

## 4.9 Zusammenfassung

Die Tabelle zeigt ein Übersicht aller in diesem Kapitel diskutierten Quantenzahlen und in welchen Wechselwirkungen sie erhalten bzw. verletzt sind.

Größe	EM WW	starke WW	schwache WW
Isospin I	-	x	-
Baryonzahl $B$	x	x	x
Leptonzahl $L_{e/\mu/\tau}^*$	x	x	x
C	x	x	-
P	x	x	-
T	x	x	-
CP	x	x	-
CPT	x	x	x
Ladung Q	x	x	x
Flavourquantenzahlen			
U, D, C, S, B, T	x	x	-

\* Ausnahme Neutrinooszillation

x = ist erhalten      - = ist nicht erhalten

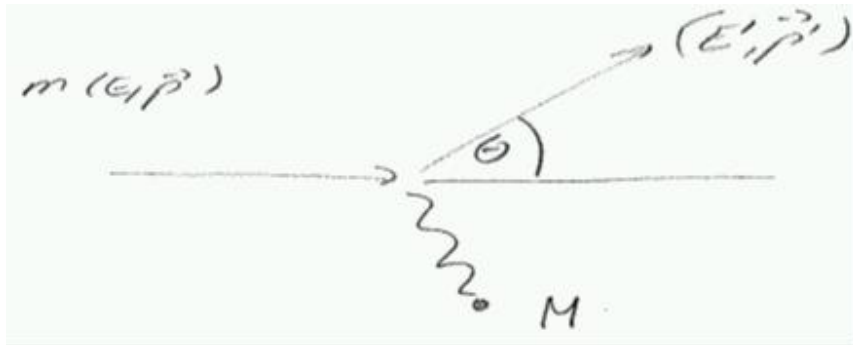
## 5 Streuung von Elektronen mit Kernen und Nukleonen

Elektron-Proton, Elektron-Neutron und Elektron-Kern Streuexperimente und ihre Interpretation sind der Schlüssel zum Verständnis der Struktur von Kernen und Nukleonen. Die Beschreibung der Streuung hängt von der Energie der einlaufenden Elektronen ab. Jenachdem ob die Energie ausreicht die Ausdehnung des Targets (Kern oder Nukleon) aufzulösen oder ob die Energie sogar ausreicht um das Target anzuregen oder aufzubrechen müssen unterschiedliche Effekte berücksichtigt werden.

### 5.1 Rutherford-Streuung

Die Rutherfordstreuung beschreibt den Stoss zweier **nicht relativistischer, punktförmiger, spinloser Teilchen**

Das Target kann als punktförmig betrachtet werden, wenn die deBroglie



Wellenlänge des einlaufenden Teilchens größer als der Durchmesser des Targets ist. Zudem wird angenommen, dass die Masse des einlaufenden Teilchens  $m$  wesentlich kleiner als die Masse des Targets  $M$  ist. D.h. der **Rückstoss des Targets** kann vernachlässigt werden, das Target wird als vor und nach dem Stoß in Ruhe betrachtet.

Die gestrichelten Größen  $\vec{p}'$  und  $E'$  bezeichnen die Größen des auslaufenden Teilchens nach dem Stoß. Wenn der Rückstoss vernachlässigt werden kann bedeutet das:

$$|\vec{p}| = |\vec{p}'| \Rightarrow E = E' \Rightarrow \frac{v}{c} = \beta = \beta' = \frac{v'}{c}$$

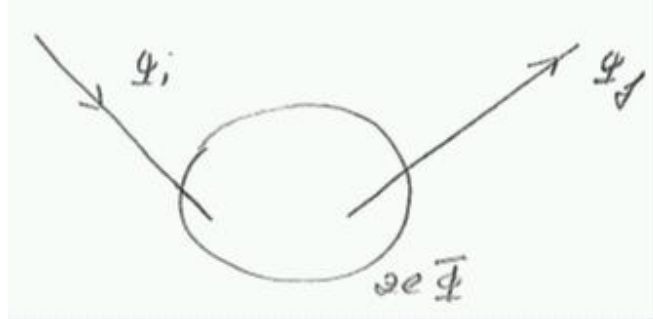
$$\Rightarrow q^2 = \underbrace{(E - E')^2}_{=0} - (\vec{p} - \vec{p}')^2 < 0$$

