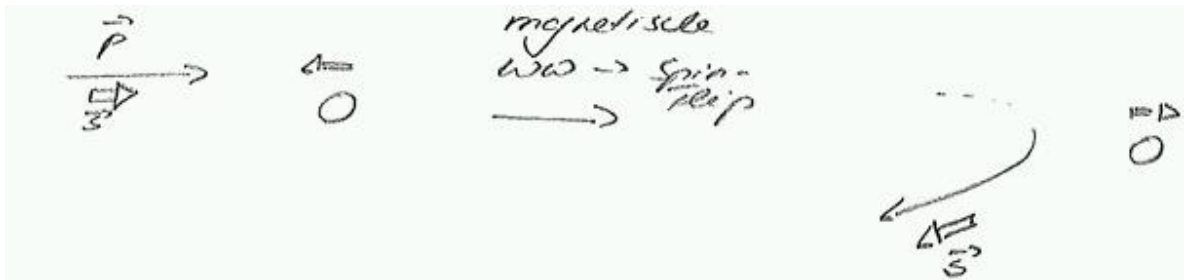


um ein reales Proton zu beschreiben.



Durch Spin-Flip des Protons bleiben Helizität und Drehimpuls bei Rückwärtsstreuung gleichzeitig erhalten!

Für den Fall eines Spin-Flips des Protons ist die Rückwärtsstreuung bevorzugt und die Vorwärtsstreuung unterdrückt.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth}} \left(\underbrace{\cos^2 \theta/2}_{\text{Mott}(\beta \rightarrow 1)\text{el. WW}} + \underbrace{\frac{Q^2}{2m_p^2 c^2} \sin^2 \theta/2}_{\text{magn. WW}} \right)$$

Für elastische Streuung in der der Rückstoss vernachlässigt werden kann ist $q^2 = -(\vec{p}_e - \vec{p}'_e)^2 < 0$, deshalb führt man die Variable $Q^2 = -q^2$ ein.

Da wir Dirac-Protonen behandeln, die das normale magnetische Moment $\mu = \frac{e}{2m_p}$ haben, wobei m_p die Protonmasse ist, ist die Amplitude $\mathcal{A} \propto \frac{1}{m_p}$ und entsprechend der Wirkungsquerschnitt proportional zu $\frac{1}{m_p^2}$. Wir sehen auch dass der Spin-Spin Wechselwirkungsterm mit Q^2 steigt, d.h. entsprechend mit dem Abstand stark abfällt.

5.5.3 Streuquerschnitt mit Rückstoss

In Fällen in denen der Rückstoss nicht vernachlässigt werden kann wird der Wirkungsquerschnitt wie folgt modifiziert:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rückstoss}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Rückstoss}} \left(\frac{E'}{E}\right) \quad (116)$$

Da in diesem Fall $E \neq E'$ ist entsprechend auch $q^2 \neq \bar{q}^2$. Das heisst es muss überall in dem Wirkungsquerschnitt der 3er-Impuls durch den 4er-Impuls ersetzt werden.

Entsprechend wird der Zusammenhang zwischen q und θ modifiziert:

$$q^2 = 4 E E' \sin^2(\theta/2) \quad (117)$$

5.5.4 Rosenbluth-Streuung

Jetzt werden alle Effekt zusammen gebracht um die Elektron-Streuung an ausgedehnten Spin=1/2 Nukleonen zu beschreiben. Das bedeutet es müssen zwei Formfaktoren $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ eingeführt werden, die die Verteilung der elektrischen Ladung und des magnetischen Moments berücksichtigen.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosenbluth}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(\frac{E'}{E}\right) \left[\underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}}_{A(Q^2)} + \underbrace{2\tau G_M^2(Q^2)}_{B(Q^2)} \tan^2 \theta/2 \right] \quad (118)$$

$$\tau = \frac{Q^2}{4m_p^2 c^2}$$

Da q ($Q^2 = -q^2$) in diesem Fall der 4er Impuls ist, können die Formfaktoren G_E, G_M nicht mehr bzw. nur für kleine Q^2 Werte als Fouriertransformierte der Verteilung der elektrischen Ladung bzw. des magnetischen Moments betrachtet werden.

