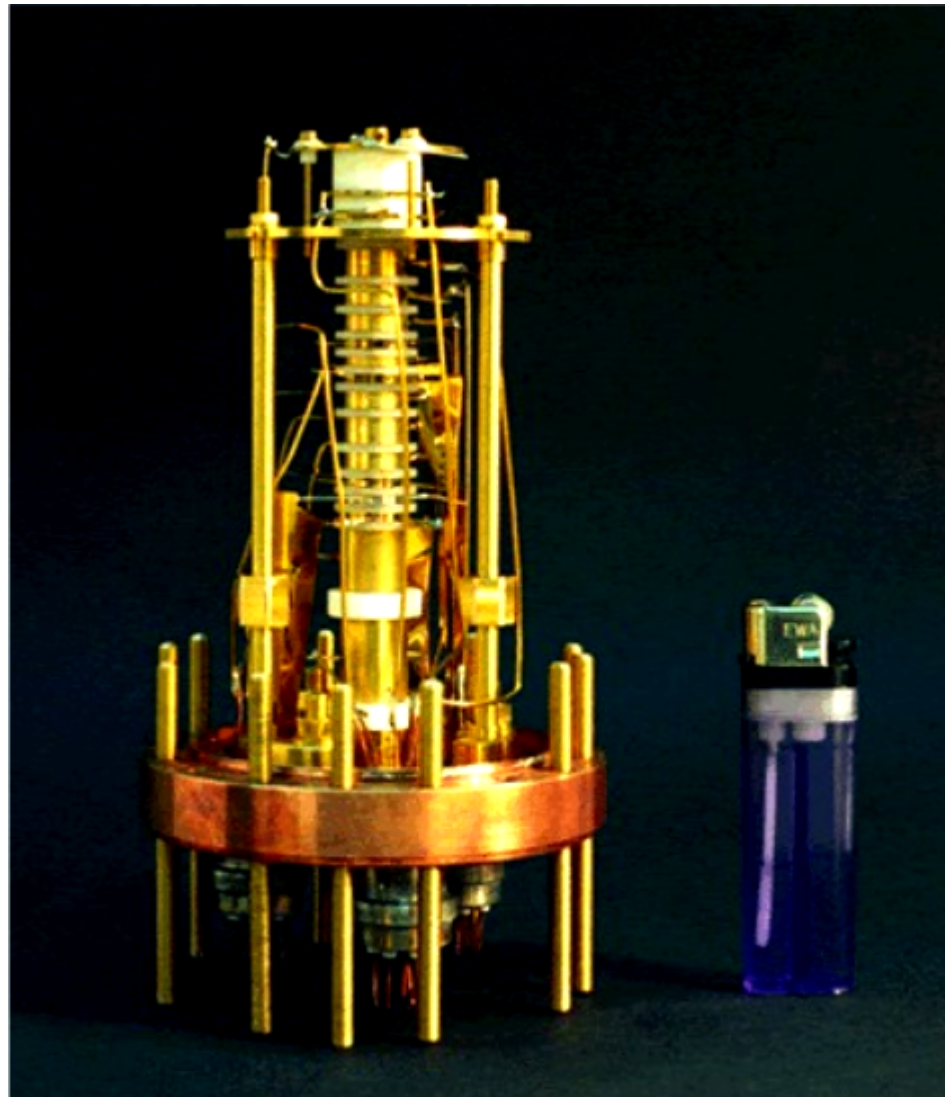


g-Faktor des Elektrons



Gliederung

1. Historie

2. Theoretische Grundlagen

- i. g-Faktor des Elektrons
- ii. Penning Falle

3. experimentelle Realisation

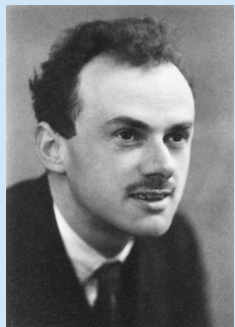
- i. Aufbau
- ii. QND Messung
- iii. Quantensprung Spektroskopie

4. Messergebnisse

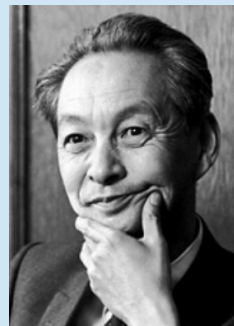
5. Fehlerquellen

1. Historie

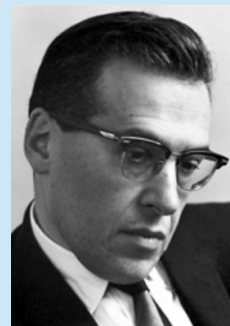
- Dirac-Gleichung macht Vorhersagen
- Quantenelektrodynamik (QED) ergänzt Korrekturen
- 1987 Messung durch Hans Georg Dehmelt kanpp 20 Jahren die genauste
- 2006 und 2008 G. Gabrielse von Harvard Präzisionsmessung



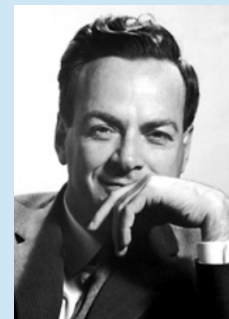
Paul Dirac



Sin-Itiro Tomonaga



Julian Schwinger



Richard P. Feynman



Gerald Gabrielse

$$g_e = 2$$

$$g_{\text{Elektron, theoretisch}} = 2,0023193048(8)$$

$$g = 2,00231930436146(56)$$

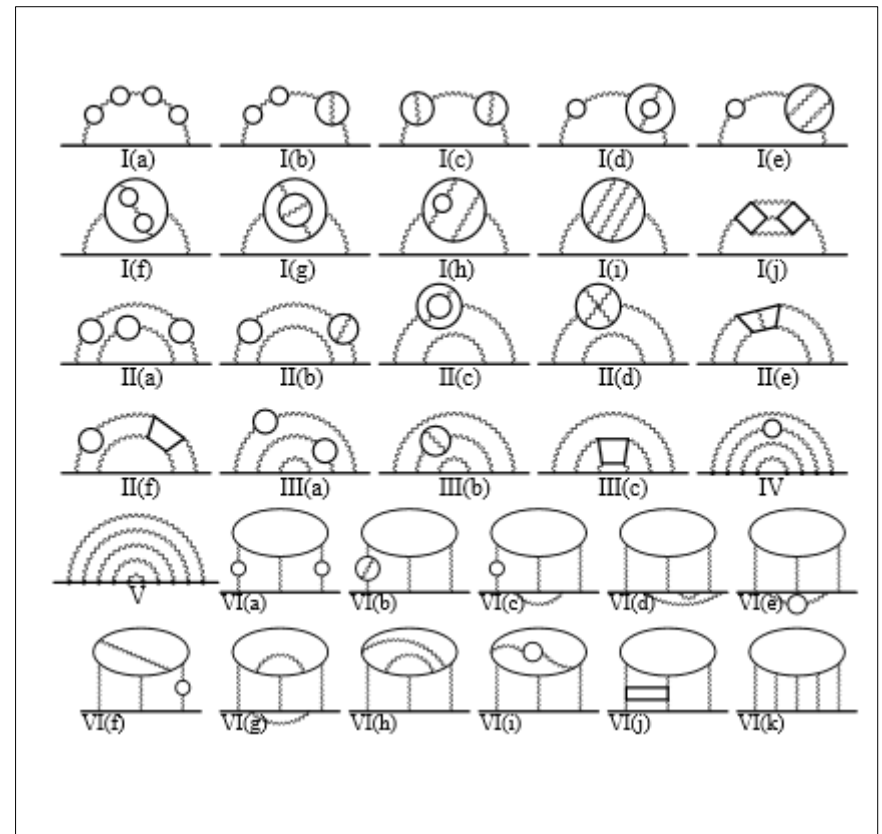
Motivation

- QED: Wechselwirkung geladener Teilchen untereinander oder mit externen Feldern
- Untersuchung des Gültigkeitsbereichs durch Präzisionsexperimente
- experimentellen Ergebnisse bestätigen QED
- eines der besten Ergebnisse der QED Vorhersage des anomalen magnetischen Moments des Elektron