Man kann zeigen, dass für das Quadrat des 4er Impulsübertrags gilt:

$$q^2 = -4 |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta/2 \quad \Rightarrow \quad |q| = 2 |\vec{p}| \sin \theta/2$$

In diesem Fall (Vernachlässigung des Rückstoss) ist der 4er-Impulsübertrag gleich dem 3er-Impulsübertrag.

$$q^2 = \vec{q}^2$$



$\Phi$ : elektrisches Potential des Kerns  
 $ze$ : Ladung des einlaufenden Teilchens

Wenn das elektromagnetische Potential des Kerns  $V = ze\Phi$  lokalisiert ist (d.h.  $V(r) \rightarrow 0$  for  $r \rightarrow \infty$ ), was der Fall für die Coulomb Wechselwirkung ist, können die einlaufenden und auslaufenden Teilchen als freie Teilchen beschrieben werden. Bei der Behandlung nichtrelativistischer Probleme können die Teilchen durch die Wellenfunktion  $\Psi_i, \Psi_f$  (ebene Wellen) beschrieben werden und das Problem kann durch einen störungstheoretischer Ansatz (Born'sch Näherung) behandelt werden.

Fermi's goldene Regel:

$$\mathcal{A}_{fi} = \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle$$

$$\Psi_i = e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} \quad \Psi_f = e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = ze \int e^{-i\vec{q}\vec{x}/\hbar} \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (105)$$

$$= ze \int \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (106)$$

Einschub: Green's theorem:  $u, v$  sind skalare Felder die hinreichend stark abfallen zu den Rändern des Integrationsvolumens:

$$\int (u\Delta v - v\Delta u) d^3x = 0 \quad \text{mit } \Delta = \nabla^2$$

$$e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \Delta e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{ze\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \Phi(x) \Delta e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (107)$$

$$= -\frac{ze\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \Delta \Phi(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (108)$$

$$(109)$$

$$\Delta \Phi(x) = -\rho(x)^{12}$$

$\rho(x)$ : Ladungsverteilung im Target-Kern

$\rho(x) : Zef(x)$

$f(x)$ : normierte Ladungsverteilung  $\int f(x) d^3x = 1$ ,

$Z$  Ladung eines Target-Kerns

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{ze\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \rho(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (110)$$

$$= \frac{zeZe\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \underbrace{\int f(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x}_{F(\vec{q}): \text{Formfaktor}} \quad (111)$$

**Der Formfaktor  $F(\vec{q})$  ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung.**

Für Rutherford-Streuung wird das Target als punktförmig angenommen, d.h. die normierte Ladungsverteilung ist eine Delta-Funktion  $f(x) = \delta(x)$  und daher  $|F(\vec{q})| = 1$ .

Mit Gleichung 47, die den Phasenraumfaktor der Reaktion  $a + b \rightarrow 1 + 2$  behandelt <sup>13</sup> folgt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

<sup>12</sup> $E = -\nabla\Phi; \nabla E = -\Delta\Phi$ ; Maxwell:  $\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon}$ ;  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$  in HEP units  $\epsilon_0 = 1$ : im Vakuum  $\epsilon_r = 1 \rightarrow \Delta\Phi = -\rho$

<sup>13</sup>damals wurde der Stoss hochrelativistisch betrachtet, d.h.  $\beta = \beta' = 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{\vec{p}^2 c^2}{\beta^2} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \quad (112)$$

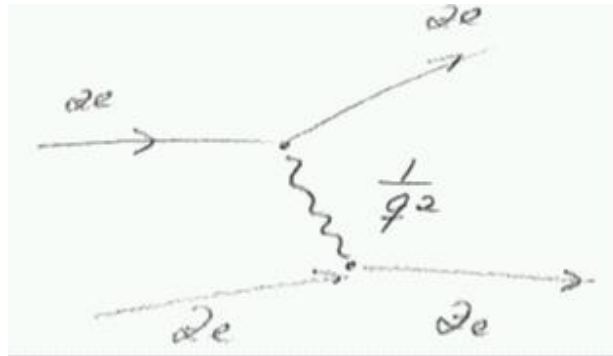
$$= \dots \quad (113)$$

$$= \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4 |\vec{p}^2| \beta^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \frac{(\hbar c)^2}{c^2} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} (E_{kin} &= 1/2 |\vec{p}| v = 1/2 |\vec{p}| \beta \cdot c) \\ &= \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} (\hbar c)^2 \end{aligned} \quad (115)$$

Zur Herleitung wurde nur ein elektrostatisches Potential benutzt, reine QED (ohne Berücksichtigung des Spins).