Verhalten für $|Q| \rightarrow 0$

$$G_E^p(Q^2 = 0) = 1 \quad G_E^n(Q^2 = 0) = 0$$

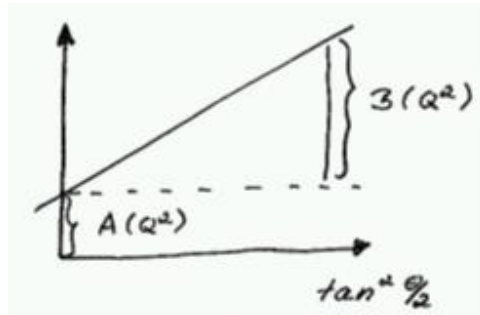
$$\underbrace{G_M^p(Q^2 = 0) = 2,79}_{\text{aus e-p-Streuung}} \quad \underbrace{G_M^n(Q^2 = 0) = -1,91}_{\text{aus e-n-Streuung}}$$

Verhalten für $|Q| \rightarrow 0$ (dann auch $\tau \rightarrow 0$) entspricht Streuung an punktförmigen Protonen und Neutronen mit anomalem magnetischen Moment.

Um $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ getrennt zu messen, muss der WQ bei festem Q^2 für verschiedene Streuwinkel, d. h. verschiedenen Elektronenenergien gemessen

werden.

$$R = \frac{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Rosenbluth}}}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Mott}}(\frac{E'}{E})} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \theta/2$$



Aus $A(Q^2)$ und $B(Q^2)$ folgt $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ bei einem festen Q^2 .

Die Messung von G_E und G_M bei mehreren Q^2 Werten ergibt folgende Ergebnisse:

$$1) G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2.79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{-1.91}$$

d. h. *elektrische* und *magnetische Ausdehnung* sind gleich; G_E^n ist vernachlässigbar

2) Die Form der Verteilung wird durch die Dipolform beschrieben:

$$G(Q^2) = (1 + \frac{Q^2}{0.71^2(\text{GeV}/c)^2})^{-2}$$

Die Dipolform entspricht einer Ladungsverteilung, die exponentiell abfällt

$$\rho(r) = \rho(0)e^{-ar} \text{ mit } a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$$

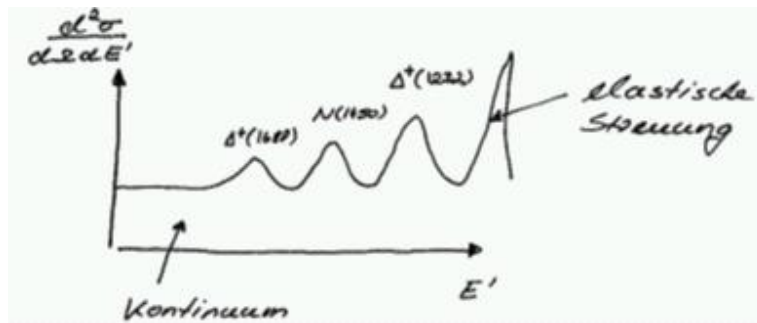
3) Mittlerer quadratischer Radius aus Protonen/Neutronen:

Aus der Ladungsverteilung lässt sich dann der mittlere quadratische Protonenradius bestimmen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{Dipol}} = 0.97 \text{ fm}$$

6 Tiefinelastische Streuung

Steigert man den Energieübertrag der e^- auf die Protonen, kommt es zur Anregung von inneren Freiheitsgraden, da Protonen zusammengesetzte Teilchen sind.



Die oben skizzierte Verteilung wurde in einem Experiment beobachtet in dem Elektronen mit einer Energie $E = 4.9 \text{ GeV}$ auf ein Protontarget geschossen wurden. Unter dem Winkel von $\Theta = 10^\circ$ wurde die Energie E' der gestreuten Elektronen gemessen. Der große Peak bei $E' = 4.5 \text{ GeV}$ entspricht der elastischen Streuung. Das $\Delta^+(1232)$ Teilchens (Quarkkontent $|uud\rangle$) hat Spin = 1 und ist der erste Anregungszustand des Protons; $m(\Delta^+) = 1232 \text{ MeV}/c^2$. Die zugehörige Resonanz ist klar im E' Spektrum erkennbar, ebenso weitere Resonanzen höherer Massen. Bei kleinen E' Werten wird soviel Energie auf das Proton übertragen, dass es aufbricht und neue Teilchen bildet.

