4 Symmetrien

(siehe auch Diskussion in Mark Thomson, Modern Particle Physics)

Emmy-Noether-Theorem (1917):

Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße

Erinnerung an die quantenmechanische Definition einer Erhaltungsgröße:
Eine Observable ist Erhaltungsgröße, wenn für den zugehörigen Operator $\hat{O}$ gilt: [H, $\hat{O}$], d. h. H und $\hat{O}$ haben gemeinsame Eigenfunktionen

Wir werden im folgenden das Emmy-Noether Theorem formal diskutieren. Das sollte bereits aus der QM bekannt sein. Da wir aber später sehr analog argumentieren werden wenn, wir innere Symmetrien z.B. mit erhaltenen Quantenzahlen wie Ladung oder Farbladung verknüpfen, wiederholen wir den Formalismus an dieser Stelle.

Wir nehmen an eine physikalische Beobachtung sei invariant unter der Transformation U, das heißt U ist eine Symmetrietransformation.
Die Wellenfunktion Ψ wird unter U wie folgt transformiert:

$$\Psi(t,\vec{x}) \to \Psi'(t,\vec{x}) = U\Psi(t,\vec{x}) \tag{67}$$

Die Normierungsbedingung die für Ψ gilt muss auch für $\Psi^{'}$ gelten[9]:

$$\int \Psi^\dagger(t,\vec{x})\Psi(t,\vec{x})d^4x \;=\; 1 \tag{68}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \Psi^{'\dagger}(t,\vec{x})\Psi^{'}(t,\vec{x})d^4x \;=\; \int \Psi^\dagger(t,\vec{x})U^\dagger U\Psi(t,\vec{x})d^4x = 1 \tag{69}$$

$\Rightarrow \qquad U^\dagger U = 1 \qquad \Rightarrow$ U ist unitär!

$$\int \Psi(t,\vec{x})^\dagger H\Psi(t,\vec{x})d^4x \;=\; \int \Psi^{'\dagger}(t,\vec{x})H\Psi^{'}(t,\vec{x})d^4x \tag{70}$$

$$= \int \Psi^\dagger(t,\vec{x})U^\dagger HU\Psi(t,\vec{x})d^4x \tag{71}$$

[9] Das Integral $\int ...d^4x$ geht über alle vier Koordinaten des 4er Vektors, d.h. über Zeit und drei Raumkoordinaten.

Beim ersten Gleichheitszeichen wurde die Invarianz unter der Transformation U ausgenutzt.
Daraus folgt $H = U^\dagger H U$ und somit $[H, U] = 0$.

Wir betrachten eine infinitesimal kleine Transformation:

$$U = 1 + i\epsilon\hat{G} \tag{72}$$

Hierbei wir $\hat{G}$ Generator der Transformation genannt.

$U^\dagger U = (1 - i\epsilon\hat{G}^\dagger)(1 + i\epsilon\hat{G}) = 1 + i\epsilon(\hat{G} - \hat{G}^\dagger) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

Da die Gleichung für alle kleinen Werte von ϵ gilt, muss gelten:

$\hat{G} - \hat{G}^\dagger = 0 \quad \Rightarrow \hat{G} = \hat{G}^\dagger$

Daraus folgt, dass $\hat{G}$ hermitesch ist. Das bedeutet es gibt eine $\hat{G}$ zugeordnete Observable g.

$$[H, U] = 0 \Rightarrow [H, \hat{G}] = 0 \tag{73}$$

Die Observable g ist eine Erhaltungsgröße

Eine finite Transformation $\hat{G}$ kann als Serie von infinitesimal kleineren Transformationen $\frac{1}{n}\hat{G}$ dargestellt werden.

$U = lim_{n\to\infty} \left(1 + i\,\frac{1}{n}\,\hat{G}\right)^n = e^{i\,\hat{G}}$

Wir haben gezeigt, dass wenn eine physikalische Beobachtung invariant unter einer Transformation U ist, dann ist die Observable g die zu dem Generator $\hat{G}$ der Transformation gehört eine Erhaltungsgröße. Das ist genau (etwas formaler dargestellt) die Aussage des Emmy-Noether Theorems!