Vergleich mit der Amplitude aus dem Feynman-Diagramm



$$\mathcal{A} \sim \frac{zZe^2}{q^2} \rightarrow \mathcal{A}^2 \sim \frac{z^2 Z^2 e^4}{q^4}$$

$$\frac{1}{q^4} \sim \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad \text{Abhängigkeit kommt aus dem Propagator Term.}$$

### Nebenbemerkung: Das Rutherford-Experiment

Das Rutherford-Experiment war das erste Experiment in dem Rutherfordstreuung untersucht wurde.  $\alpha$ -Kerne (aus radioaktiven Präparaten) wurden

auf eine dünne (einlagige) Goldfolie geschossen.

$$\begin{aligned}
 q &= 2e & m &= 4 \text{ amu} \approx 4 \text{ GeV}/c^2 & E_{kin}(\alpha) &\sim 5 \text{ MeV} \\
 M_{Gold} &= 197 \text{ amu} \\
 v &= \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} = 0.05c & p &= 0.05c * 4\text{GeV}/c^2 = 200\text{MeV}/c \\
 \lambda &= \frac{197\text{MeV}\cdot\text{fm}/c}{200\text{MeV}/c} \sim 7\text{fm}
 \end{aligned}$$

d.h. die Bedingungen, dass der Stoss nichtrelativistisch beschrieben ( $E_{kin} \ll mc^2$ ) und der Rückstoss vernachlässigt werden kann ( $m \ll M$ ) trifft zu. Die deBroglie Wellenlänge ist gerade an der Grenze um eine Substruktur des Gold-Kerns aufzulösen. Zudem trägt das  $\alpha$  Teilchen keinen Spin.

Oft wird Rutherford-Streuung mit dem Rutherford-Experiment verwechselt, das ist aber nur ein Experiment, dass mit der Rutherford Streuung beschrieben werden kann.

Rutherford entdeckte dabei, dass das Atom nahezu leer ist (die meisten Teilchen gingen ungehindert durch) und nur wenige wurden hart an dem Kern gestreut.

## 5.2 Mott-Streuung

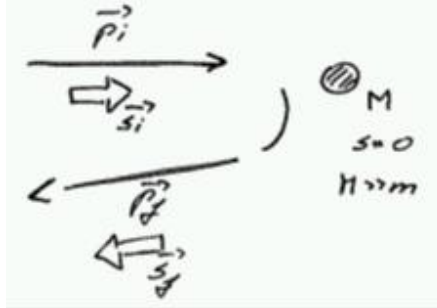
Viele Streuexperimente werden mit Elektronen durchgeführt. Elektronen tragen Spin  $S=1/2$ .

Für hochrelativistische Teilchen ( $\beta \rightarrow 1$ ) ist Helizität = Chiralität. Chiralität ist in der schwachen, der EM und der starken Wechselwirkung erhalten<sup>14</sup>.

Da es nicht gleichzeitig möglich ist Drehimpuls und Helizität zu erhalten ist die Streuung in Rückwärtsrichtung unterdrückt.

---

<sup>14</sup>Der Higgs Mechanismus bricht jedoch Chiralität



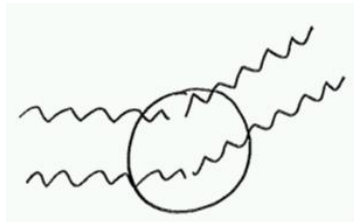
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Spin}} \cos^2 \theta/2 \quad \text{für } \beta = 1$$

Für  $\beta < 1$  ist die Helizität jedoch keine Erhaltungsgröße.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Spin}} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2)$$

Der Wirkungsquerschnitt ohne Spin  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Spin}}$  kann, wenn alle anderen Bedingungen erfüllt sind z.B. der Rutherford Wirkungsquerschnitt sein.

### 5.3 Streuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen



Es wird ein Korrekturfaktor (Formfaktor) benötigt, der die Phasendifferenz der Streuung an verschiedenen Punkten der Ladungsverteilung beschreibt (nicht relevant wenn  $\lambda \gg r_{\text{target}}$  ist)

Für den WQ der Streuung eines Teilchens an einer ausgedehnten Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  erhält man (siehe Gleichung 111):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ausgedehnt}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punktf.}} |F(\vec{q}^2)|^2$$

Bemerkung:

$|F(\vec{q}^2)| < 1$ , d.h. der Wirkungsquerschnitt an ausgedehnten Ladungsverteilungen ist immer kleiner als der punktförmige Wirkungsquerschnitt.

