamma$ -Intensität verglichen, so können die  $B(\sigma, l)$ -Werte bestimmt werden.

Die gemessenen  $E1$ -Übergänge sind typischerweise um viele Größenordnungen langsamer als von der Einteilchenabschätzung vorhergesagt. Der Grund dafür ist die Dipolriesenresonanz, an der ein erheblicher Teil der Nukleonen beteiligt ist. Es

handelt sich um eine Entmischungsschwingung der Protonen gegen die Neutronen. Die Energien liegen typischerweise bei 10-20 MeV.

$E2$ -Übergänge sind in manchen Massenbereichen bis zu zwei Größenordnungen schneller als die Werte aus der Einteilchenabschätzung. Auch hierfür sind sog. kollektive Anregungen verantwortlich, an der viele Nukleonen Teil haben. Ein Typ dieser Anregungen bevorzugt Quadrupolstrahlung.

# 14. Kollektive Kernanregungen

## 14.1. Kurze Wiederholung: Anregungen von 2-atomigen Molekülen

In 2-atomigen Molekülen sind verschiedene Formen der Anregung möglich. Die niedrigsten angeregten Zustände sind die Rotationen, wobei die Rotationsachse senkrecht auf der Symmetrieachse steht. In erster Näherung ist das Trägheitsmoment  $\Theta$  konstant und man bekommt das Spektrum eines starren Rotators:

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\Theta} R(R+1) \quad \Delta E_{rot} = \frac{\hbar^2}{\Theta} (R+1)$$

wobei  $R$  die Drehimpulsquantenzahl ist. Typische Werte liegen bei  $\Delta E_{rot} \approx 20 \text{ cm}^{-1} \simeq 2,5 \text{ meV}$  (bei Zimmertemperatur ist  $kT = 24 \text{ meV}$ ).

Ausser den Rotationen sind auch Vibrationen möglich. Sie können durch einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator beschrieben werden:

$$E_{vib} = \sum_i \left( n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i$$

Die Vibrationsanregungen haben deutlich höhere Energien als die Rotationen:  $E_{vib} \simeq 100 E_{rot}$ .

Im eV-Bereich gibt es dann noch die elektronischen Anregungen der Hülle.

In Abbildung 14.1 sind die Energieniveaus eines 2-atomigen Moleküls skizziert.

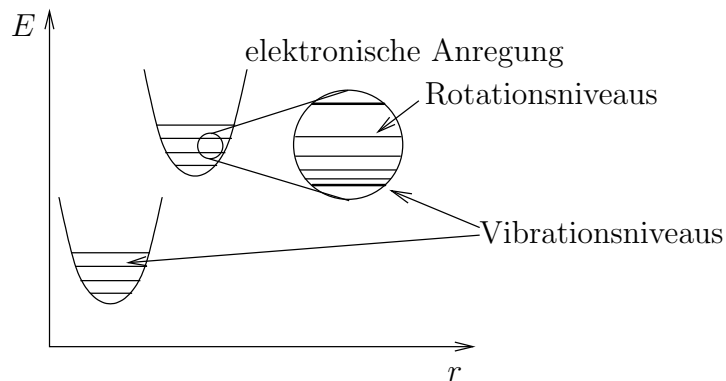


Abbildung 14.1.: Energieniveaus eines 2-atomigen Moleküls

## 14.2. Atomkern

In der Nähe von abgeschlossenen Schalen wird ein Kern am besten durch das Schalenmodell beschrieben, in diesen Bereichen dominieren Einteilchenanregungen. Zwischen abgeschlossenen Schalen treten jedoch viel kleinere Anregungsenergien auf, die auf Rotations- und Vibrationsanregungen hindeuten. Es handelt sich hierbei um korrelierte Bewegungen aller Nukleonen. Diese werden möglich durch den langreichweitigen Teil der Restwechselwirkung. Mit Restwechselwirkung meint man den Teil der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen, der nicht durch das mittlere Potential des Schalenmodells beschrieben wird.

Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind kugelsymmetrisch, dies ist bei nicht abgeschlossenen Schalen nicht unbedingt der Fall. Im allgemeinen ist ein Kern also ein Ellipsoid mit drei verschiedenen Halbachsen  $R_K$  ( $K = 1,2,3$ ). Er wird durch zwei unabhängige Deformationsparameter  $\beta$  und  $\gamma$  beschrieben:

$$R_K = R_0 \left[ 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \left( \gamma - \frac{2\pi K}{3} \right) \right]$$

$R_0$  ist der mittlere Kernradius. Ein Spezialfall hiervon sind die Rotationsellipsoide, bei denen zwei Halbachsen gleich lang sind. Sie treten in zwei Formen auf: als prolate ( $\gamma = 0$ ,  $R_1 = R_2 \leq R_3$ ) und als oblate ( $\gamma = 60^\circ$ ,  $R_1 = R_2 \geq R_3$ ) Rotationsellipsoide (Abbildung 14.2). Bei einer triaxialen Deformation ist  $0 < \gamma < 60^\circ$ . Durch Messung des statischen Quadrupolmoments oder der E2-Übergangsstärke kann man den Parameter  $\beta$ , der ein Maß für die Stärke der Deformation ist, bestimmen.

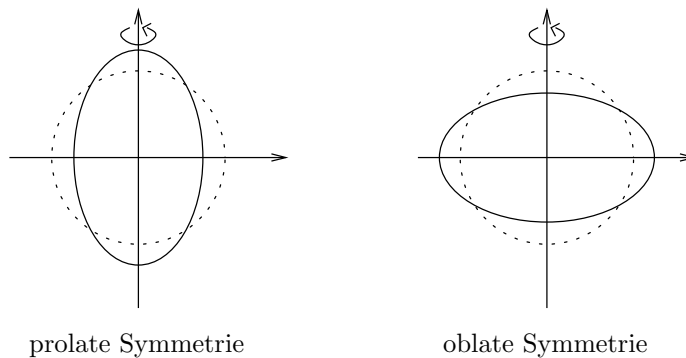


Abbildung 14.2.: Prolate und oblate Form eines Rotationsellipsoids

### Rotation

In den Spektren von Atomkernen finden sich Teile mit äquidistanten Linien, was auf Rotationsanregungen schließen läßt. Da auf kugelsymmetrische Objekte kein Drehmoment ausgeübt werden kann, müssen diese Kerne deformiert sein. Der Kern soll zunächst als starrer Rotator aufgefaßt werden. Ferner wird davon ausgegangen,

## 14. Kollektive Kernanregungen

daß er keinen eigenen Drehimpuls  $\vec{J}_0 = \sum_{i=1}^A \vec{l}_i + \vec{s}_i$  hat. Besitzt er eine Symmetrie, so steht die Rotationsachse immer senkrecht auf der Symmetrieachse. Die Energieniveaus eines quantenmechanischen starren Rotators sind

$$E = \frac{\hbar^2}{2\Theta} I(I+1)$$

$\Theta$  ist das Trägheitsmoment und  $I$  die Drehimpulsquantenzahl. Bei Rotationsellipsoiden ist die Wellenfunktion symmetrisch bezüglich einer Rotation um eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse. Aufgrund der Paritätserhaltung sind dann nur gerade Rotationsquantenzahlen erlaubt. Der Linienabstand ist

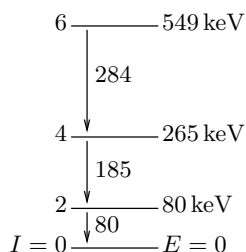
$$\Delta(\Delta E) = \frac{4\hbar^2}{\Theta}$$

Man kann also das Trägheitsmoment aus dem Spektrum bestimmen, oder es mit Hilfe des Deformationsparameters  $\beta$  ausrechnen:

$$\Theta_{\text{starr}} = \frac{2}{5} A M_N R_0^2 \left( 1 \pm \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \right) \quad R_0 = 1,2 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$

$M_N$  ist die Nukleonmasse und das Vorzeichen hängt von der Form der Deformation ab (+ für oblate und – für prolate Deformation).

In Abbildung 14.3 sind einige Niveaus des  $^{168}\text{Er}$  skizziert.