Berechnung von $g/2$ mittels QED

$$\frac{g}{2} = 1 + C_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + C_4\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_6\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + C_8\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots + a_{\mu\tau} + a_{hadronic} + a_{weak}$$

- Auswertung von 891 Feynman-Diagrammen für α in 4. Ordnung
- für α in 5. Ordnung 12672 Feynman-Diagramme



Gliederung

1. Historie

2. Theoretische Grundlagen

- i. g-Faktor des Elektrons
- ii. Penning Falle

3. experimentelle Realisation

- i. Aufbau
- ii. QND Messung
- iii. Quantensprung Spektroskopie

4. Messergebnisse

5. Fehlerquellen

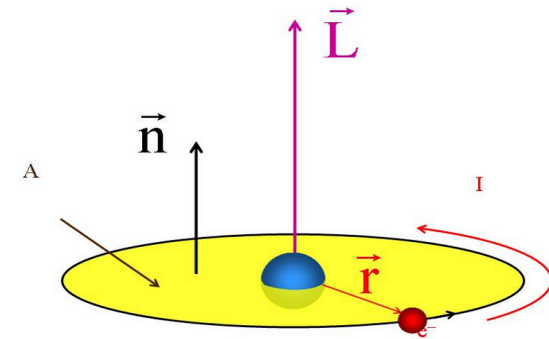
Theoretische Grundlagen

- klassisches magnetische Moment

$$\vec{\mu}_l = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

- analog Quantenmechanik

$$\vec{\mu}_s = g_s \frac{q}{2m} \vec{s}$$

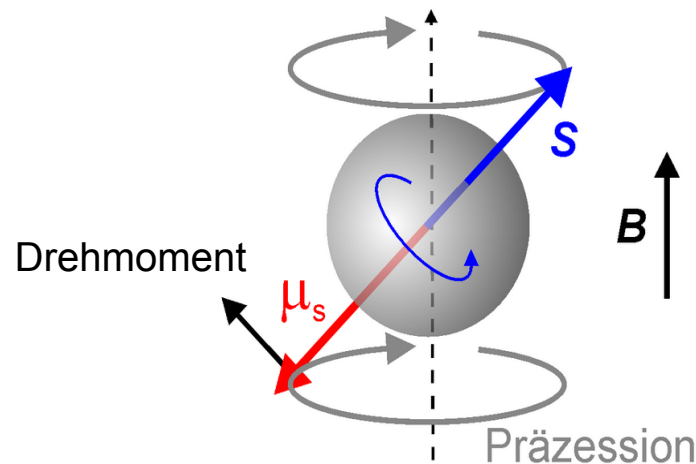


"g-Faktor (Landé-Faktor) ist das Verhältnis des gemessenen magnetischen Moments zu dem magnetischen Moment, das bei dem vorliegenden Drehimpuls nach der klassischen Physik zu erwarten wäre" (wikipedia)

Idee zur Messung von $g/2$

Larmor Frequenz:

Präzession des Drehimpulses/Spins um ein angelegtes Magnetfeld



$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$\omega_L = g \frac{e B}{2m}$$

Larmor Frequenz

Idee zur Messung von $g/2$

- Zyklotronfrequenz:
 - Umlauffrequenz eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld
 - Lorentzkraft als Zentripetalkraft

$$\omega_c = \frac{e}{m} B \quad \text{Zyklotronfrequenz}$$

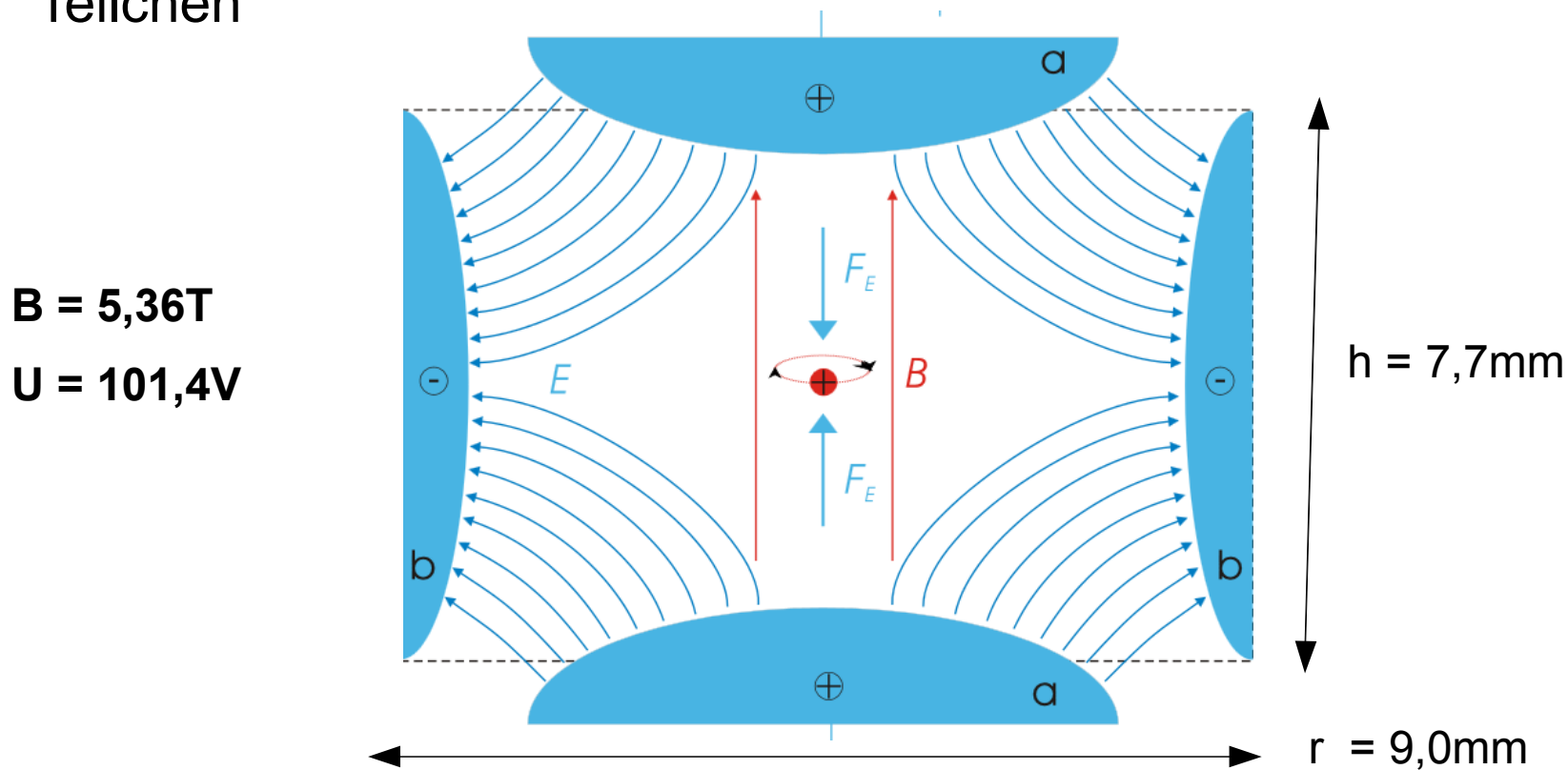
- Kombination von $\omega_L = g \frac{e B}{2m}$ und $\omega_c = \frac{e}{m} B$

$$\frac{g}{2} = \frac{\omega_L}{\omega_c} = \frac{2\pi \nu_L}{2\pi \nu_c} = 1 + \frac{\nu_a}{\nu_c} \quad \text{mit: } \nu_a \equiv \nu_L - \nu_c$$