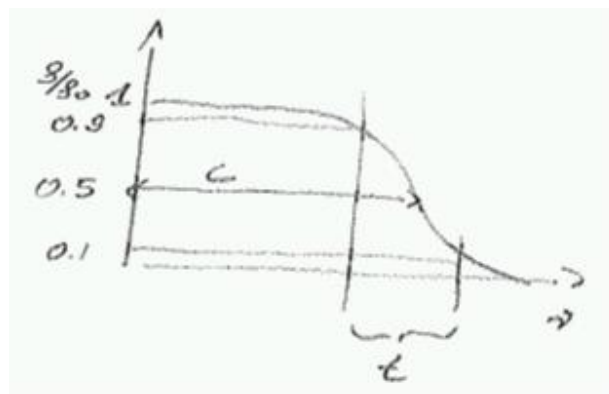
Für  $|\vec{q}| \rightarrow 0$  geht der Betrag des Formfaktors gegen 1. Das ist der Grenzfall der Streuung an punktförmigen Teilchen. Der Impuls  $\vec{q}$  ist zu klein, um die Struktur aufzulösen.

Aus  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{exp}$  lässt sich  $|F(\vec{q}^2)|^2$  bestimmen. Eine einfache Rücktransformation zur Ermittlung der Ladungsverteilung ist jedoch nicht möglich. Zum einen ist  $|F(\vec{q}^2)|^2$  nicht für alle  $\vec{q}^2$  gemessen. Für ausgedehnte Kerne fällt  $|F(\vec{q}^2)|^2$  für große  $\vec{q}^2$  stark ab, d.h. es bleibt sehr wenig Statistik um diesen Bereich zu vermessen. Zusätzlich wird im Experiment nur  $|F(\vec{q}^2)|^2$  gemessen und es fehlt die Information über die Phase.

Stattdessen werden Modellansätze zur Beschreibung der Ladungsverteilung entwickelt und die Fouriertransformierte der Modellansätze wird an Ladungsverteilung angepasst.

## 5.4 Ladungsverteilung von Kernen

Für eine Vielzahl von Kernen wurde die Ladungsverteilung bestimmt. Kerne werden gut durch Fermi-Verteilung beschrieben





Die radiale Ladungsverteilung ist beschrieben durch  $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+e^{r-c/a}}$ , mit  
 c: Halbdichtenradius  $c \approx (1.18A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$   
 A: Atommassenzahl  
 t: Oberflächendicke  $= 4 \ln 3 a = 4.4a$   
 $a \approx 0.545 \text{ fm}$

Für mittlere und große A findet man näherungsweise für den mittleren quadratischen Radius  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.94 A^{1/3} \text{ fm}$

Oft wird der Kern aber näherungsweise durch Kugel mit hartem Rand beschrieben für die  $\langle r^2 \rangle$  gegeben ist durch

$$\langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = \int_0^R r^2 \rho(r) dr = 4\pi \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3}}_{\text{Dichte homogene Kugel}} \int_0^R r^4 dr = 3/5 R^2$$

für  $\langle r^2 \rangle_{\text{hart}} \stackrel{!}{=} (0.94 A^{1/3} \text{ fm})^2$

$\Rightarrow R_{\text{hart}} = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$

Erwartungswert der harten Kugel soll gerade  $\langle r^2 \rangle$  für realen Kern mit weichem Rand entsprechen, daraus folgt die Definition für  $R_{\text{hart}}$ .

Für Nukleonendichte  $A/V = \rho_N$  findet man  $\rho_N = 0.17 \text{ Nukleonen/fm}^3$   
 d.h. die Dichte ist konstant und in erster Ordnung nicht abhängig von A oder anderen Eigenschaften des Kerns.

## 5.5 Struktur der Nukleonen

Bei  $e^-$ -Nukleon Streuexperimenten zur Untersuchung der Struktur der Nukleonen muss zusätzlich der Spin des Nukleon berücksichtigt werden. Die bewegte Ladung (einlaufendes  $e^-$ ) erzeugt ein B-Feld, das an den Spin des Nukleon koppelt.