**Abbildung 14.3.:** Energieniveaus des  $^{168}\text{Er}$

$$\Delta(\Delta E) \approx 100 \text{ keV} \Rightarrow \Theta = 1,5 \cdot 10^6 \text{ MeV fm}^2$$

$$\beta = 0,33$$

Das aus  $\beta$  errechnete Trägheitsmoment für einen starren Rotator ist

$$\Theta_{\text{starr}} = 3 \cdot 10^6 \text{ MeV fm}^2$$

Dieser Wert ist um einen Faktor zwei zu groß. Man hat also Grund zu der Annahme, daß der starre Rotator doch keine optimale Beschreibung für einen rotierenden Kern ist.

Alternativ kann man annehmen, daß nur die Oberfläche rotiert, das Innere des Kerns aber nicht (Analogie zu Flüssigkeitstropfen). Dann ist

$$\Theta_{\text{irrot}} = \Theta_{\text{starr}} \left( \frac{\Delta R}{R} \right)^2 \quad \Delta R : \text{Achsenunterschied}$$

Im Fall des  $^{168}\text{Er}$  ist  $\Delta R/R \approx 0,32$  und somit

$$\Theta_{\text{irrot}} \approx 0,1 \Theta_{\text{starr}}$$

Dieser Wert ist nun um einen Faktor 5 zu klein.

Um das korrekte Trägheitsmoment errechnen zu können muß man berücksichtigen, daß sich im Innern des Kern durch Korrelationen zwischen den Nukleonen Superfluidität entwickelt. Das Phänomen ist analog zur Supraleitung in Festkörpern.

Bisher wurde angenommen, daß der Kern keinen Eigendrehimpuls hat. Wenn  $\vec{J}_0 \neq 0$  muss man die Kopplung des äußeren und des inneren Drehimpulses berücksichtigen. Wenn man mit  $K$  die Komponente von  $\vec{J}_0$  in Richtung der Symmetrieachse bezeichnet, erhält man für die Energieeigenwerte

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta} (I(I+1) - K^2)$$

wobei  $I$  die Werte  $I = K, K+1, K+2, \dots$  ( $K \neq 0$ ) annehmen kann. Für jeden Eigendrehimpuls, zu dem die Drehimpulse der Nukleonen koppeln können, gehört also ganze eine Rotationsbande.

## Vibration

Ähnlich wie Flüssigkeitstropfen können Kerne (unabhängig davon, ob sie deformiert sind oder nicht) Schwingungen ausführen. Die Oberfläche wird dann durch

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 \left[ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm}(t) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \right]$$

beschrieben. Die  $a_{lm}(t)$  sind die Schwingungsamplituden.  $l = 0$  entspricht einer radialen Kompressionsschwingung (Monopolschwingung), deren Anregungsenergie aber wegen der geringen Kompressibilität der Kernmaterie sehr hoch ist. Da alle ungeraden Werte von  $l$  zu einer Bewegung des Schwerpunkts führen, können nur gerade Werte von  $l$  angeregt werden. Der nächste Zustand ist also die Quadrupolschwingung mit  $l = 2$ . Bei kugelsymmetrischen Kernen kann  $m$  dann fünf verschiedene Werte annehmen; die Schwingung eines Rotationsellipsoids ist aber durch zwei Parameter schon vollständig beschrieben, wenn man das Koordinatensystem mit der Symmetrieachse zur Deckung bringt. Die Gleichung von oben läßt sich dann in der Form

#### 14. Kollektive Kernanregungen

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 \left[ 1 + \beta(t) \cos \gamma(t) \cdot Y_2^0(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta(t) \sin \gamma(t) \cdot Y_2^2(\vartheta, \varphi) \right]$$

schreiben. Die Schwingung zerfällt in also in Schwingungen der Parameter  $\beta$  ( $\beta$ -Vibration) und  $\gamma$  ( $\gamma$ -Vibration). Bei den  $\beta$ -Vibrationen bleibt die Form des Kerns erhalten und nur die Stärke der Deformation ändert sich. Im Gegensatz dazu verändert sich bei den  $\gamma$ -Vibrationen die Form, im allgemeinen verliert der Kern dabei seine Axialsymmetrie.

Bei hinreichend kleinen Amplituden werden die Schwingungen harmonisch und man erhält für jede Teilschwingung das Spektrum eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators.

$$E_{vib}^{(lm)} = \hbar \omega_{lm} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$



# 15. Kernspaltung und Fusion

## 15.1. Kernspaltung

Ab einer Massenzahl von etwa 120 ist die Bindungsenergie kleiner als bei zwei Kernen mit Massenzahl 60, prinzipiell ist also eine Spaltung möglich. Tatsächlich tritt spontane Spaltung aber erst bei sehr viel schwereren Kernen auf. Dieser Sachverhalt läßt sich mit dem Tröpfchenmodell erklären: Die Spaltung läuft über eine Deformation des Kerns, wie sie in Abbildung 15.1 skizziert ist, ab. Dabei nimmt die Oberfläche im Vergleich zum Volumen zu, die Oberflächenenergie steigt also an. Gleichzeitig nimmt aber die Coulombenergie ab. Es zeigt sich, daß für Kerne mit  $Z^2/A > 51$  die potentielle Energie als Funktion der Deformation monoton fällt, d.h. diese Kerne spalten spontan und kommen deshalb in der Natur heute nicht mehr vor.

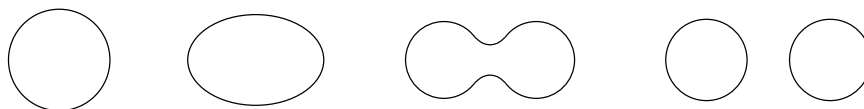


Abbildung 15.1.: schematischer Ablauf des Spaltprozesses

Für Kerne mit  $Z^2/A < 51$  durchläuft das Potential erst ein Minimum und dann ein Maximum (Abbildung 15.2) gefolgt vom Coulombabfall. Der Verlauf ist umso flacher, je größer  $Z^2/A$  ist. Auch diese Kerne können aufgrund des Tunneleffekts noch spontan spalten, jedoch nimmt die Wahrscheinlichkeit wegen der großen Masse der Spaltprodukte mit sinkendem  $Z^2/A$  rapide ab. Bei vielen Kernen tritt statt dessen  $\alpha$ -Zerfall auf.

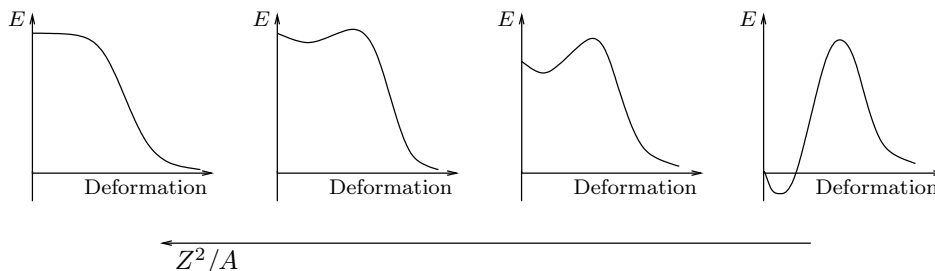


Abbildung 15.2.: Verlauf der potentiellen Energie als Funktion der Deformation für verschiedene Werte von  $Z^2/A$

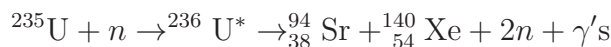
Man kann die Energie zur Überwindung der Barriere aber auch von außen zuführen,

## 15. Kernspaltung und Fusion

z.B. durch Neutronenbeschuß. Wenn die Bindungsenergie des zusätzlichen Neutrons und dessen kinetische Energie größer als die Differenz vom Grundzustand zum Maximum ist, kommt es zur Spaltung. Man spricht dann von induzierter Spaltung. Der Einfangquerschnitt ist für thermische Neutronen (Neutronen, die im thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung sind) besonders groß. Bei Einfang eines thermischen Neutrons durch  $^{235}\text{U}$  reicht die Bindungsenergie zur Überwindung der Potentialbarriere, bei  $^{238}\text{U}$  dagegen nicht.

Entdeckt wurde die induzierte Spaltung 1938 von Hahn, Strassmann und Meitner, die in der Absicht, schwerere Elemente zu erzeugen,  $^{235}\text{U}$  mit Neutronen beschossen und dabei feststellten, daß es sich anschließend wie Ba verhielt. Des Rätsels Lösung war, daß es sich tatsächlich um Ba handelte, da sich das U gespalten hatte.