4.1 Emmy-Noether Theorem am Bespiel von Raum-Zeit Symmetrien

Nun wenden wir den oben eingeführten allgemeinen Formalismus auf das Beispiel einer räumliche Translation an.

$U\Psi(t,\vec{x}) = \Psi(t,\vec{x}+\Delta x)$ ist eine endliche Verschiebung in x Richtung[10]. Eine infinitesimal kleine Verschiebung um den Wert δx in x Richtung kann mit Hilfe einer Taylorentwicklung dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \Psi'(t,\vec{x}) &\sim \Psi(t,\vec{x}) + \delta x \frac{d}{dx}\Psi(t,\vec{x}) && (74) \\ &= \left(1 + \delta x \frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\right)\Psi(x,t) && (75) \end{aligned}$$

Hierbei wird die Ableitung nach x durch den Impulsoperator $\hat{p}_x = -i\,\hbar\frac{d}{dx}$ ausgedrückt.

Die endliche Verschiebung, um den Wert Δx kann entsprechend als eine Reihe von infinitesimal kleiner Verschiebungen $\delta x = \frac{1}{n}\Delta x$ dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \Psi^{'}(t,\vec{x}) = \Psi(t,\vec{x}+\Delta x) &= \lim_{n\to\infty}\left[(1 + \frac{\Delta x}{n}\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x)^n\right]\Psi(x,t) && (76) \\ &= e^{\left(\frac{i}{\hbar}\Delta x \hat{p}_x\right)}\Psi(t,\vec{x}) = U\Psi(t,\vec{x}) && (77) \end{aligned}$$

Aus der Invarianz unter Translation in x-Richtung und dem Emmy-Noether Theorem bzw. entsprechend der Argumentation in Eq. 67-73 folgt, dass die Observable, die zu dem Generator der Transformation U gehört eine Erhaltungsgröße ist. Das bedeutet die x-Komponente des Impulses p_x ist erhalten. ($[H,\hat{p_x}] = 0$). Aus einer Verschiebung in beliebige Richtung kann die Erhaltung des Impulses, $\vec{p}$ hergeleitet werden.

Analog kann man aus der Invarianz physikalischer Beobachtung unter Rotation des Koordinatensystems herleiten, dass der Drehmimpuls erhalten ist. Aus der Invarianz unter der Transformation in der Zeit folgt entsprechend die Erhaltung der Energie.

[10] Wir diskutieren hier der Einfachheit halber die Verschiebung in x-Richtung, eine Verschiebung in beliebige Richtung kann analog betrachtet werden.

4.2 Warum sind Symmetrien so interessant?

- Die Teilchenphysik ist auf der Suche nach der "Masterformel". Der zur Zeit vielversprechenste Ansatz des "Models of everything" ist das Standard Model, auch wenn es einige Fragen unbeantwortet läßt. Deshalb gibt es zahlreiche fundamentaleren Theorien, die versuchen diese Problem zu lösen. Bisher sind bereits viele experimentell ausgeschlossen aber noch jedoch keine experimentelle bestätigt worden. Die Masterformel beschreibt alle Symmetrien und Erhaltungsgrößen, d.h. entsprechend erhofft man sich aus dem Studium von Symmetrien und Erhaltungsgrößen Hinweise auf die potentielle Masterformel zu bekommen, bzw. kann potentielle Kandiaten einer Masterformel testen.

- Die Beschreibung von Wechselwirkungen in der Quantenfeldtheorie baut auf Symmetriegruppen (sogenannten Eichgruppen auf). Dieses Konzept wird in der Mastervorlesung Particle Physics und in der Standardmodell Vorlesung ausführlich diskutiert werden, geht aber über den Stoff dieser Vorlesung hinaus

- Das Studium von Symmetrien in der Teilchenphysik hat in der Vergangenheit bereits mehrfach entscheidende Hinweise auf physikalische Gesetzmässigkeiten geliefert. Zum Beispiel wurden in den 50 Jahren viele Teilchen beobachtet (Stichwort Teilchen-Zoo). Quarks waren zu dem Zeitpunkt noch unbekannt, so dass die Physiker anfiengen die beobachteten Teilchen nach ähnlichem ("symmetrischen") Verhalten zu sortiren (z. B. ähnliche Massen des Protons und des Neutrons, oder sehr ähnliche Massen der Pionen (π^+, π^0, π^-)). Daraus ergaben sich Erhaltungsgrößen wie der Isospin (siehe später).