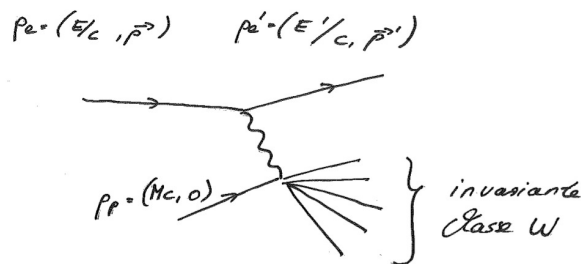
Streuungen in dem angeregte $|uud\rangle$ Resonanzen erzeugt werden, heißen inelastische Streuungen, Streuungen in denen das Proton aufgebrochen wird, heissen tiefinelastische Streuungen.

6.1 Kinematik inelastischer Streuung

Ein elastischer Streuprozess an einem ruhenden Target mit vorgegebener Energie E des einlaufenden Teilchens ist mit einem Parameter beschrieben

(z. B. θ, Q^2, E', \dots). Diese Parameter lassen sich eindeutig ineinander umrechnen.

Für die inelastische Streuung werden zwei Parameter benötigt um die Streuung zu beschreiben.



Im Ruhesystem des Protons sind folgende Variablen definiert:

Energieübertrag: $\nu = E - E'$

Invariante Masse der Protonzerfallsprodukte, W: $W^2 c^2 = (P + q)^2 = M^2 c^2 + 2P_p q + q^2$

mit $2P_p q = 2Mc \frac{\nu}{c}$, wobei P_p der 4er-Impuls vor dem Stoss des Protons und M die Masse des Protons ist.

4er-Impulsübertrag: $q^2 = W^2 c^2 - M^2 c^2 - 2M\nu = -Q^2$

Für die elastische Streuung gilt: $W = M \Rightarrow \frac{Q^2}{2M\nu} = 1$

Für inelastische Streuung gilt: $W > M \Rightarrow 2M\nu - Q^2 > 0$

Es wird die Bjorken-Skalenvariable x_B eingeführt.

$x_B := \frac{Q^2}{2M\nu} < 1$

Es gilt: $0 < x_B < 1$. Die Bjorken-Skalenvariable ist ein Mass für die Elastizität der Streuung. Je kleiner x_B ist, desto inelastischer ist die Streuung. Die oben eingeführten Variablen können ineinander umgerechnet werden. Es werden genau zwei davon benötigt, um eine inelastische Streuung zu

beschreiben, z.B. (θ, E') , (Q^2, ν) , (Q^2, x_B) ,

6.2 WQ für tiefinelastische Streuung

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \underbrace{\frac{E'}{E}}_{\text{Rückstoss}} [W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \theta/2] \quad (119)$$

Vergleich zu Dirac-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} (1 + 2\tau \tan^2 \theta/2) \quad (120)$$

mit $\tau = \frac{Q^2}{4M_p^2 c^2}$

$W_2(Q^2, \nu)$, $W_1(Q^2, \nu)$ heißen Strukturfunktionen, sie hängen jeweils von zwei Variablen ab.

Nebenbemerkung:

Heute werden statt den dimensionsbehafteten Strukturfunktionen W_1 , W_2 die dimensionslosen Strukturfunktionen F_1 , F_2 benutzt

$$F_1(x_B, Q^2) = Mc^2 W_1(Q^2, \nu) \quad (121)$$

$$F_2(x_B, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu) \quad (122)$$

benutzt.

6.3 Experimentelle Vermessung der Strukturfunktionen am MIT + SLAC, 1969

⇒ Nobelpreis 1996: Friedmann, Kendall, Taylor (Ergebnisse siehe Folien)

Man beobachtet nur eine sehr schwache Abhängigkeit der Strukturfunktion

von Q^2 im Gegensatz zu dem starken (Q^{-8}) Abfall, den man bei elastischer Streuung erwartet.