Die Spaltung verläuft im Allgemeinen nicht symmetrisch, d.h. die Spaltprodukte haben unterschiedliche Massenzahlen. In der Regel entsteht durch die Spaltung ein Neutronenüberschuß, sodaß neben den Fragmenten auch ein oder mehrere Neutronen frei werden. Die Spaltfragmente können hoch angeregt sein, sie zerfallen anschließend über  $\gamma$ - oder  $\beta^-$ -Zerfälle. In einigen Fällen können auch Neutronen emittiert werden, sie werden als verzögerte Neutronen bezeichnet. Welcher Endzustand bei einer Spaltung entsteht, ist nicht festgelegt. Ein möglicher Prozess für  $^{235}\text{U}$  ist



Pro spaltendem Kern werden etwa 200 MeV Energie frei. Davon gehen etwa 83% in die kinetische Energie der Fragmente, 2,5% in kinetische Energie der Neutronen (etwa 1-2 MeV pro  $n$ ), 3,5% in direkte Photonen und 11% in innere Anregungen der Spaltfragmente. 1 g spaltbares Material setzt so viel Energie frei wie die Verbrennung von 2,6 t Kohle (25 MWh). Pro  $^{235}\text{U}$ -Spaltung entstehen im Mittel 2,5 prompte Neutronen.

Entscheidend für die Frage, ob es zu einer Kettenreaktion oder gar Explosion kommen kann, ist die Anzahl der Neutronen pro Spaltung, die nachher als thermische Neutronen eingefangen werden können. Induziert im Mittel ein Neutron eine Spaltung, so bleibt die Reaktionsrate konstant, bei mehr als einem beschleunigt sich die Reaktion und es kommt zur Explosion und bei weniger als einem stirbt sie aus. Von den entstehenden schnellen Neutronen entweichen einige an der Oberfläche, andere werden eingefangen ohne eine Spaltung zu induzieren.

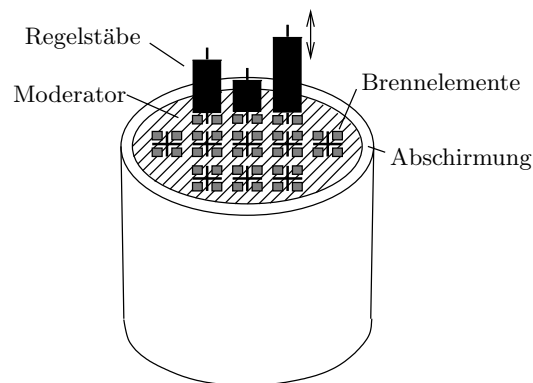
Technologische Gesichtspunkte:

1. Der Neutronenverlust muß minimiert werden, insbesondere muß die Oberfläche im Vergleich zum Volumen möglichst klein gehalten werden. Für reines  $^{235}\text{U}$  liegt die kritische Größe, ab der eine Kettenreaktion möglich ist, bei 15 kg in Form einer Kugel mit 6 cm Radius.
2. Die Neutronen müssen durch elastische und inelastische Stöße abgebremst (moderiert) werden. Am effizientesten sind Kollisionen mit einem Partner

gleicher Masse, also Wasserstoff. Das Problem von Wasser als Moderator besteht allerdings in der Bildung von Deuterium: Die Protonen fangen ebenfalls Neutronen ein. Mögliche Auswege sind die Verwendung von schwerem Wasser ( $D_2O$ ) oder Graphit (C). Die typische Abbremslänge für Neutronen liegt in leichtem Wasser bei 5,6 cm, in Graphit sind es 18,7 cm.

3. Die Reaktion muß kontrollierbar sein. Im Reaktorkern werden deshalb Absorberstäbe aus Cd oder B eingesetzt. Diese Elemente haben extrem große Wirkungsquerschnitte für Neutroneinfang.

Natürliches Uran besteht heute zu 99,3% aus dem nicht spaltbaren  $^{238}U$  und nur zu 0,7% aus dem spaltbaren  $^{235}U$ . Auch große Mengen natürlichen Urans sind nicht explosiv: Schnelle Neutronen können zwar eine Spaltung des  $^{238}U$  induzieren, aber nur wenige der entstehenden haben genug Energie und die Wahrscheinlichkeit, daß sie durch Stöße weiter abgebremst werden, ist viel größer.  $^{235}U$  spaltet im Wesentlichen durch Einfang von thermische Neutronen. Während die Neutronen abgebremst werden, müssen sie den Energiebereich von 100 eV bis 1 eV durchlaufen. In diesem Gebiet ist der Einfangquerschnitt des  $^{238}U$  am größten, so daß am Ende nicht genug Neutronen übrigbleiben. Man muß sie also außerhalb des Spaltstoffs moderieren, wenn man einen Reaktor mit Natururan betreiben will. Leichtes Wasser kommt hierfür nicht in Frage, weil es selber zu viele Neutronen wegfängt. Geeignet sind schweres Wasser und Graphit. Um einen Leichtwasserreaktor betreiben zu können, muß man das Uran auf einen  $^{235}U$ -Gehalt von 3% anreichern.



**Abbildung 15.3.:** Aufbau eines Reaktorkerns

Der erste künstliche Reaktor wurde 1942 von E. Fermi gebaut, indem er 40 t Uran und 385 t Graphitblöcke ohne zusätzliche Kühlung kugelförmig aufschichtete. Die Energieproduktion lag bei einigen kW.

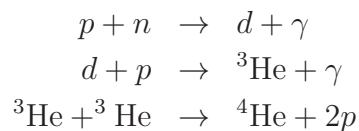
Vor  $2 \cdot 10^9$  Jahren gab es in Oklo in Gabun einen natürlichen Reaktor, der etwa 200 000 Jahre stabil brannte. Damals lag der natürliche Gehalt an  $^{235}U$  bei 3%. Durch Eindringen von Wasser in die Uranlagerstätte konnte ein Reaktor entstehen, der sich selbst regulierte: Stieg die Reaktionsrate aufgrund von statistischen Schwankungen an, erwärmte sich das Wasser und dehnte sich dabei aus. Dadurch

wurde es als Moderator weniger effektiv und bremste somit die Reaktion. Eine geringere Rate führte dagegen zur Abkühlung verbunden mit einer Zunahme der Dichte und einer effektiveren Moderierung, was die Reaktionsrate wieder ansteigen ließ.

## 15.2. Kernfusion

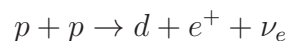
Unter Fusion versteht man das Verschmelzen von zwei Kernen zu einem schwereren. Voraussetzung hierfür ist eine zur Überwindung der Coulombbarriere ausreichende kinetische Energie. Darunter ist die Fusion dank des Tunneleffekts auch noch möglich, allerdings fällt die Wahrscheinlichkeit hierfür mit sinkender Energie stark ab. Da die Bindungsenergie pro Nukleon ihr Maximum bei  $A = 56$  hat, wird bei der Fusion von Kernen bis zum Eisen Energie frei.

Die Kernfusion ist für die Elementsynthese im frühen Universum von zentraler Bedeutung. Einige  $\mu\text{s}$  nach dem Urknall gab es nur Protonen, Neutronen, Elektronen, Neutrinos und Photonen. Die Bildung der ersten Kerne erfolgte über die Fusionsreaktionen



Weiter geht es erst einmal nicht, da kein stabiles Element mit  $A = 5$  oder  $A = 8$  existiert.

Nach  $2 \cdot 10^8$  a entstehen die ersten Sterne durch den gravitativen Kollaps von Gaswolken, die hauptsächlich aus Wasserstoff und etwas Helium bestehen. Irgendwann wird die Dichte im Kernbereich so groß, daß das Material optisch dicht wird. Die durch die Kontraktion frei werdende Energie kann dann nicht mehr abgestrahlt werden und so heizt sich die zentrale Region immer mehr auf. Wenn Dichte und Temperatur groß genug werden, setzt die Fusion von zwei Protonen zu Deuterium ein.



Der sich dadurch aufbauende Strahlungsdruck stoppt die Kontraktion und der Stern beginnt eine stabile Phase seines Lebens.