4.3 Klassen von Symmetrien

Neben den oben diskutierten **Raum-Zeit-Symmetrien**, die zu Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung und Energieerhaltung führen gibt es auch sogenannte **inner Symmetrien**. Z.B eine Phasentransformation ist eine innere Symmetrie:

$$\Psi'(t, \vec{x}) = e^{i\phi}\Psi(t, \vec{x}) \tag{78}$$

Die Raum-Zeit Symmetrien und die Phasentransformation sind so-genannte **kontinuierliche Symmetrien**. D.h. wir können eine beliebig große Verschiebung in der Zeit oder dem Ort oder in der Phase betrachten. Kontinuierliche Symmetrien führen zu **additiven Erhaltungsgrößen**. Betrachten wir z.B. die Reaktion $a + b \rightarrow 1 + 2$ dann gilt Energieerhaltung, d.h.

$$E(a) + E(b) = E(1) + E(2) \tag{79}$$

bzw. Impulserhaltung

$$\vec{p}(a) + \vec{p}(b) = \vec{p}(a) + \vec{p}(2). \tag{80}$$

Die **Summe** der Energien im Anfangs- und Endzstand und die **Summe** der Impulse bleibt erhalten.

Daneben gibt es **diskrete Symmetrien**, die zu **multiplikativen Erhaltungsgrößen** führen. Das sind z.B.

- Raumspiegelung: $\Psi^{'}(t, \vec{x}) = \Psi(t, -\vec{x})$,
- Zeitumkehr: $\Psi^{'}(t, \vec{x}) = \Psi(-t, \vec{x})$ und
- Ladungskonjugation: $q \rightarrow -q$, aus Teilchen werden Antiteilchen und umgekehrt.

4.4 Innere Symmetrien

4.4.1 1-D Phasentransformation

$$\Psi^{'}(t, \vec{x}) = e^{i\rho}\Psi(t, \vec{x}) \tag{81}$$

Beobachtbare Größen sind immer mit dem Betragsquadrat der Wellenfunktion verbunden. D.h. die Physik ist invariant unter einer globalen ($\equiv$ von Raum und Zeit unabhängigen) Phasentransformation. Diese scheinbar sehr triviale Feststellung führt zu einer sehr fundamentalen Beobachtung, nämlich die Erhaltung von Ladung. Hier bedeutet "Ladung" nicht nur elektrische Ladung sondern generalisierte Ladung. Die elektrische Ladung bildet gemeinsam mit anderen simultan beobachtbaren Eigenschaften (z.B. Spin, Baryonennumber, Leptonenzahl, ...) einen Satz von Quantenzahlen, die den Teilchenzustand festlegen.

Der elektrische Ladungsoperator $\hat{Q}$ wird wie folgt definiert:

$$\hat{Q}\Psi(t,\vec{x}) = q\Psi(t,\vec{x}) \tag{82}$$

wobei q folgende Werte annimmt:
q = 1 für Teilchen mit einer negativen Elementarladung (z.B. Elektron)
q = -1 für Teilchen mit einer positiven Elementarladung (z.B. Positronen)

Analog zu Impulsoperator läßt sich auch mit $\hat{Q}$ einer Transformation U definieren

$$U \;=\; e^{-i\alpha\hat{Q}} \tag{83}$$

angewandt auf den Zustand $\Psi(t,\vec{x})$:

$$U\Psi(t,\vec{x}) = e^{-i\alpha\hat{Q}}\Psi(t,\vec{x}) = e^{-i\alpha q}\Psi(t,\vec{x}) \tag{84}$$

Kommutiert der Hamiltonoperator mit U:

$$i\hbar\frac{d}{dt}(e^{-i\alpha\hat{Q}}\Psi(t,\vec{x})) = e^{-i\alpha\hat{Q}}i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(t,\vec{x})) \tag{85}$$