Dipolformfaktor:

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71^2(GeV/c^2)}\right)^{-2} \Rightarrow O(Q^{-4}) \quad (123)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \propto G^2(Q^2) \Rightarrow O(Q^{-8}) \quad (124)$$

$$(125)$$

Wenn die Strukturfunktion nicht von Q^2 abhängt, dann sollte man aufgrund obiger Diskussion des Formfaktors annehmen, dass man an punktförmigen Teilchen streut. Da das Proton ein ausgedehntes Objekt ist, heißt das, dass es eine Substruktur aus punktförmigen Teilchen (\rightarrow sogenannte Partonen) besitzt.

Heute identifiziert man die Partonen mit Quarks und Gluonen.

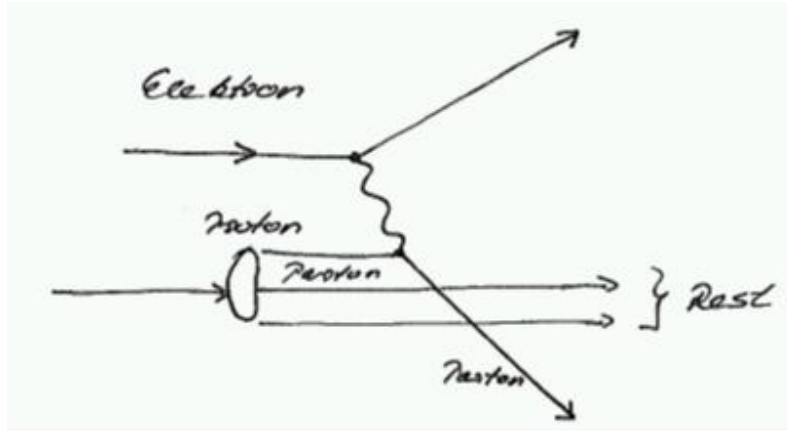
Interpretation der Ergebnisse im Parton Modell:

- Nukleonen bestehen aus punktförmigen quasifreien Konstituenten (mit Spin $1/2 \rightarrow$ siehe später)
- Elektronen streuen elastisch an den Konstituenten
- Gestreute Protonen verlassen das Proton und bilden Hadronen, die beobachtbar sind.

6.4 Infinite Momentum Frame (IMF)

IMF \equiv Bezugssystem, in dem Proton unendlich großen Impuls \vec{P} entlang der z-Achse hat. $P = (E/c, 0, 0, \vec{P})$

Das heißt das Proton kann als Strom freier parallel fliegender Partonen beschrieben werden. Parton-Parton Wechselwirkungen und transversale Impulskomponenten werden vernachlässigt



Parton Kinematik im IMF

$$P_p = x_p \cdot P \quad (126)$$

$$= x_p \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{P} \end{pmatrix} \quad (127)$$

$$(128)$$

x_p : Anteil des Partonimpulses am Protonimpuls

Elastische Streuung im IMF

$$(P_p + q)^2 = P_p'^2 = m_p^2 c^2 \approx 0 \quad (129)$$

$$(P_p + q)^2 = (x_p P + q)^2 \quad (130)$$

$$= x_p^2 P^2 + 2x_p Pq + q^2 \approx 0 \quad (131)$$

$$(132)$$

Die Partonmasse m_p ist vernachlässigbar für große q^2

$$P^2 = M^2 c^2 \quad (133)$$

$$Pq = \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu/c \\ \vec{p} - \vec{p}' \end{pmatrix} = M\nu \quad (134)$$

$$0 \approx \underbrace{x_p^2 M^2 c^2}_{\ll |q^2|} + 2x_p M\nu + q^2 \quad (135)$$

$$\Rightarrow x_p = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M\nu} \stackrel{!}{=} x_B \quad (136)$$

$$(137)$$

Interpretation

Inelastische Streuung am Proton mit einem Bjorken $x_B = \frac{Q^2}{2M\nu} =: x$ kann als elastische Streuung an einen Parton, das den Impulsanteil $x_p = x$ des Protonimpulses trägt, beschrieben werden.