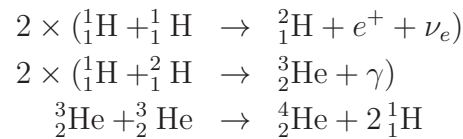
Im Folgenden soll es um die Energieerzeugung in der Sonne gehen, die Einzelheiten von Sternaufbau und -entwicklung werden aber nicht diskutiert. Die Sonne hat eine Masse von  $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$  g und eine Leuchtkraft von  $L_\odot = 3,8 \cdot 10^{26}$  W. Die abgestrahlte Energie kann nicht durch Kontraktion aus der gravitativen Energie gewonnen werden, denn dies würde eine Abnahme des Radius von  $\Delta R/R = 10^{-15} \text{ s}^{-1}$  erfordern und das ist mit dem Alter der Sonne nicht konsistent. Die Temperatur an

der Oberfläche beträgt  $T_s = 5700 \text{ K}$ , im Zentrum sind es  $T_i = 1,5 \cdot 10^7 \text{ K} \simeq 1 \text{ keV}$ . Die Coulombbarriere ist für zwei Protonen

$$V_{Cb} = \frac{e^2}{r} = \frac{1,44 \text{ MeV fm}}{1 \text{ fm}} \simeq 1 \text{ MeV}$$

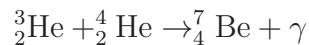
Die Fusion kann also nur durch Tunneln erfolgen. Aber da der anschließende  $\beta^+$ -Zerfall ein Prozess der schwachen Wechselwirkung ist, führt nur ein kleiner Teil der Tunnelereignisse tatsächlich zu einer Fusion. Die große Dichte im Zentrum sorgt dafür, daß die Fusionsrate trotzdem groß genug ist.

Der erste Schritt ist

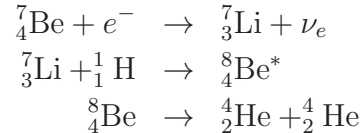


insgesamt:  $4 {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e \quad Q = 26,7 \text{ MeV}$

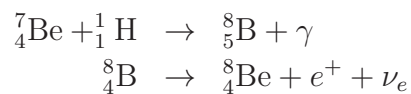
Später findet auch die Reaktion



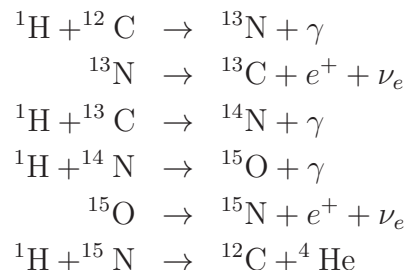
statt. Danach gibt es zwei Möglichkeiten:



oder



Bei Sternen, die etwas Kohlenstoff enthalten, kann in Konkurrenz zur oben beschriebenen pp-Kette der CNO-Zyklus ablaufen. Hierbei wirkt der Kohlenstoff als Katalysator.



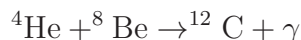
## 15. Kernspaltung und Fusion

Der CNO-Cyklus wird bei Temperaturen oberhalb von  $10^8$  K dominant.

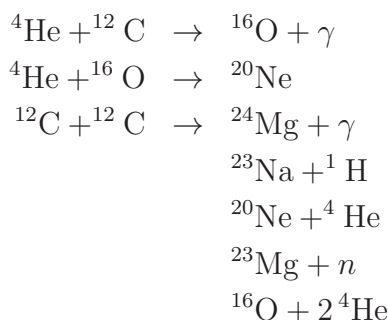
Wenn der Wasserstoff im Zentrum weitgehend verbrannt ist, kontrahiert der Kern unter weiterem Ansteigen der Temperatur und schließlich setzt bei  $10^8$  K das Heliumbrennen ein:



Das  ${}^8\text{Be}$  zerfällt mit einer Halbwertszeit von  $t_{1/2} = 7 \cdot 10^{-17}$  s. Trotzdem wird eine Konzentration von einem  ${}^8\text{Be}$  in  $10^9$   ${}^4\text{He}$  erreicht und es kann die Reaktion

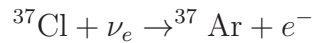


ablaufen. Die Sonne wird diese Phase nicht überleben, da das Heliumbrennen bei so massearmen Sternen instabil verläuft. Für massereichere Sterne stellt es aber eine zweite stabile Phase dar. Nach Verbrauch des Heliums setzen dann weitere Brennphasen ein, wobei die Zentraltemperatur weiter ansteigt. Je massereicher ein Stern ist, desto schwerere Elemente werden synthetisiert.

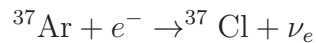


Bei noch höheren Temperaturen fusionieren  ${}^{12}\text{C}$  und  ${}^{16}\text{O}$  oder  ${}^{16}\text{O}$  und  ${}^{16}\text{O}$  zu Mg, Si, P und S. Am Ende dieser Phase sind S und Si die häufigsten Elemente. Bei Temperaturen oberhalb von  $10^9$  K wird die  $\gamma$ -Intensität so hoch, daß die phot nuklearen Reaktionen  $(\gamma, n)$ ,  $(\gamma, p)$  und  $(\gamma, \alpha)$  einsetzen. Die dabei entstehenden Nukleonen und  $\alpha$ -Teilchen haben Energien im MeV-Bereich und liegen damit weit über thermischen Energien. Hier sind die Einfangquerschnitte so groß, daß durch eine Vielzahl von Kernreaktionen alle Elemente bis zum Eisen erzeugt werden. Irgendwann wird der Gravitationsdruck so groß, daß der Kern in einer Supernova kollabiert, die äußeren Schichten werden durch die Schockwelle abgesprengt.

Bei einigen der Fusionsreaktionen in der Sonne entstehen Neutrinos. Der Neutrinofluß auf der Erde beträgt etwa  $10^{15}(\text{m}^2\text{s})^{-1}$ . Im Zusammenhang mit solaren Neutrinos wird gerne die Einheit SNU (solar neutrino unit) verwendet: 1 SNU ist die Menge an Neutrinos, die in einem Detektor mit  $10^{36}$  Nukleonen eine Wechselwirkung pro Sekunde auslöst. Das erste Experiment zum Nachweis der solaren Neutrinos wurde ab 1970 von R. Davis in einer Goldmine (Homestake) durchgeführt. Als Detektor wurde ein Tank mit 615 t Perchloräthylen verwendet, darin waren  $2,3 \cdot 10^{30}$  Cl-Atome enthalten. Durch die Reaktion

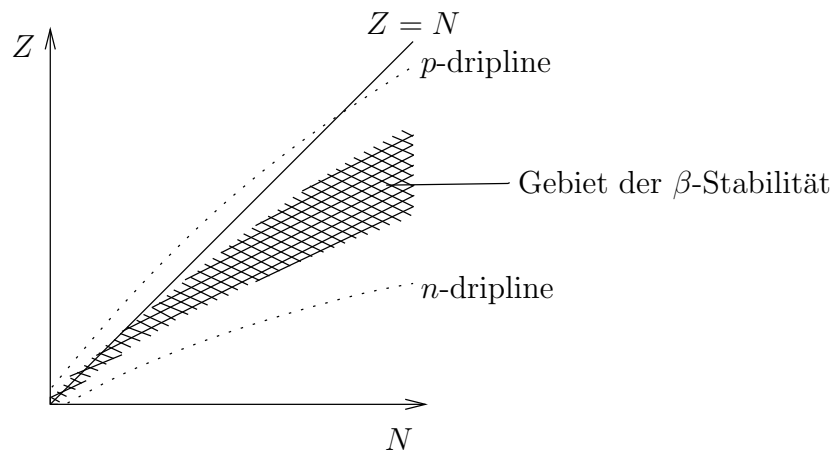


entstand im Mittel alle zwei Tage ein Ar-Atom, das mit einer Halbwertszeit von  $t_{1/2} = 35$  d durch Elektroneinfang wieder zerfällt.



Einmal im Monat wurden die Ar-Atome durch Spülen mit He aus dem Tank extrahiert und die Aktivität mit Zählrohren gemessen. Der gemessene Neutrinofluß lag bei 3 SNU. Das Standardsonnenmodell mit der gemessenen Leuchtkraft sagt aber 8 SNU vorher. Das Ergebnis ist aber durch weitere Experimente bestätigt worden. Das Problem der solaren Neutrinos blieb also bestehen, allerdings kann man heute wohl davon ausgehen, daß sich die Neutrinos auf dem Weg zu uns in einen anderen Flavour umwandeln können. Der vorhergesagte Fluß scheint richtig zu sein, allerdings konnte Davis mit seinem Experiment nur die Elektronenneutrinos nachweisen.