ν_a : anormale Frequenz
 ν_L : Larmor Frequenz
 ν_c : Zyklotron Frequenz

Penning Falle

- homogenes Magnetfeld + Quadrupolfeld zur Speicherung geladener Teilchen



- radiale Beschränkung durch Magnetfeld
- axiale Beschränkung durch Elektrisches Feld

- durch elektrisches Feld keine reine Zyklotronbewegung
- Überlagerung aus 3 harmonischen Schwingungen

$$v_z = \sqrt{\frac{eU}{Md^2}}$$

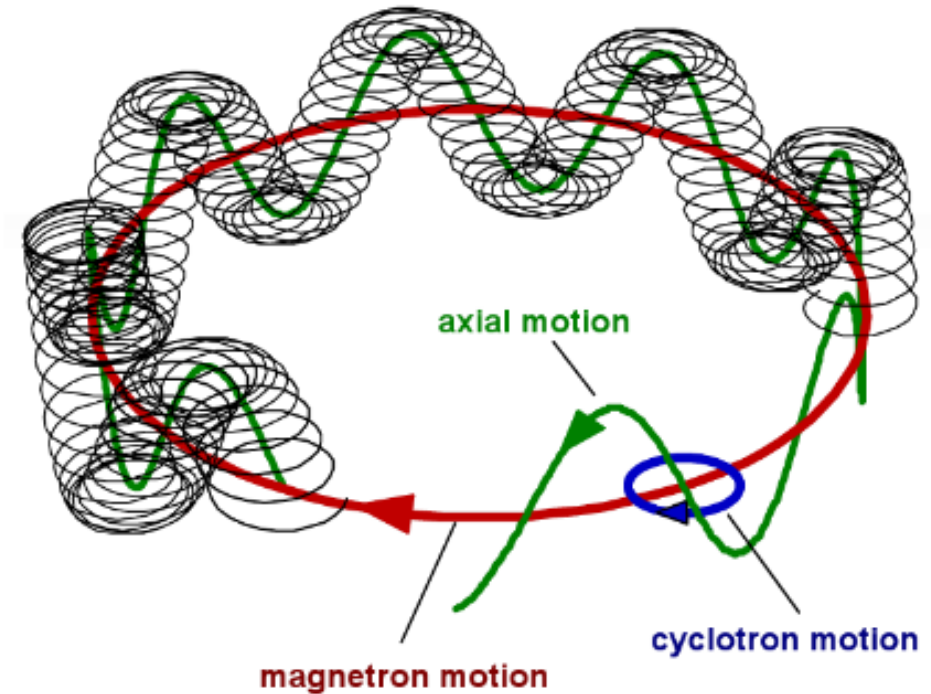
Axialbewegung

$$v_1 = v_c - \frac{U}{2d^2 B}$$

modifizierte
Zyklotronbewegung

$$v_2 = \frac{U}{2d^2 B}$$

Magnetronbewegung



Axialbewegung

 v_z

200MHz

Zyklotronbewegung

 v_1

150GHz

Magnetronbewegung

 v_2

133kHz

Bei reiner Zyklotronbewegung hatte wir:

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{v_a}{v_c}$$

$$v_a \equiv v_L - v_c$$

Jetzt aber keine reine Zyklotronbewegung mehr!

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\bar{v}_a - v_z^2 / (2f_c)}{f_c + 3\delta/2 + v_z^2 / (2f_c)} + \frac{\Delta g_{cav}}{2}$$

reale Zyklotronfrequenz:

$$f_c \equiv v_c - v_2 - 3/2\delta$$

reale anormale Frequenz:

$$\bar{v}_a \equiv v_a - v_2$$

relativistische Korrektur:

$$\delta = \frac{h v_c^2}{m_e c^2}$$

cavity shift:

$$\frac{\Delta g_{cav}}{2}$$

v_a : reine anormale Frequenz

v_c : reine Zyklotron Frequenz

v_2 : Magnetron Frequenz

Ungenauigkeiten wie e, U, B gehen nicht direkt in die Messung ein!

Was muss wie genau bestimmt werden?

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\bar{\nu}_a - \frac{v_z^2}{2f_c}}{f_c + 3\delta/2 + \frac{v_z^2}{2f_c}} + \frac{\Delta g_{cav}}{2}$$

mit hoher Präzision (Hauptbeiträge) mit "normaler" Präzision (kleine Korrekturbeiträge)

$\bar{\nu}_a \approx 170\text{MHz}$ $f_c \approx 150\text{GHz}$

v_z	<p>axiale Frequenz</p> <ul style="list-style-type: none"> relativ einfach über Spiegelladung in der Elektrode zu messen 200MHz \rightarrow $v_z^2/(2f_c) \approx 130\text{kHz}$
$\delta = \frac{h v_1^2}{m_e c^2}$	<p>relativistische Korrektur</p> <p>ausrechnen mit $v_1 = 150\text{GHz}$ \Rightarrow $\delta \approx 180\text{Hz}$</p>
$\frac{\Delta g_{cav}}{2}$	<p>cavity shift</p> <ul style="list-style-type: none"> Moden der Falle (Hohlraum) koppeln an die Zyklotronbewegung Verschiebung von f_c und ν_a $0,2 \cdot 10^{-12}$

Wie erhält man $\bar{\nu}_a$ und f_c ?

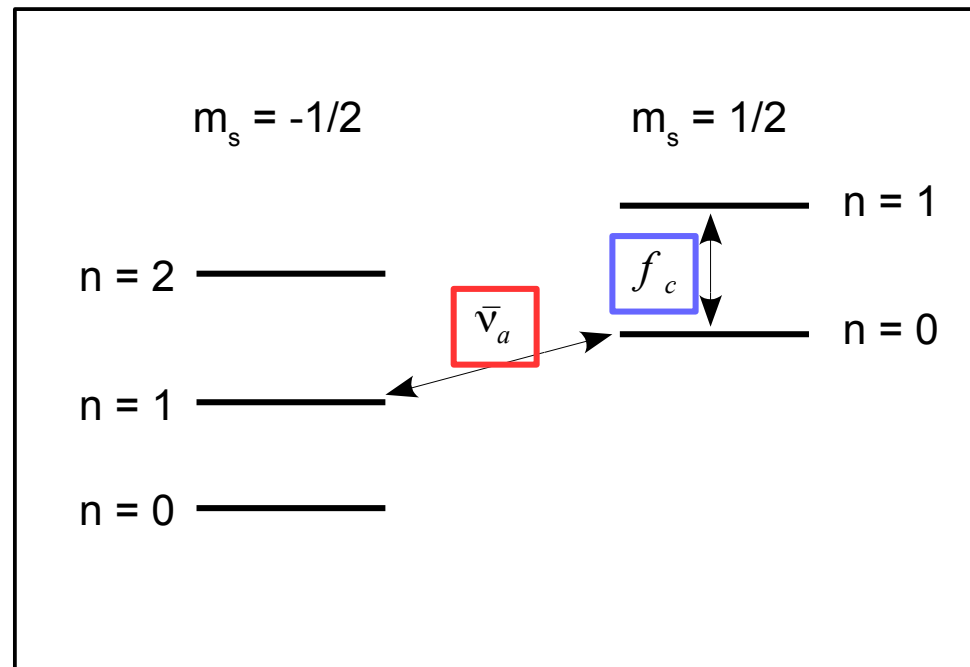
$$\frac{g}{2} = \frac{\nu_1 + \bar{\nu}_a}{\nu_c} = 1 + \frac{\bar{\nu}_a - \nu_z^2/(2f_c)}{f_c + 3\delta/2 + \nu_z^2/(2f_c)} + \frac{\Delta g_{cav}}{2}$$

mit hoher Präzision
(Hauptbeiträge)