Unter der Annahme, dass e^- elastisch mit dem Parton streut, kann man von außen den Impulsanteil x und damit die Impulsverteilung $f(x)$ der Partonen i messen:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx} \sim f_i(x) \quad (138)$$

Der Wirkungsquerschnitt für elastische e^- -Parton Streuung mit Anteil x des Protonimpulses wird für Stosspartner mit Spin=1/2 durch die Dirac-Formel beschrieben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Parton} = z_i^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + \frac{Q^2}{2m_p^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (139)$$

$$= z_i^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + \frac{Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (140)$$

dabei ist z_i die Ladung des Partons i .

Der Wirkungsquerschnitt für tiefinelastische Streuung ist die Summe über alle Partonen

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx}\right)_{Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \sum_i z_i^2 f_i(x) \left(1 + \frac{Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (141)$$

mit $f_i(x)dx =$ Wahrscheinlichkeit Parton i mit $x \in [x, x + dx]$ zu finden. Das kann mit der Gleichung 119, 121, 122 der inelastischen Streuung verglichen werden:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE' Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x, Q^2)}{\nu} + \frac{2F_1(x, Q^2)}{Mc^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \nu &= E - E' \\ d\nu &= -dE' \\ x &= \frac{Q^2}{2M\nu} \Rightarrow \nu = \frac{Q^2}{2Mx} \\ \frac{d}{d\nu} &= \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\nu} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{Q^2}{2M\nu^2}\right) = -\frac{x}{\nu} \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} &= \frac{\nu}{x} \frac{d}{dE'} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx}\right)_{Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x)}{x} + \frac{2F_1(x)\nu}{xMc^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (143)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x)}{x} + \frac{2F_1(x)Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (144)$$

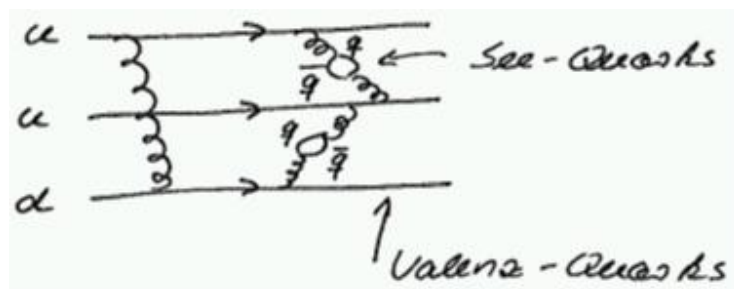
Wenn Partonen Spin 1/2 Teilchen sind, muss die inelastische Streuung mit der Dirac-Streuung identisch sein, d.h.:

$$2F_1(x) = \frac{F_2(x)}{x} = \sum_i z_i^2 f_i(x) \quad (145)$$

$$\Rightarrow 2xF_1(x) = F_2(x)$$

Diese Beziehung ist die Callen-Cross Beziehung. Sie wurde im Experiment getestet (siehe Folie). Daraus folgt, dass der Spin der Partonen $1/2$ ist!

Bisher haben wir das Proton als aus 3 Quarks aufgebaut angenommen. Jedoch aufgrund von Vakuumschwankungen gibt es Quark-Antiquark Paare, sogenannte See-Quarks.



$$\Rightarrow F_2(x) = x \sum_i z_i^2 (f_i^q(x) + f_i^{\bar{q}}(x))$$

Die Partonverteilung des Protons und Neutrons wurden durch eine Vielzahl von Streuexperimenten bestimmt: $e p$, μp , νp , woraus sich die Valenzquark wie auch die Seequark Verteilung extrahieren lässt. (siehe Folie)

Zusammenfassung der Information über den Aufbau von Protonen aus Streuexperimenten:

- Der mittlere Quadratische Radius des Protons is 0.97 fm.
- Das Proton besteht aus punktförmigen Teilchen, drei Valenzquarks und zusätzliche Seequarks und Gluonen
- Seequarks tragen in der Regel sehr kleines x
- Das Maximum der Valenzquarkverteilung liegt bei $x = 0.15, \dots, 0, 2$
- Der Impulsanteil des Protons $\int x f(x) dx$ der von Quarks getragen wird entspricht 50% des Protonimpulses. Die übrigen 50% des Protonimpulses werden von Gluonen getragen.