Die Synthese der Elemente jenseits des Eisens kann durch den Einfang von Neutronen geschehen. Mit zunehmendem  $N$  werden die Kerne jedoch  $\beta$ -instabil.



**Abbildung 15.4.:** Gebiete stabiler bzw. instabiler Kerne

In Abbildung 15.4 ist das Gebiet in der  $N$ - $Z$ -Ebene, in dem die Kerne  $\beta$ -stabil sind, angedeutet. Zu beiden Seiten des Bands liegen instabile Kerne, aber jenseits der driplines existieren keine Zustände. Die genaue Lage der driplines ist nicht sehr gut bekannt, sie ist aber für die Elementsynthese von großer Bedeutung.

Beim Neutroneneinfang müssen zwei Mechanismen unterschieden werden: der r- und der s-Prozess. Beim s-Prozess (**s**low neutron capture) ist die Einfangrate klein gegen die Lebensdauer. Es wird also typischerweise ein schmales Band nahe der  $\beta$ -Stabilitätslinie bevölkert. Im Gegensatz dazu ist beim r-Prozess (**r**apid neutron capture) die Einfangrate groß gegen die Lebensdauer. Die so erzeugten Kerne liegen jenseits des Gebiets der  $\beta$ -Stabilität und können bis an die Neutronendripline

## 15. Kernspaltung und Fusion

heranreichen. Da die Lebensdauern stark abnehmen je weiter man sich von der Stabilitätslinie entfernt, sind dazu sehr große Neutronenflüsse nötig. Wahrscheinlich findet der r-Prozess in Supernovae statt.



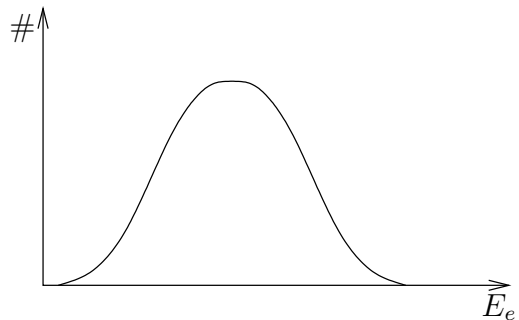
# 16. Schwache Wechselwirkung

## 16.1. Betazerfall

Der  $\beta$ -Zerfall



wird gerne als der Prototyp der schwachen Wechselwirkung angesehen. Das Energiespektrum der Elektronen ist in Abbildung 16.1 skizziert.



**Abbildung 16.1.:** Energiespektrum der beim  $\beta$ -Zerfall emittierten Elektronen

Um das kontinuierliche Spektrum erklären zu können postulierte W. Pauli die Existenz eines dritten, nicht beobachteten Teilchens im Endzustand. Das Spektrum kann man aus Fermis Goldener Regel ausrechnen. Die Übergangsrate ist

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathbf{H}_{\text{weak}} | \psi_i \rangle|^2 \rho(E)$$

Zur Berechnung der Zustandsdichte  $\rho(E)$  wird angenommen, daß das Neutrino masselos ist und der Rückstoß vernachlässigt werden kann. Dann teilen sich das Elektron und das Neutrino die freiwerdende Energie  $E_0$ :

$$E_0 = T_e + p_\nu c$$

Außerdem gilt im cms

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$$

Da es sich um einen drei-Teilchen-Endzustand handelt, sind der Elektron- und der Neutrinoimpuls nicht korreliert und die Zahl der Zustände  $dN$  ist das Produkt aus

## 16. Schwache Wechselwirkung

der Zahl der Zustände für das Elektron  $dN_e$  und das Neutrino  $dN_\nu$ . Die Zustandsdichte ist dann

$$\rho(E_0) = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE_0} \int d^3p_e \int d^3p_\nu = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE_0} \int p_e^2 dp_e d\Omega_e \int p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu$$

Die Integration über die Winkel kann gleich ausgeführt und die Wellenfunktion auf das Volumen normiert werden.

$$\rho(E_0) = \frac{1}{4\pi^4\hbar^6} \frac{d}{dE_0} \int p_e^2 dp_e \int p_\nu^2 dp_\nu$$

Bei gegebenem  $E_0$  und  $p_e$  ist der Impuls des Neutrinos festgelegt:

$$p_\nu = \frac{E_0 - T_e}{c} \quad \text{und} \quad dp_\nu = \frac{dE_0}{c}$$

Damit erhält man für die Zustandsdichte

$$\rho(E_0) = \frac{1}{4\pi^4\hbar^6 c^3} \int p_e^2 (E_0 - T_e)^2 dp_e$$

Um das Spektrum auch quantitativ verstehen zu können, muß man allerdings noch einen Korrekturfaktor  $F(Z, T_e)$  anbringen, der die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Coulomb-Feld des Kerns berücksichtigt. Für einen punktförmigen Kern und ein nichtrelativistisches Elektron ergibt sich eine analytische Funktion („Fermifunktion“). Für alle realistischen Fälle muß der Korrekturfaktor numerisch berechnet werden.

Für die Übergangsrates gilt dann

$$w = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} |\langle \psi_f | \mathbf{H}_{weak} | \psi_i \rangle|^2 \underbrace{\int_0^{p_0} p_e^2 (E_0 - T_e)^2 F(Z, T_e) dp_e}_{f \cdot m_e^5 c^7} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

Um unterschiedliche Prozesse besser vergleichen zu können, führt man die komparative Halbwertszeit ein. Sie ist für unterschiedliche  $E_0$  und  $Z$  korrigiert und ist nur noch vom Matrixelement abhängig.

$$ft_{1/2} = \frac{\ln 2}{m_e^5 c^4} \cdot \frac{1}{|\langle \dots \rangle|^2}$$

Die Größe  $ft$  läßt sich experimentell leicht bestimmen und ist für die verschiedenen Zerfälle tabelliert. In einigen einfachen Fällen kann man das Matrixelement ausrechnen und dann Aussagen über die Kopplungskonstante machen. Ein Beispiel ist der  $\beta^+$ -Zerfall des  $^{25}\text{Al}$ :



mit

$$t_{1/2} = 7,6 \text{ s} \quad \text{und} \quad E_0 = 3,24 \text{ MeV}$$

Aus den Tabellen kann man  $ft$  entnehmen:  $\log ft = 3,5$ .

$$|\langle \dots \rangle|^2 = \frac{\ln 2 \cdot 2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \cdot \frac{1}{10^{3,5}} \Rightarrow \langle \dots \rangle = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ MeV}$$

$$\langle \dots \rangle = \int \psi_A \psi_e G_F \psi_M \psi_\nu dV = \frac{G_F}{V}$$

Wenn man für  $V$  das typische Volumen eines Nukleons einsetzt, erhält man für die Fermi-Kopplungskonstante

$$G_F = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ MeV fm}^3$$

Auswahlregeln für den  $\beta$ -Zerfall:

**„erlaubte“ Übergänge:** keine Paritätsänderung,  $\Delta J = 0,1$  (Elektron und Neutrino tragen zusammen keinen oder eine Einheit Drehimpuls) – Übergänge mit  $J(e^- + \nu) = 0$  (Spin-Singlett) heißen Fermi-Übergänge, solche mit  $J(e^- + \nu) = 1$  (Spin-Triplett) Gamov-Teller-Übergänge

**„verbotene“ Übergänge:** Paritätsänderung und/oder mehr Drehimpulsübertrag

**„first forbidden“:** Paritätsänderung,  $\Delta J = 0,1,2$

**„second forbidden“:** keine Paritätsänderung,  $\Delta J = 2,3$

**„supererlaubte“ Übergänge:** Wenn die Wellenfunktionen im Anfangs- und Endzustand sehr ähnlich sind (z.B. bei Spiegelkernen), werden die Werte für  $f \cdot t_{1/2}$  besonders klein. Dies ist grundsätzlich für alle Mitglieder von Isospin-Multipletts der Fall.

## 16.2. Schwache Ströme

Für die starke und elektromagnetische Wechselwirkung sind Quark und Antiquark eines Flavours immer ein Paar, nur die schwache Wechselwirkung kann den Flavour ändern.