Ausserdem ist die Ruheenergie (Masse) des Nukleons nicht mehr wesentlich größer als die kinetische Energie des Elektrons, d.h. der Rückstoss ist nicht vernachlässigbar.

### 5.5.1 Nukleonen Spin und magnetischer Moment

$$\vec{\mu} = g \cdot \mu_N \cdot \frac{\vec{s}}{\hbar}$$

$\vec{\mu}$ : magnetisches Moment

$\mu_N$ : Nukleon (oder Kern) Magneton  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$

(Das Bohr'sche Magneton des Elektrons ist  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.79 \cdot 10^{-11} \text{ MeV/T}$ )

$\vec{s}$ : Spin des Nukleons

$g$ : anomaler Lande-Faktor oder  $g$ -Faktor (gyromagnetischer Faktor)

$$\vec{\mu}_p = g_p \cdot \mu_N \cdot \frac{\vec{s}}{\hbar} = 2.79 \mu_N \text{ bzw. } g_p = 5.58$$

$$\vec{\mu}_n = g_n \cdot \mu_N \cdot \frac{\vec{s}}{\hbar} = -1.91 \mu_N \text{ bzw. } g_n = -3.82$$

Für punktförmige geladene Teilchen (z.B.  $e^-$ ) erwartet man  $g = 2 + \text{QED}$   
 Korrekturen =  $2 + \frac{\alpha}{\pi} + 0(\alpha^3)$



Für punktförmige neutrale Teilchen wird  $g = 0$  erwartet.

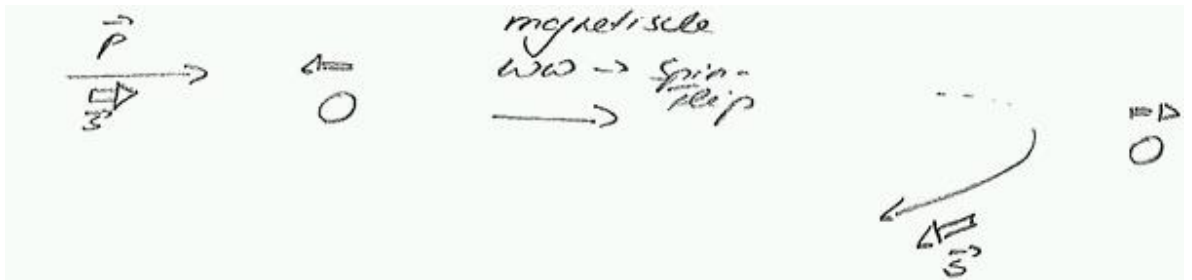
Nebenbemerkung:

$g_p \neq 2$  und  $g_n \neq 0$  ist bereits ein eindeutiger Hinweis auf Substruktur des Protons bzw. des Neutrons.

### 5.5.2 Elektron-Streuung an schweren "punktförmigen" Proton (Dirac-Teilchen)

Die Annahme punktförmige (d.h. unter anderem  $g_p = 2$ ) ist eine akademische Übung da ein reales Proton eine ausgedehnte Ladungsverteilung und wie oben diskutiert  $g_p \neq 2$  hat. Wir werden später alle Effekte zusammenbringen

um ein reales Proton zu beschreiben.



Durch Spin-Flip des Protons bleiben Helizität und Drehimpuls bei Rückwärtsstreuung gleichzeitig erhalten!

Für den Fall eines Spin-Flips des Protons ist die Rückwärtsstreuung bevorzugt und die Vorwärtsstreuung unterdrückt.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth}} \left( \underbrace{\cos^2 \theta/2}_{\text{Mott}(\beta \rightarrow 1)\text{el. WW}} + \underbrace{\frac{Q^2}{2m_p^2 c^2} \sin^2 \theta/2}_{\text{magn. WW}} \right)$$

Für elastische Streuung in der der Rückstoss vernachlässigt werden kann ist  $q^2 = -(\vec{p}_e - \vec{p}'_e)^2 < 0$ , deshalb führt man die Variable  $Q^2 = -q^2$  ein.

Da wir Dirac-Protonen behandeln, die das normale magnetische Moment  $\mu = \frac{e}{2m_p}$  haben, wobei  $m_p$  die Protonmasse ist, ist die Amplitude  $\mathcal{A} \propto \frac{1}{m_p}$  und entsprechend der Wirkungsquerschnitt proportional zu  $\frac{1}{m_p^2}$ . Wir sehen auch dass der Spin-Spin Wechselwirkungsterm mit  $Q^2$  steigt, d.h. entsprechend mit dem Abstand stark abfällt.