Eigenenergiezustände des Elektrons

reale Zyklotronfrequenz: f_c

reale anormale Frequenz: $\bar{\nu}_a$



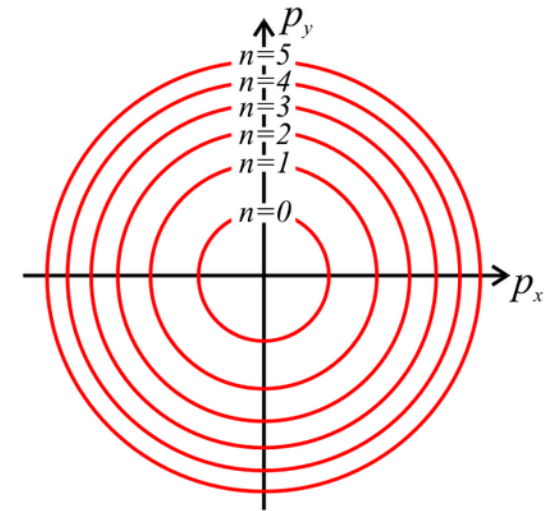
Energieniveaus des Elektrons in der Penning Falle:

Quantelung der Energie geladener Teilchen im homogenen Magnetfeld

Landau-Niveau:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h \nu_1$$

$n = 0, 1, \dots$ Hauptquantenzahl ; ν_1 : modifizierte Zyklotronfrequenz



Zeeman-Effekt:

$$E_{m_s} = g \hbar B m_c \omega_L = \frac{g}{2} h \nu_c m_s$$

$m_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ Spinquantenzahl ; ν_c : Zyklotronfrequenz

$$E(n, m_s) = \frac{g}{2} h \nu_c m_s + \left(n + \frac{1}{2}\right) h \nu_1 - \frac{1}{2} h \delta \left(n + \frac{1}{2} + m_s\right)^2$$

relativistische Korrektur

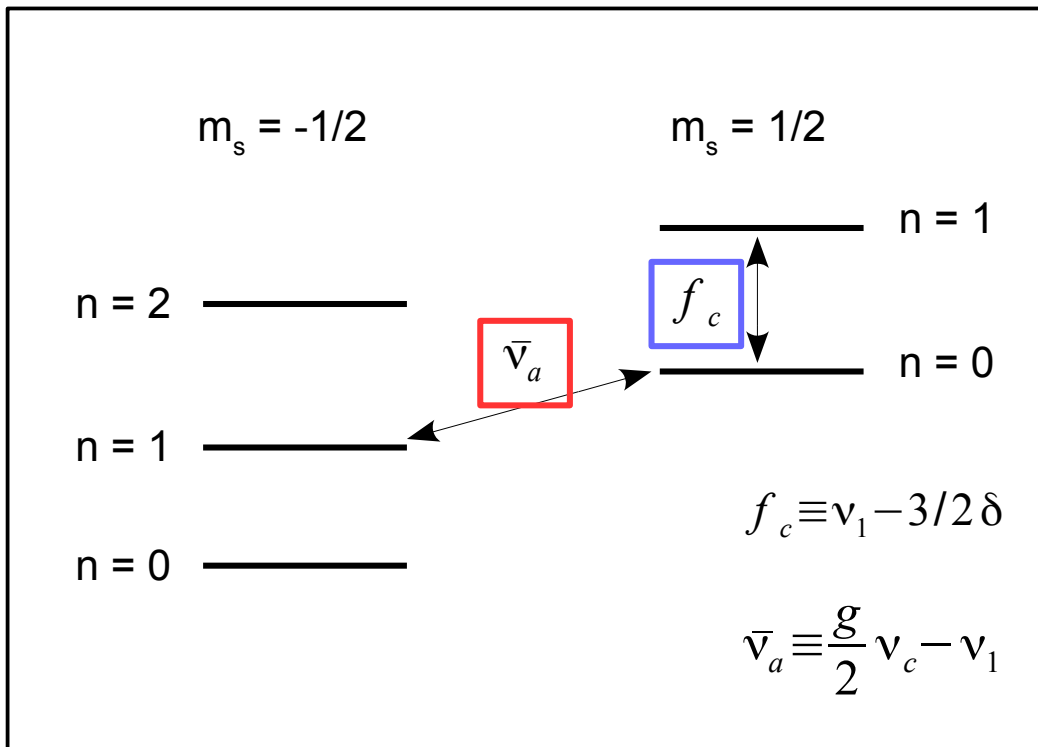
diskrete Energieverteilung:

$$E(n, m_s) = \frac{g}{2} h \nu_c m_s + \left(n + \frac{1}{2}\right) h \nu_1 - \frac{1}{2} h \delta \left(n + \frac{1}{2} + m_s\right)^2$$

schematische Darstellung
der Energieniveaus:

reale Zyklotronfrequenz: f_c

reale anomale Frequenz: $\bar{\nu}_a$



theoretisch sind nun alle
Größen bekannt...

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\bar{\nu}_a - \nu_z^2 / (2f_c)}{f_c + 3\delta/2 + \nu_z^2 / (2f_c)} + \frac{\Delta g_{cav}}{2}$$