Der  $\beta$ -Zerfall des Neutrons (Abbildung 16.2) ist äquivalent zum Zerfall des  $\pi^- (d\bar{u})$ , da ein auslaufendes Teilchen zu einem einlaufenden Antiteilchen äquivalent ist.

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

16. Schwache Wechselwirkung

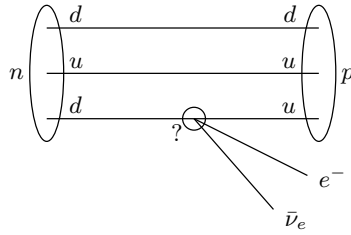
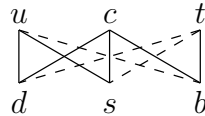


Abbildung 16.2.:  $\beta$ -Zerfall des Neutrons auf dem Quarkniveau

Diese und andere Reaktionen der gleichen Art, z.B.

$$p + \mu^- \rightarrow n + \nu_\mu$$

geben Anlaß zu der Annahme, daß die schwache Wechselwirkung für Übergänge innerhalb der Paare  $e - \nu_e$ ,  $\mu - \nu_\mu$  und  $\tau - \nu_\tau$  sowie  $u - d$  zuständig ist. Die erste Idee zur Einbeziehung der anderen Quarkgenerationen wäre also die Annahme von zwei weiteren schwachen Paaren  $c - s$  und  $t - b$ . Das würde dann aber bedeuten, daß das  $s$ -Quark stabil ist; wir wissen aber, daß es durch die schwache Wechselwirkung in ein  $u$ -Quark zerfällt. Also muß es auch Verbindungen zwischen den Generationen geben:



Man unterscheidet verschiedene Arten von schwachen Zerfällen: Der Zerfall des  $\Lambda$

$$\Lambda(uds) \rightarrow p(uud) + e^- + \bar{\nu}_e$$

ist ein Beispiel für einen semileptonischen Zerfall, an dem ein Quark- und ein Leptonpaar teilnehmen. Das  $\Lambda$  kann aber auch in ein Proton und ein Pion zerfallen (Abbildung 16.3). Dies ist ein rein hadronischer oder nichtleptonischer schwacher Zerfall. Das Gegenstück dazu ist der rein leptonische Zerfall, z.B. der Myonzerfall (Abbildung 16.4).

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

Bei 12 schwachen Paaren sind  $\frac{1}{2}12(12 + 1) = 78$  verschiedene Prozesse möglich, ohne das  $t$ -Quark sind es 45. Alle zugänglichen sind in der Tat beobachtet.

Wie aber sieht die Wechselwirkung zwischen den schwachen Paaren aus? Die elektromagnetische Wechselwirkung kann durch den Austausch eines virtuellen Photons ( $E_\gamma^2 - \vec{p}_\gamma^2 < 0$ ) beschrieben werden; der Photonpropagator ist  $-1/q^2$ . Das Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung ist massiv und elektrisch geladen, der Propagator ist  $1/(m^2 - q^2)$  (Abbildung 16.5).

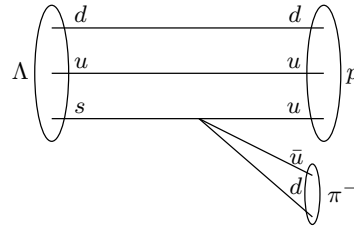


Abbildung 16.3.: Rein hadronischer Zerfall des  $\Lambda$

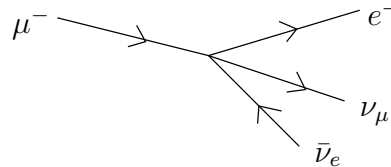


Abbildung 16.4.: Myonzerfall

Das  $W$ -Boson wurde 1983 von Rubbia in Kollisionen von Protonen und Antiprotonen entdeckt (Abbildung 16.6). Charakteristisch für die Reaktion ist der hohe Transversalimpuls der beiden Leptonen. Das Neutrino kann nicht nachgewiesen werden, aber seinen Transversalimpuls kann man trotzdem bestimmen: Man nimmt die Summe aller gemessenen Transversalimpulse, die Differenz zu Null ist der Anteil des Neutrinos.

Die elektromagnetische Wechselwirkung in Abbildung 16.5 kann man auch als Wechselwirkung zwischen zwei Strömen auffassen, wobei der eine Strom von dem Elektron, der andere von dem Proton getragen wird. Die elektrische Ladung ist erhalten. Analog dazu kann auch die schwache Wechselwirkung als Wechselwirkung zwischen (schwachen) Strömen angesehen werden. Die erhaltene Ladung ist hier nicht die elektrische, sondern die schwache Ladung; die elektrische Ladung kann sich durch die schwache Wechselwirkung ändern. Man unterscheidet zwischen positiven und negativen schwachen Strömen. Von positiven schwachen Strömen spricht man bei der Absorption eines  $W^+$  oder der Emission eines  $W^-$ , von negativen bei Absorption eines  $W^-$  oder Emission eines  $W^+$  (Abbildung 16.7).

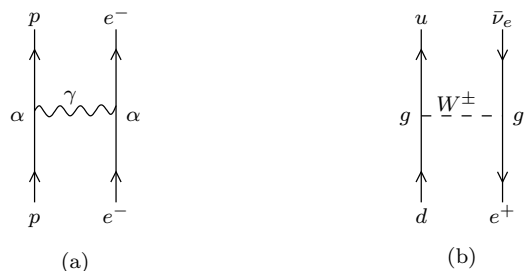
Jede schwache Wechselwirkung ist dann die Wechselwirkung zwischen einem positiven und einem negativen schwachen Strom. Das korrekte Feynman-Diagramm für den Zerfall des Myons ist also das in Abbildung 16.8 gezeigte.

Der leptonische schwache Strom kann als Skalarprodukt von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren geschrieben werden:

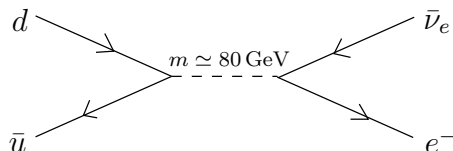
$$J_w^{l-} \sim \tilde{e} \cdot \nu_e + \tilde{\mu} \cdot \nu_\mu + \tilde{\tau} \cdot \nu_\tau$$

Die mit  $\tilde{\phantom{x}}$  bezeichneten Operatoren sind die Leptonerzeugungsoperatoren. Dies sind die Skalarprodukte von Einheitsvektoren, die den geladenen Leptonen entsprechen und orthogonal sind; das Koordinatensystem der neutralen Leptonen ist parallel dazu.

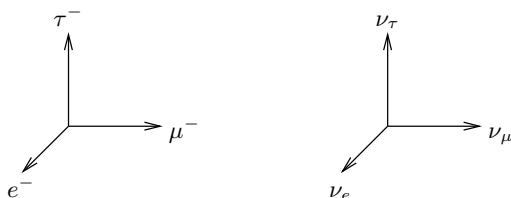
## 16. Schwache Wechselwirkung



**Abbildung 16.5.:** (a) elektromagnetische und (b) schwache Wechselwirkung

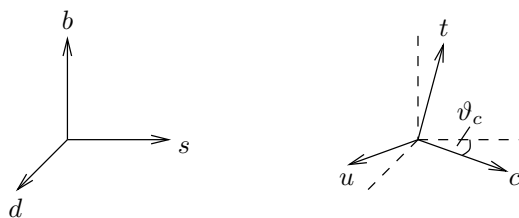


**Abbildung 16.6.:** Erzeugung von  $W$ -Bosonen in  $p\bar{p}$ -Kollisionen



Von allen Skalarprodukten sind also nur die drei Terme von null verschieden, die jeweils dieselbe Generation verknüpfen.

Bei den Quarks ist die Situation etwas anders: Da das  $s$  in ein  $u$  zerfällt, müssen die beiden Systeme gegeneinander gedreht sein.