### 5.5.3 Streuquerschnitt mit Rückstoss

In Fällen in denen der Rückstoss nicht vernachlässigt werden kann wird der Wirkungsquerschnitt wie folgt modifiziert:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rückstoss}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Rückstoss}} \left(\frac{E'}{E}\right) \quad (116)$$

Da in diesem Fall  $E \neq E'$  ist entsprechend auch  $q^2 \neq \bar{q}^2$ . Das heisst es muss überall in dem Wirkungsquerschnitt der 3er-Impuls durch den 4er-Impuls ersetzt werden.

#### 5.5.4 Rosenbluth-Streuung

Jetzt werden alle Effekt zusammen gebracht um die Elektron-Streuung an ausgedehnten Spin=1/2 Nukleonen zu beschreiben. Das bedeutet es müssen zwei Formfaktoren  $G_E(Q^2)$  und  $G_M(Q^2)$  eingeführt werden, die die Verteilung der elektrischen Ladung und des magnetischen Moments berücksichtigen.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosenbluth}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left(\frac{E'}{E}\right) \left[ \underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}}_{A(Q^2)} + \underbrace{2\tau G_M^2(Q^2)}_{B(Q^2)} \tan^2 \theta/2 \right] \quad (117)$$

$$\tau = \frac{Q^2}{4m_p^2 c^2}$$

Da  $q$  ( $Q^2 = -q^2$ ) in diesem Fall der 4er Impuls ist, können die Formfaktoren  $G_E, G_M$  nicht mehr bzw. nur für kleine  $Q^2$  Werte als Fouriertransformierte der Verteilung der elektrischen Ladung bzw. des magnetischen Moments betrachtet werden.

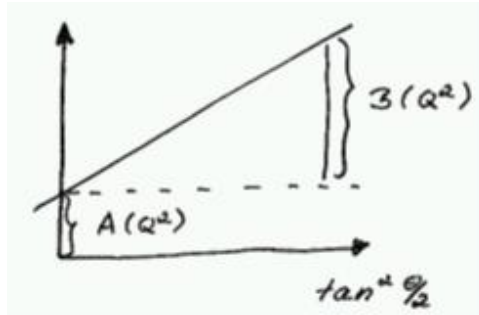
Verhalten für  $|Q| \rightarrow 0$

$$G_E^p(Q^2 = 0) = 1 \quad G_E^n(Q^2 = 0) = 0 \quad \underbrace{G_M^p(Q^2 = 0) = 2,79}_{\text{aus e-p-Streuung}} \quad \underbrace{G_M^n(Q^2 = 0) = -1,91}_{\text{aus e-n-Streuung}}$$

Verhalten für  $|Q| \rightarrow 0$  (dann auch  $\tau \rightarrow 0$ ) entspricht Streuung an punktförmigen p/n mit anomalem magnetischen Moment.

Um  $G_E(Q^2)$  und  $G_M(Q^2)$  getrennt zu messen, muss der WQ bei festem  $Q^2$  für verschiedene Streuwinkel, d. h. verschiedenen Elektronenenergien gemessen werden.

$$R = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosenbluth}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}\left(\frac{E'}{E}\right)} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \theta/2$$



Aus  $A(Q^2)$  und  $B(Q^2)$  folgt  $G_E(Q^2)$  und  $G_M(Q^2)$  bei einem festen  $Q^2$ .

Die Messung von  $G_E$  und  $G_M$  bei mehreren  $Q^2$  Werten ergibt folgende Ergebnisse:

$$1) G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2.79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{-1.91}$$

d. h. *elektrische* und *magnetische Ausdehnung* sind gleich ( $G_E^n$  vernachlässigbar)

2) Die Form der Verteilung wird durch die Dipolform beschrieben:

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71^2(\text{GeV}/c)^2}\right)^{-2}$$

Die Dipolform entspricht einer Ladungsverteilung, die exponentiell abfällt

$$\rho(r) = \rho(0)e^{-ar} \text{ mit } a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$$

3) Mittlerer quadratischer Radius aus Protonen/Neutronen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{Dipol}} = 0.81 \text{ fm}$$