Gliederung

1. Historie

2. Theoretische Grundlagen

- i. g-Faktor des Elektrons
- ii. Penning Falle

3. experimentelle Realisation

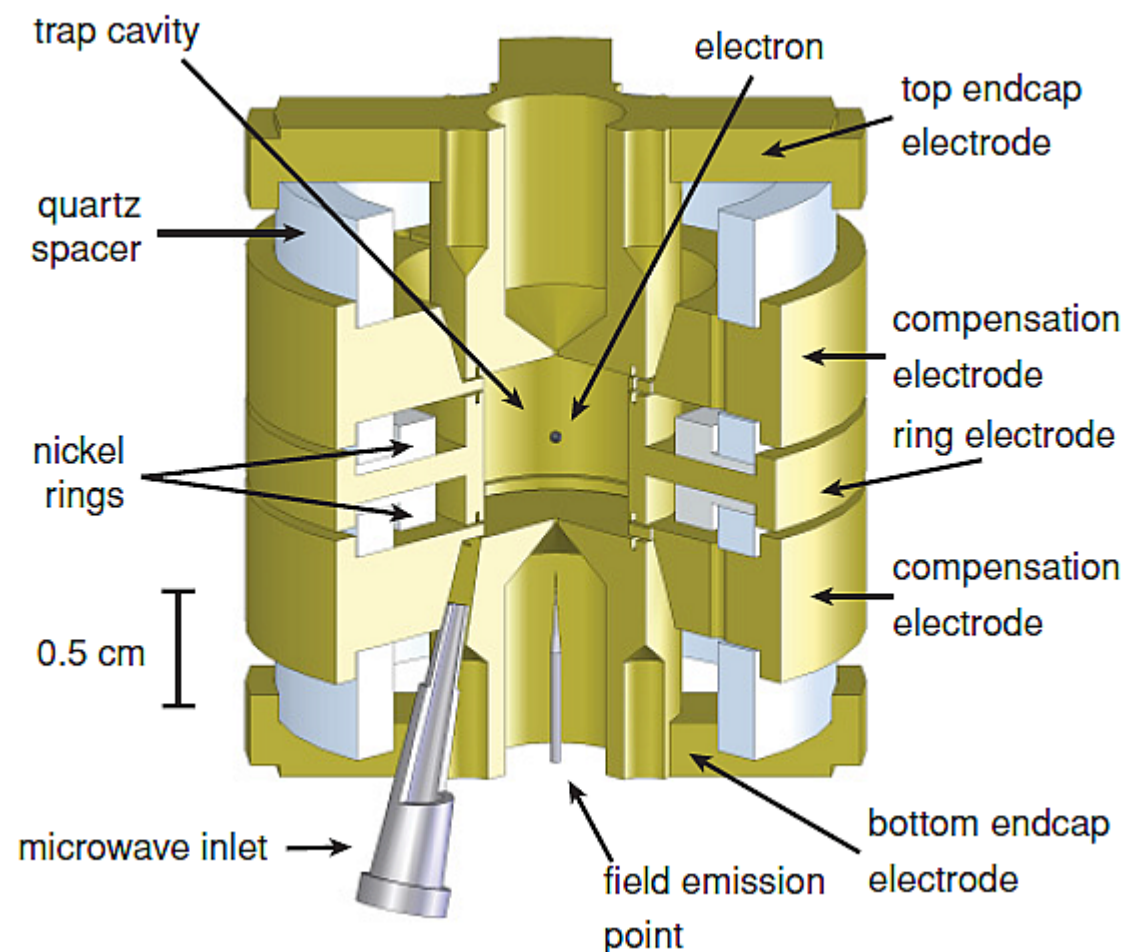
- i. Aufbau
- ii. QND Messung
- iii. Quantensprung Spektroskopie

4. Messergebnisse

5. Fehlerquellen

experimentelle Realisation

- minimale Temperatur: **100mK**
(^3He - ^4He -Mischungskühlung)
- Ultrahochvakuum: **$< 7 \cdot 10^{-17}$ mbar**
- Magnetfeld:
 - **5.36T**
 - Schwankungen: **$< 10^{-9}/\text{h}$**
 - Homogenität: **$< 10^{-8}/\text{cm}$**



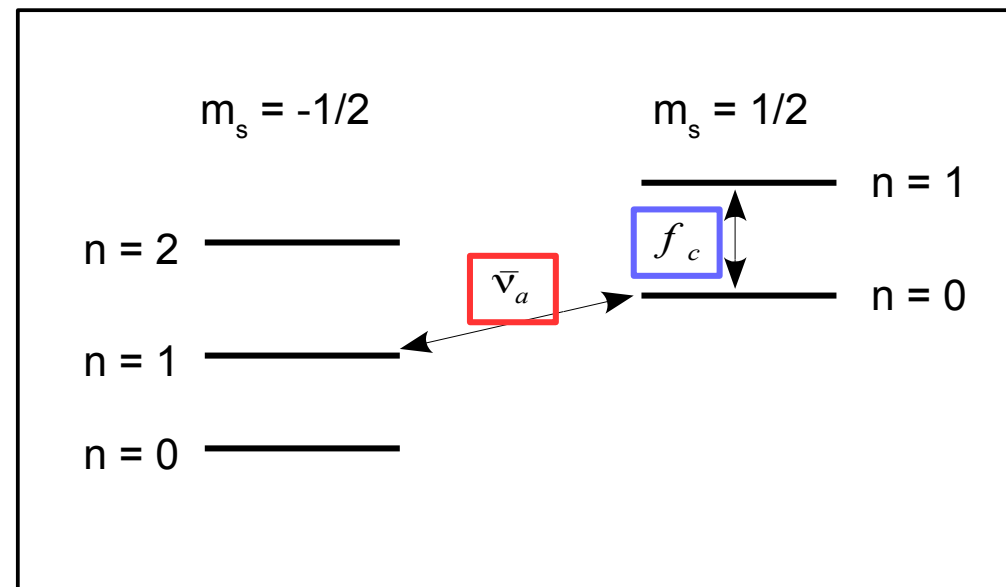
zylindrische Penning Falle

Zurück zum Energieniveau

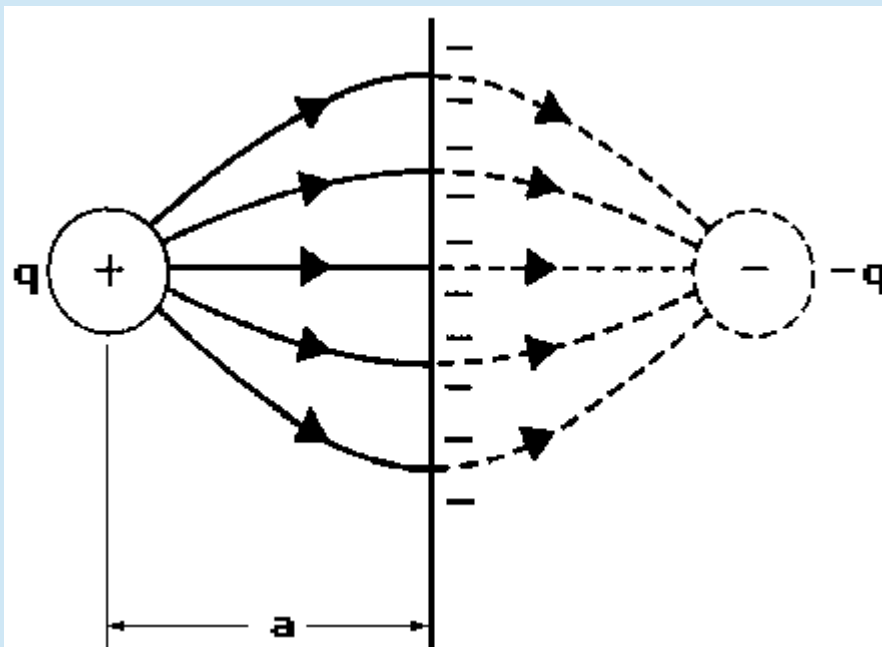
- direkte präzise Messung der Energieniveaus nicht möglich
- Idee: äußere Anregung um Übergang zu ermöglichen
- **Zyklotronübergänge** ($n=0 \rightarrow n=1$) durch Mikrowellen
- **"Spinflips"** ($m_s = 1/2 \rightarrow m_s = -1/2$) oszillierendes Potential des Quadrupols
- Beobachtung bei welchen Frequenzen ein Übergang stattfindet