$\vartheta_c$  ist der Cabbibo-Winkel. Der schwache Strom kann wieder als Skalarprodukt geschrieben werden, aber jetzt tragen alle neun Terme bei.

$$J_w^{h+} \sim \tilde{d} \cdot u + \tilde{s} \cdot u + \tilde{d} \cdot c + \dots$$

Der Term  $\tilde{d} \cdot u$  enthält  $\cos \vartheta_c$ ,  $\tilde{s} \cdot u$   $\sin \vartheta_c$ . Den Cabbibo-Winkel kann man also bestimmen, indem man die Zerfälle



Abbildung 16.7.: Beispiele für (a) positive und (b) negative schwache Ströme

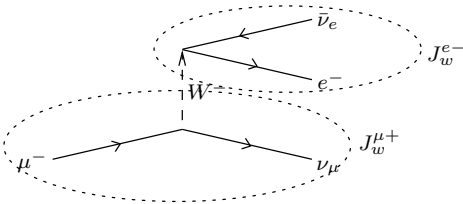
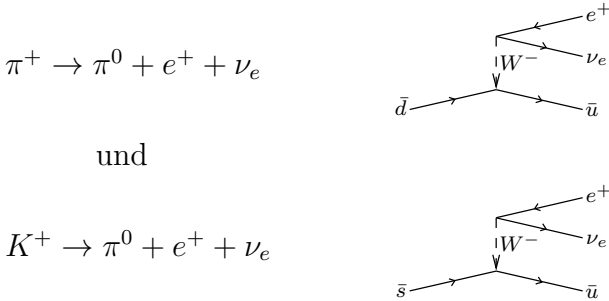


Abbildung 16.8.: Zerfall des Myons als Wechselwirkung zwischen einem positiven und einem negativen schwachen Strom



vergleicht. Der unterschiedliche Phasenraum wird durch Berechnung der komparativen Halbwertszeiten korrigiert.

$$\frac{ft(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)}{ft(\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)} = \frac{\cos^2 \vartheta_c}{\sin^2 \vartheta_c} \approx 50 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_c \approx 8^\circ$$

Der beste Wert aus allen bekannten Zerfällen ist  $\vartheta_c = (12,7 \pm 0,1)^\circ$ . Generell gilt für alle Flavours, daß die Eigenzustände der geladenen schwachen hadronischen Ströme Mischungen der Flavoureigenzustände sind.

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix}$$

Die Mischungsmatrix heißt Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix). Sie ist unitär, d.h. sie wird durch vier Parameter (drei Mischungswinkel und eine Phase) bestimmt. Die Matrixelemente  $V_{qq'}$  geben die Wahrscheinlichkeit für den Übergang  $q \rightarrow q'$  an. Nach heutigem Kenntnisstand sind die Werte

$$\begin{pmatrix} 0,98 & 0,23 & 0,004 \\ 0,23 & 0,98 & 0,04 \\ 0,004 & 0,04 & 0,99 \end{pmatrix}$$

## 16. Schwache Wechselwirkung

Übergänge innerhalb derselben Generation sind also stark, die Übergänge zwischen der ersten und der zweiten Generation  $1 \rightarrow 2$  sind um einen Faktor 20 schwächer; für  $2 \rightarrow 3$  ist der Faktor 600 und für  $1 \rightarrow 3$  40000.

Für das Matrixelement der schwachen Wechselwirkung braucht man folgende Zutaten: die Kopplungskonstante oder „schwache Ladung“  $g$ , den Propagator und für den schwachen Strom die Wellenfunktionen des Paares und den Hamiltonoperator. Der Propagator ist  $(M_W^2 - q^2)^{-1}$ , aber da  $q^2$  im Allgemeinen klein gegen  $M_W^2$  ist, reicht  $M_W^{-2}$  aus. Der Hamiltonoperator der schwachen Wechselwirkung koppelt nur an linkshändige Fermionen und rechtshändige Antifermionen. Der schwache Strom ist die Summe aus dem leptonischen und dem hadronischen Anteil:

$$J_w^\mu = J_{\text{lept}}^\mu + J_{\text{hadr}}^\mu$$

Der leptonische Strom ist von der Form

$$J_{\text{lept}}^\mu = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l} (\mathbf{V} - \mathbf{A}) \psi_l \quad \text{mit} \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$$

und

$$J_{\text{lept}}^{\dagger\mu} = \sum_l \bar{\psi}_l (\mathbf{V} - \mathbf{A}) \psi_{\nu_l}$$

wobei  $V$  für einen Vektor und  $A$  für einen axialen Vektor steht. Für relativistische Teilchen ist

$$V \propto \gamma^\mu \quad \text{und} \quad A \propto \gamma^\mu \gamma_5$$

$$\Rightarrow V - A = \gamma^\mu (c_V + \gamma_5 c_A)$$

Die  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) sind  $4 \times 4$ -Matrizen:

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \\ -\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

Für Leptonen ist  $c_V = -c_A$ , was auch als maximale Paritätsverletzung bezeichnet wird.

Der Helizitätsoperator ist  $\frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ , das Minuszeichen ist für linkshändige Zustände, das Pluszeichen für rechtshändige:

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \psi^L \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi = \psi^R$$

Der schwache Strom kann also auch als



$$J_{\text{lept}}^\mu = \sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l$$

geschrieben werden.

Der Hamiltonoperator ist für eine (punktförmige) Fermi-Wechselwirkung

$$\mathbf{H}_w^F = J_w J_w^\dagger$$

Er enthält sowohl Terme mit  $V^2$  und  $A^2$  als auch mit  $VA$ . Erstere sind Skalare und erhalten somit die Parität,  $VA$  ist aber ein Pseudoskalar, der die Parität verletzt.

### 16.3. Elektroschwache Wechselwirkung

Die elektroschwache Theorie ist eine Anfang der 1960er Jahre entwickelte Feldtheorie, die die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung vereinigt. Die Eichbosonen dieser Theorie werden durch spontane Symmetriebrechung (Higgs-Mechanismus) massiv. Glashow, Weinberg und Salam bekamen 1979 den Nobelpreis für die Entwicklung der elektroschwachen Theorie.

Sie sagt die Existenz eines neutralen schwachen Stroms (keine Änderung der elektrischen Ladung) voraus. Das dafür zuständige Austauscheteilchen ist das  $Z^0$ , das 1973 am CERN durch Streuung von Antimyonenneutrinos an Elektronen erstmals nachgewiesen wurde. Das  $Z^0$  und das Photon sind Mischungen aus zwei anderen Teilchen.

$$\begin{pmatrix} |\gamma\rangle \\ |Z^0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_w & \sin \vartheta_w \\ -\sin \vartheta_w & \cos \vartheta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |B^0\rangle \\ |W^0\rangle \end{pmatrix}$$

$\vartheta_w$  heißt Weinberg-Winkel.

$$\frac{M_{W^\pm}}{M_{Z^0}} = \cos \vartheta_w = 0,880 \pm 0,029$$

und

$$e^2 = 8g^2 \sin^2 \vartheta_w \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \vartheta = 0,2260 \pm 0,0048$$

Die geladenen Austauschbosonen  $W^\pm$  wurden 1983 ebenfalls am CERN in Proton-Antiproton-Kollisionen (Abbildung 16.9) beobachtet.



Abbildung 16.9.: Erzeugung von  $W$ - und  $Z$ -Bosonen in  $p\bar{p}$ -Kollisionen

## 16. Schwache Wechselwirkung

$$M_{W^\pm} = 80,38 \text{ GeV} \quad M_{Z^0} = 91,19 \text{ GeV}$$

Das  $Z^0$  hat eine Zerfallsbreite von  $\Gamma = 2,49 \text{ GeV}$  und zerfällt hauptsächlich in Paare von Quarks oder Leptonen. Wenn man von der gemessenen Zerfallsbreite die Anteile der Zerfälle in Quarks und geladene Leptonen abzieht, bleibt der Anteil der Zerfälle in Neutrinos übrig. Hieraus kann man die Anzahl der leichten Neutrino-Generationen bestimmen. Der Standardmodellfit an alle LEP-Daten ergibt hierfür  $2,991 \pm 0,016$ .