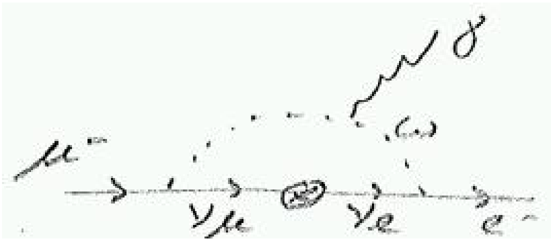
so ist die elektrische Ladung erhalten.
(Für den Beweis, dass die Erhaltung der elektrischen Ladung aus der Invarianz unter einer globalen Phasentransformation folgt siehe z.B. Mark Thomoson, Modern Particle Physics)

Analog zum Ladungsoperator können weitere verallgemeinerte Ladungen ($\equiv$ Quantenzahlen) eingeführt werden: Z.B. Leptonenzahloperator $\hat{L}$ und Baryonenzahloperator $\hat{B}$ was entsprechend zur Erhaltung der zugehörigen additiven Quantenzahlen führt.

Leptonenzahlerhaltung

Lepton-Flavour L_e, L_μ, L_τ
Lepton-Zahl $L = L_e + L_\mu + L_\tau$

Wenn man von Neutrinomischung ($\nu_i \rightarrow \nu_j$) absieht (die $m(\nu) \neq 0$ voraussetzt und nicht im Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben wird),



so sind experimentelle Befunde konsistent mit Annahme der Leptonflavourerhaltung.

Beispiel:

	μ^-	$\rightarrow$	e^-	$+$	$\bar{\nu}_e$	$+$	ν_μ
L_μ	+1		0		0		+1
L_e	0		+1		-1		0
L	+1				+1		

Die Leptonenzahl ist an allen Vertices aller Wechselwirkungen erhalten. Aufgrund der Existenz von Neutrinomischung kann es aber zu leptonenzahlverletzenden Prozessen kommen. Für den Zerfall $\mu^- \rightarrow e^-\gamma$ wird ein Verzweigungsverhältnis von ca. 10^{-53} vorhergesagt. Die experimentellen Schranken liegen derzeit bei 10^{-11}.

Baryonenzahlerhaltung

Die Baryonenzahl B ist definiert als:

$$B = \frac{n\,q - n\,\bar{q}}{3} \tag{86}$$

wobei q die Anzahl der Quarks und $\bar{q}$ die Anzahl der Antiquarks sind, die in einem Teilchen enthalten sind.
Baryonen: $p|uud>, n|udd>, \Lambda|uds>, \ldots \qquad \Rightarrow B = +1$
Antibaryonen: $\bar{p}|\bar{u}\bar{u}\bar{d}>, \bar{n}|\bar{u}\bar{d}\bar{d}>, \bar{\Lambda}|\bar{u}\bar{d}\bar{s}> \qquad \Rightarrow B = -1$

Viele Erweiterungen des Standardmodells sagen Baryonenzahlverletzung voraus, das SM selbst läßt keine Baryonenzahlverletzung zu.
Jedoch gab es beim Urknall die gleiche Anzahl von Baryonen und Antibary-

onen. In unserem heutigen Materie dominierten Universum beobachten wir aber einen Überschuss an Protonen + Neutronen (Materie). D.h. es muß Baryonenzahlverletzung geben!

Experimentell wird die Baryonenzahlerhaltung z. B. durch die Suche nach dem Protonzerfall getestet. Da das Proton das leichteste Baryon ist kann es nur unter Verletzung der Baryonzahlerhaltung zerfallen. Zum Beispiel:

$p \rightarrow \pi^0 + e^+$ (verletzt B und L)

Das derzeitige Limit auf diesen Zerfall ist $\tau(p) > 10^{32}$ Jahre

4.4.2 2-D Phasentransformation

Wiederholung: Spin für nicht relativistische Fermionen (z.B. e^-, Quarks)

2-D Spinor $\Psi(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Psi_0(t,\vec{x})$

Spin-Up Fermion: $\Psi(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Psi_0(t,\vec{x})$

Spin-Down Fermion: $\Psi(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Psi_0(t,\vec{x})$

Ohne äußeres B-Feld sind Spin-up und Spin-down Fermionen nicht unterscheidbar.