reale Zyklotronfrequenz: f_c

reale anormale Frequenz: $\bar{\nu}_a$

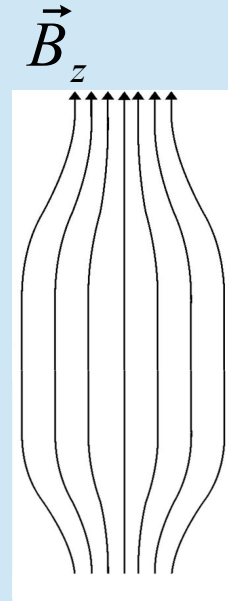
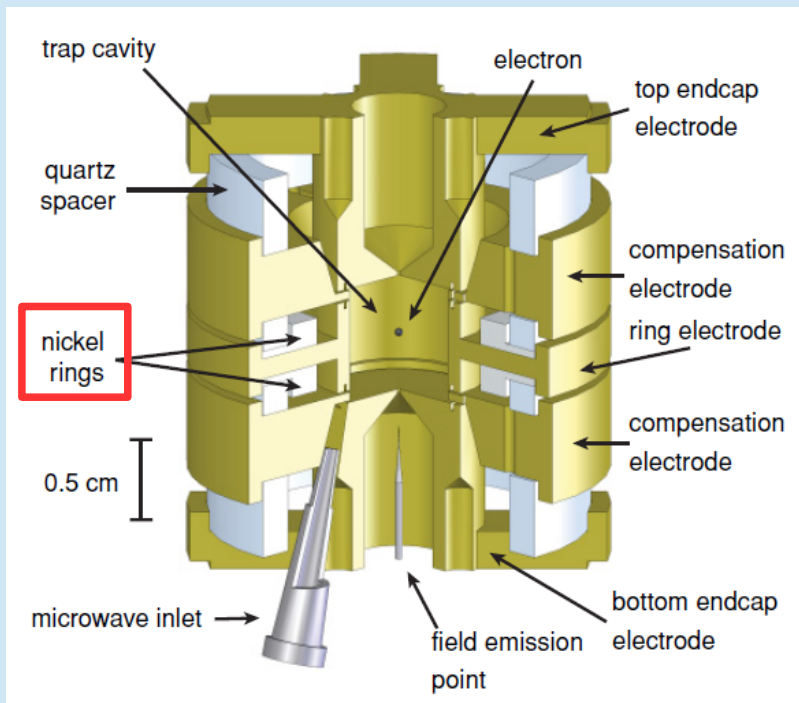


- Energieeigenzustand muss über langen Zeitraum bekannt und gleich sein
- d.h. Messung soll den Zustand nicht verändern
- QND (Quantum non-demolition): zerstörungsfreie Quantenmessung
- Zustand des Teilchens vor der Messung ist der nach der Messung



oszillierendes Elektron besitzt
Spiegelladung in den
Elektroden

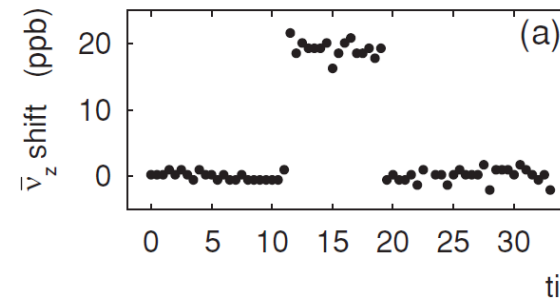
- messbarer Spiegelstrom
- präzise Frequenzmessung



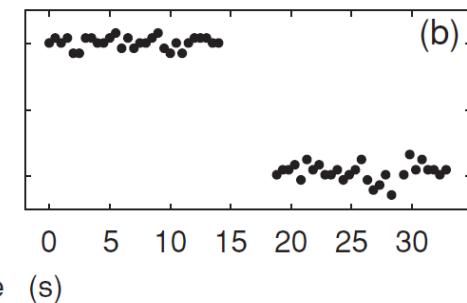
Magnetische Flasche:

- Verringerung des Feldes um 0,7%
- Modifikation der axialen Oszillation

$$\Delta \nu_z = \delta (n + m_s)$$

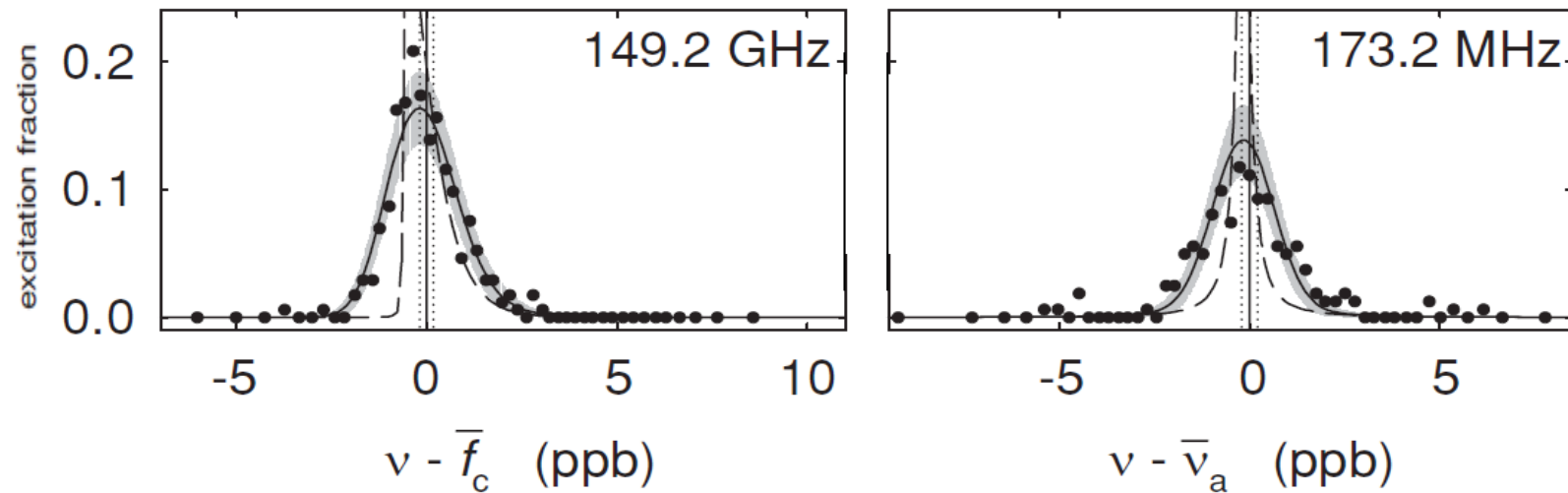


a) Zyklotron-Übergang



b) Spin-Flip

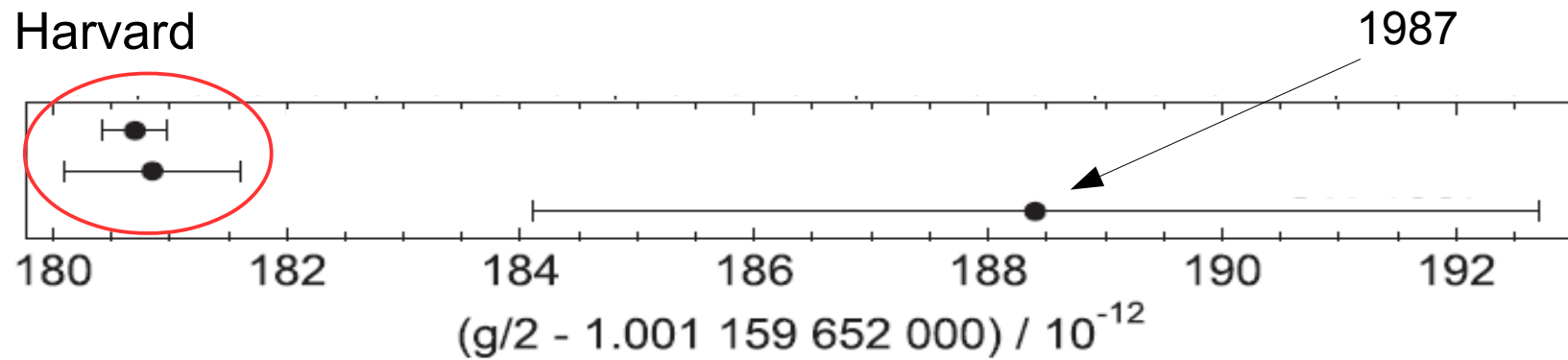
Quantensprung Spektroskopie



- zu Beginn der Messung ist Elektron im $|0, \frac{1}{2}\rangle$ Zustand
- abwechselnde Anregung von f_c und $\bar{\nu}_a$ durch unterschiedliche Frequenzen
- Zählen der beobachteten Übergängen
- Auftragung Anregungswahrscheinlichkeit gegen Anregungsfrequenz in Histogramm