# A. Übersicht: Teilchen

## A.1. Leptonen

- elementar (d.h. nicht aus anderen Teilchen zusammengesetzt)
- Fermionen (Spin 1/2)
- nehmen nicht an starker Wechselwirkung teil

Teilchen	Masse	Lebensdauer	Ladung / $e$
$e^-$	511 keV	$\infty$	-1
$\nu_e$	$< 1$ eV	$\infty$	0
$\mu^-$	106 MeV	$2,2 \cdot 10^{-6}$ s	-1
$\nu_\mu$	$< 0,2$ MeV	$\infty$	0
$\tau^-$	1784 MeV	$3 \cdot 10^{-14}$ s	-1
$\nu_\tau$	$< 18,2$ MeV	$\infty$	0

## A.2. Quarks

- elementar (d.h. nicht aus anderen Teilchen zusammengesetzt)
- Fermionen (Spin 1/2)
- nehmen an starker Wechselwirkung teil

Teilchen	Masse	Ladung / $e$
$d$	$\simeq 2$ MeV	-1/3
$u$	$\simeq 5$ MeV	+2/3
$s$	$\simeq 95$ MeV	-1/3
$c$	$\simeq 1,3$ GeV	+2/3
$b$	$\simeq 4,5$ GeV	-1/3
$t$	$\simeq 172$ GeV	+2/3

### A.3. Austauschteilchen

- elementar (d.h. nicht aus anderen Teilchen zusammengesetzt)
- Bosonen
- vermitteln die Wechselwirkungen

Teilchen	Masse / GeV	Wechselwirkung	Spin
$\gamma$ (Photon)	0	elektromagnetisch	1
$W^\pm$ (W-Bosonen)	80	schwach	1
$Z^0$ (Z-Boson)	90	schwach	1
$g$ (8 Gluonen)	0	stark	1
(Graviton)	(0)	(Gravitation)	(2)

### A.4. Higgs-Boson

Nach dem Standardmodell der Teilchenphysik erhalten die Teilchen ihre Masse über den sog. Higgs-Mechanismus. Dies führt zu der Vorhersage eines weiteren Teilchens, des Higgs-Bosons. Es ist als einziges der Standardmodellteilchen noch nicht nachgewiesen worden, seine Masse sollte nach heutigem Kenntnisstand zwischen 100 GeV und 200 GeV liegen.

### A.5. Mesonen

- zusammengesetzt aus einem Quark und einem Antiquark
- Bosonen (Spin 0 oder 1)
- nehmen an starker Wechselwirkung teil

Teilchen	Quarkgehalt	Masse / MeV	Lebensdauer	Ladung / e
$\pi^-$	$d\bar{u}$	140	$\tau = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ $\Gamma = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$	-1
$\pi^+$	$u\bar{d}$	140	$\tau = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ $\Gamma = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$	+1
$\pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	135	$\tau = 8,4 \cdot 10^{-17} \text{ s}$ $\Gamma = 7,8 \text{ eV}$	0
$K^+$	$u\bar{s}$	494	$\tau = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ $\Gamma = 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$	+1
$K^-$	$s\bar{u}$	494	$\tau = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ $\Gamma = 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$	-1
$K^0$	$d\bar{s}$	498	$K_1 : \tau = 8,9 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ $\Gamma = 7,4 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$	0
$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$	498	$K_2 : \tau = 5,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ $\Gamma = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$	0
$\eta$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$	549	$\tau = 5,6 \cdot 10^{-19} \text{ s}$ $\Gamma = 1,2 \text{ keV}$	0
$\eta'$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(d\bar{d} + u\bar{u} + s\bar{s})$	958	$\tau = 3,3 \cdot 10^{-21} \text{ s}$ $\Gamma = 0,20 \text{ MeV}$	0
$\rho^+$	$u\bar{d}$	771	$\tau = 4,4 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ $\Gamma = 149 \text{ MeV}$	+1
$\rho^-$	$d\bar{u}$	771	$\tau = 4,4 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ $\Gamma = 149 \text{ MeV}$	-1
$\rho^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$	771	$\tau = 4,4 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ $\Gamma = 149 \text{ MeV}$	0
$K^{*+}$	$u\bar{s}$	892	$\tau = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{ s}$ $\Gamma = 51 \text{ MeV}$	+1
$K^{*-}$	$s\bar{u}$	892	$\tau = 4,4 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ $\Gamma = 51 \text{ MeV}$	-1
$K^{*0}$	$d\bar{s}$	896	$\tau = 4,4 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ $\Gamma = 51 \text{ MeV}$	0
$\bar{K}^{*0}$	$s\bar{d}$	896	$\tau = 4,4 \cdot 10^{-24} \text{ s}$ $\Gamma = 51 \text{ MeV}$	0
$\omega$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$	783	$\tau = 7,8 \cdot 10^{-23} \text{ s}$ $\Gamma = 8,4 \text{ MeV}$	0
$\phi$	$s\bar{s}$	1019	$\tau = 1,5 \cdot 10^{-22} \text{ s}$ $\Gamma = 4,3 \text{ MeV}$	0
$J/\Psi$	$c\bar{c}$	3097	$\tau = 7,6 \cdot 10^{-21} \text{ s}$ $\Gamma = 87 \text{ keV}$	0
$\Upsilon$	$b\bar{b}$	9460	$\tau = 1,2 \cdot 10^{-20} \text{ s}$ $\Gamma = 53 \text{ keV}$	0

## A.6. Baryonen

- gebundene Zustände aus drei Quarks (Antibaryonen aus drei Antiquarks)
- Fermionen (Spin 1/2 oder 3/2)
- nehmen an der starken Wechselwirkung teil

Teilchen	Quarkgehalt	Masse / MeV	Lebensdauer	Ladung / $e$
$p$	$uud$	938,3	$\infty$ ( $\tau > 1,6 \cdot 10^{25}$ a)	+1
$n$	$udd$	939,6	$\tau = 886$ s	0
$\Sigma^+$	$uus$	1189	$\tau = 8,0 \cdot 10^{-9}$ s $\Gamma = 8,2 \cdot 10^{-8}$ eV	+1
$\Sigma^0$	$uds$	1192	$\tau = 7,4 \cdot 10^{-20}$ s $\Gamma = 8,9$ keV	0
$\Sigma^-$	$dds$	1197	$\tau = 1,5 \cdot 10^{-10}$ s $\Gamma = 4,4 \cdot 10^{-6}$ eV	-1
$\Lambda^0$	$uds$	1116	$\tau = 2,6 \cdot 10^{-10}$ s $\Gamma = 2,5 \cdot 10^{-6}$ eV	0
$\Xi^0$	$uss$	1315	$\tau = 2,9 \cdot 10^{-10}$ s $\Gamma = 2,3 \cdot 10^{-6}$ eV	0
$\Xi^-$	$dss$	1321	$\tau = 1,6 \cdot 10^{-10}$ s $\Gamma = 4,1 \cdot 10^{-6}$ eV	-1
$\Delta^{++}$	$uuu$	1232	$\tau = 5,5 \cdot 10^{-24}$ s $\Gamma = 120$ MeV	+2
$\Delta^+$	$uud$	1232	$\tau = 5,5 \cdot 10^{-24}$ s $\Gamma = 120$ MeV	+1
$\Delta^0$	$udd$	1232	$\tau = 5,5 \cdot 10^{-24}$ s $\Gamma = 120$ MeV	0
$\Delta^-$	$ddd$	1232	$\tau = 5,5 \cdot 10^{-24}$ s $\Gamma = 120$ MeV	-1
$\Sigma^{*+}$	$uus$	1383	$\tau = 1,8 \cdot 10^{-23}$ s $\Gamma = 36$ MeV	+1
$\Sigma^{*0}$	$uds$	1384	$\tau = 1,8 \cdot 10^{-23}$ s $\Gamma = 36$ MeV	0
$\Sigma^{*-}$	$dds$	1387	$\tau = 1,7 \cdot 10^{-23}$ s $\Gamma = 39$ MeV	-1
$\Xi^{*0}$	$uss$	1532	$\tau = 7,2 \cdot 10^{-23}$ s $\Gamma = 9,1$ MeV	0
$\Xi^{*-}$	$dss$	1535	$\tau = 6,6 \cdot 10^{-23}$ s $\Gamma = 9,9$ MeV	-1
$\Omega^-$	$sss$	1672	$\tau = 8,2 \cdot 10^{-9}$ s $\Gamma = 8,0 \cdot 10^{-8}$ eV	-1

# Literaturverzeichnis

- [1] Hans Frauenfelder, Ernest M. Henley: Subatomic Physics, 2. ed., 1991, Prentice Hall
- [2] Emilio Segrè: Nuclei and Particles, 2. ed., 1977, W. A. Benjamin Inc. Advanced Book Program