Ergebnis: $g/2 = 1,001\,159\,652\,180\,73(28)$

Vergleich mit anderen Messungen



Feinstrukturkonstante mit Hilfe QED:

d.h. $\frac{g}{2} = 1 + C_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + \dots$

$$\alpha^{-1} = 137.035999084(33)(39)$$

unabhängige Messung:

$$\alpha^{-1} = 137.035999074(44)$$

- Magnetfeldinstabilitäten
 - Störung der Messung durch äußere Magnetfelder
 - Messung in der Nacht und am Wochenende
 - supraleitender Magnet $10^{-9}/h$
- Hohlraumstrahlung (cavity shift)
 - nicht komplett verstanden
- Schwarzkörper Strahlung
 - Breite der Peaks
- Statistik/ Fitten

QED ist tatsächlich eine äußerst präzise Theorie

(genauer als die Erfinder es sich ausmalten...)

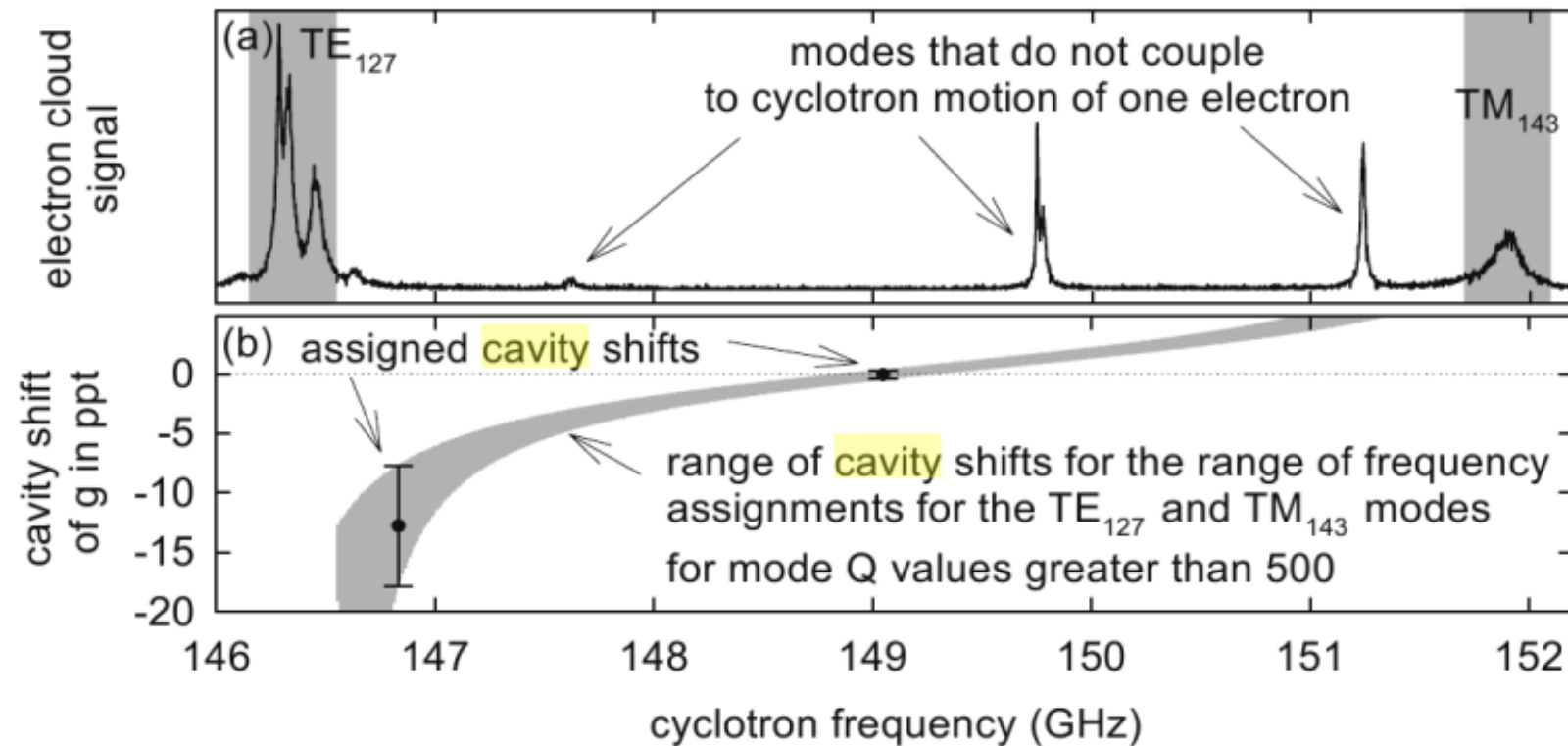
Quellen

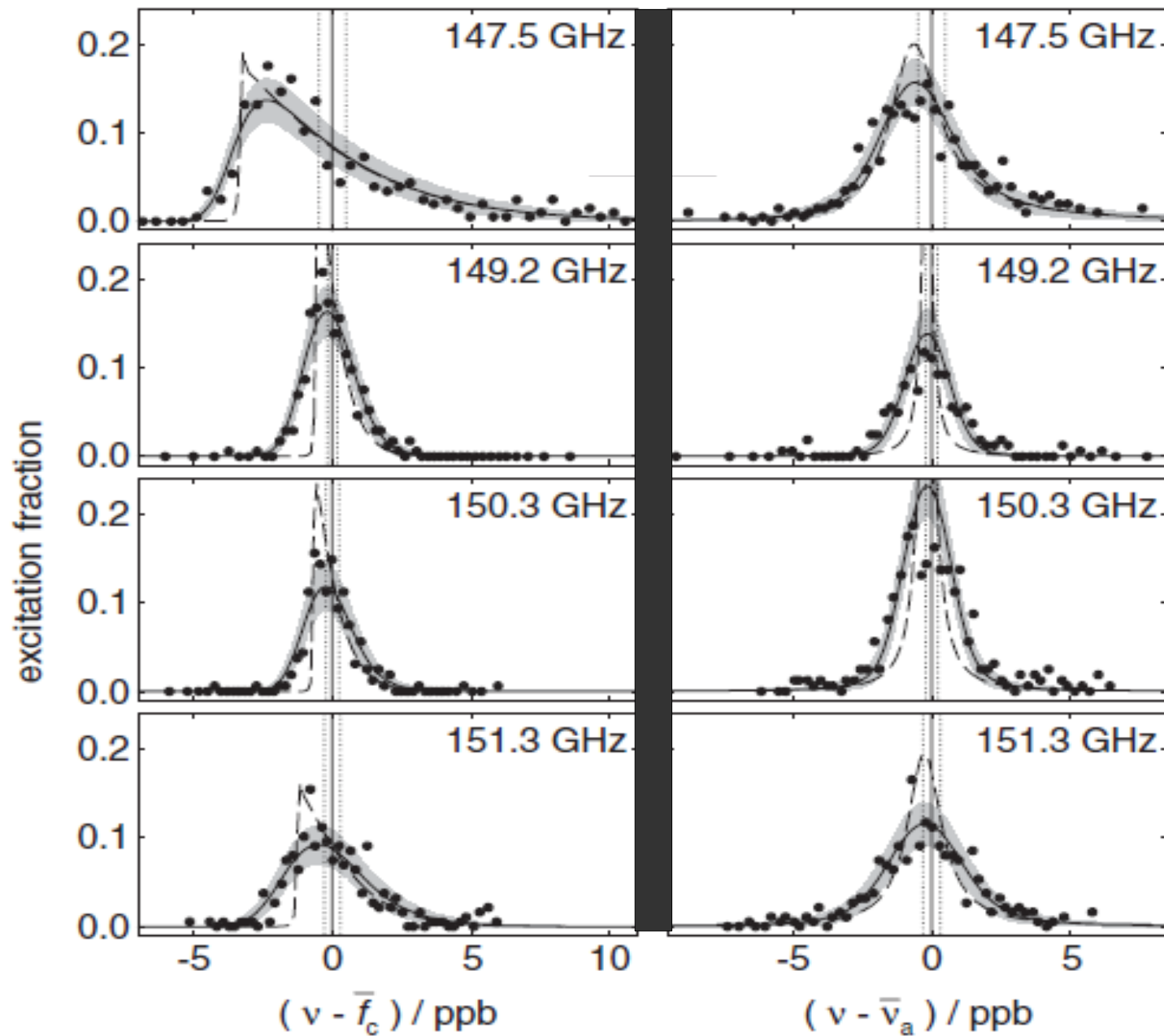
1. D.Hanneke, S.Fogwell, and G.Gabrielse, Phys.Rev.Lett.100,120801 (2008)
2. D.Hanneke, S.Fogwell, and G.Gabrielse, Phys.Rev.A.83.052122 (2011)
3. <http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/FP/anleitungen/F47.pdf>
4. <http://www.kip.uni-heidelberg.de/~ion/talks/g-factor.pdf>
5. wikipedia.org



????????????

Cavity Shift

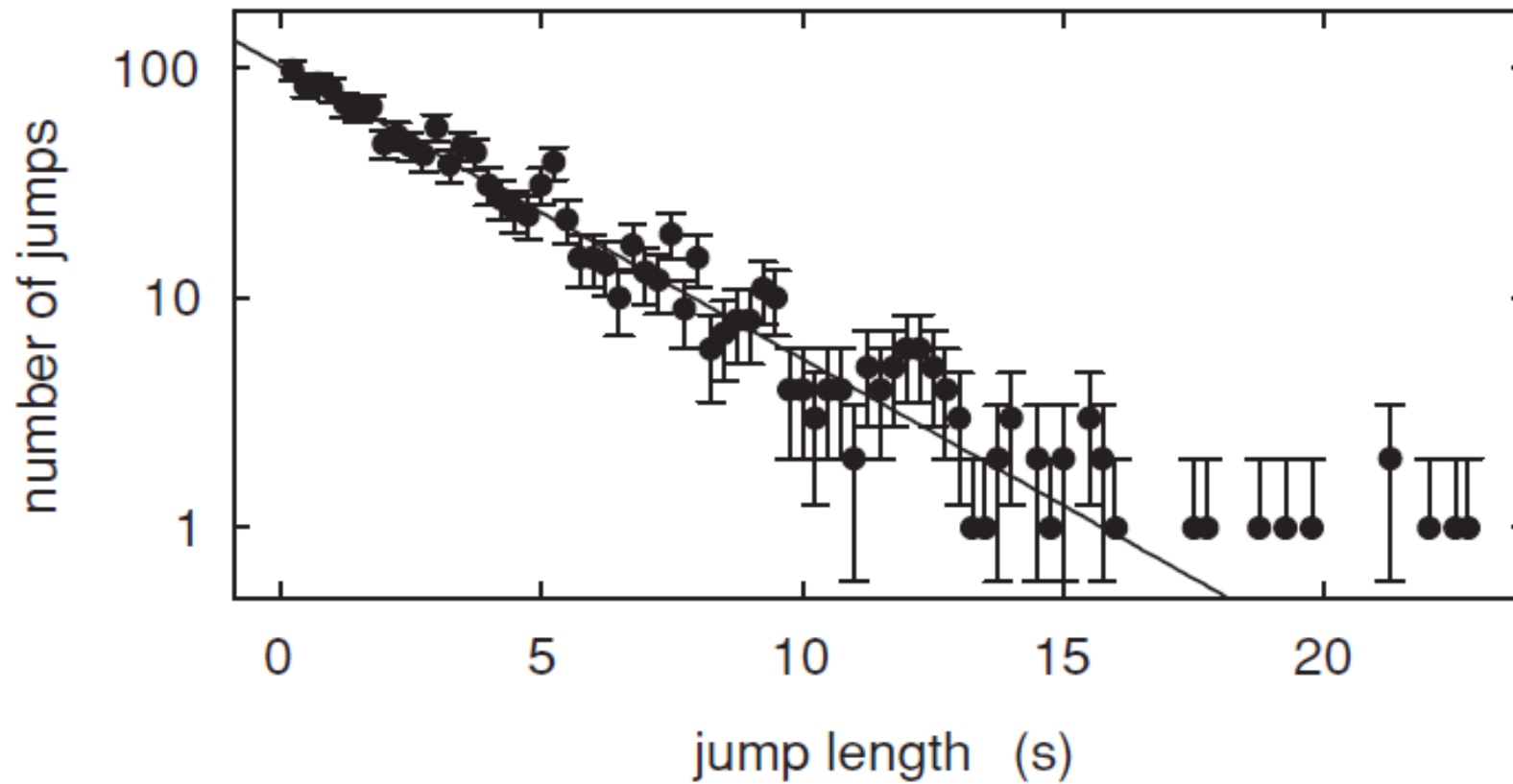




Extra

TABLE I. Measurements and shifts with uncertainties, all multiplied by 10^{12} . The cavity-shifted “ $g/2$ raw” and corrected “ $g/2$ ” are offset from our result in Eq. (3).

\bar{f}_c	147.5 GHz	149.2 GHz	150.3 GHz	151.3 GHz
$g/2$ raw	−5.24 (0.39)	0.31 (0.17)	2.17 (0.17)	5.70 (0.24)
Cav. shift	4.36 (0.13)	−0.16 (0.06)	−2.25 (0.07)	−6.02 (0.28)
Line shape				
<i>Correlated</i>	(0.24)	(0.24)	(0.24)	(0.24)
<i>Uncorrelated</i>	(0.56)	(0.00)	(0.15)	(0.30)
$g/2$	−0.88 (0.73)	0.15 (0.30)	−0.08 (0.34)	−0.32 (0.53)



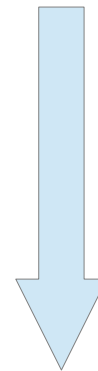
Ausgangsformel

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{v_a}{v_c}$$

$$v_1 = v_c - \frac{U}{2d^2 B}$$

$$v_a = \frac{g}{2} v_c - v_c$$

benutze:



$$v_z = \sqrt{\frac{eU}{Md^2}}$$

$$v_c = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_z^2}$$

$$\frac{g}{2} = \frac{v_1 + \bar{v}_a}{v_c} = 1 + \frac{\bar{v}_a - v_z^2 / (2f_c)}{f_c + 3\delta/2 + v_z^2 / (2f_c)} + \frac{\Delta g_{cav}}{2}$$

mit: $f_c \equiv v_1 - 3/2\delta$ $\bar{v}_a \equiv \frac{g}{2} v_c - v_1$ $\delta = \frac{h v_c^2}{m_e c^2}$