$\Rightarrow$ Invarianz unter Rotation (Phasentransformation) im Spin-Raum

$$\Psi(t,\vec{x}) \rightarrow \Psi'(t,\vec{x}) = U\Psi(t,\vec{x}) = U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Psi_0(t,\vec{x})$$

mit $U = e^{i\vec{\alpha}\vec{\sigma}}$,

wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ die Pauli-Matrizen sind.

Spin für zusammengesetzte Systeme am Beispiel Positronium (gebundener e^+e^- Zustand)

Gesamtspin: J = 1 Triplett

$$J_z = 1: \quad |\uparrow\uparrow> \tag{87}$$
$$J_z = 0: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> + |\downarrow\uparrow>) \tag{88}$$
$$J_z = -1: \quad |\downarrow\downarrow> \tag{89}$$

Gesamtspin: J=0 Singulett

$$J_z = 0: \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> - |\downarrow\uparrow>) \tag{90}$$

In der oben gegebenen Schreibweise bezeichnet der erste Pfeil die Spinorientierung (z-Komponente) des ersten Teilchens (Elektrons) und der zweite Pfeil die Spinorientierung des zweiten Teilchens (Positron). Alternativ werden Spinzustände auch mit $|J, J_z>$ bezeichnet. Die Triplettzustände sind symmetrisch gegen Vertauschung von Elektron und Positrion ($1 \leftrightarrow 2$).
Der Singulettzustand ist antisymmetrisch gegen Vertauschung.

Starker Iso-Spin

Der Starke Iso-Spin wurde von Heisenberg für Protonen und Neutronen eingeführt. Für die starke Wechselwirkungen erscheinen beide Teilchen als zwei verschiedene Zustände des gleichen Teilchens (Nukleon). Das Konzept macht nur Sinn, wenn die EM Wechselwirkung ignoriert wird und m(p) $\sim$ m(n) (was erfüllt ist).

$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ mit

$$p = |1/2, 1/2> \tag{91}$$
$$n = |1/2, -1/2> \tag{92}$$

In dieser Schreibweise bezeichnet die erste Komponente den gesamt Isospin I und die dritte Komponente, die z-Komponente des Isospins I_z. Das Proton und Neutron bilden ein Isospindoublett. Die Notation entspricht der des Spins, jedoch wird hier nicht der Spinraum sondern der Isospinraum betrachtet. Auch wenn die beiden Systeme mathematisch gleich behandelt werden, ist Isospin kein Drehimpuls sondern eine unabhängige Quantenzahl der Teilchen.
Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Rotation im Isospin-Raum, d.h. die starke WW erhält den Isospin.

Ähnlich zu dem Doublett (p, n) kann man die drei Pionen $\pi^+ = |u\bar{d}>$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}> + |d\bar{d}>\right)$ und $\pi^- = |u\bar{d}>$ als Isospin-Triplett auffassen.

$$\begin{aligned} \pi^+ &= |1,\, 1> && (93) \\ \pi^0 &= |1,\, 0> && (94) \\ \pi^- &= |1,\, -1> && (95) \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen muss es auch Singulett-Zustand geben: $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}> - |d\bar{d}>\right)$

Isospin für zusammengesetzte Systeme:

Triplett-Zustand $I = 1$:

$$\begin{aligned} I_3 = 1 &: |pp> && (96) \\ I_3 = 0 &: \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn> + |np>) && (97) \\ I_3 = -1 &: |nn> && (98) \end{aligned}$$

Singulett-Zustand $I = 0$:

$$I_3 = 0 : \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn> - |np>) \qquad (99)$$

(Im Gegensatz zum Spin/Drehimpuls redet man von der dritten Komponente I_3 und nicht von der z-Komponente).

Totale Wellenfunktion eines 2-Nukleonensystems:

$\Psi_{tot} = \Phi_{Raum} \cdot \alpha_{Spin} \cdot \chi_{isospin}$

Die Gesamtwellenfunktion ist das Produkt aller Wellenfunktionen, der für das Teilchen relevanten Quantenzahlen.
Nukleonen sind Fermionen, d.h. die Gesamtwellenfunktion eines 2-Nukleonensystems muss antisymmetrisch sein.

Deuteron d ist Kombination aus p und n, Spin J = 1, rel. Drehimpuls l = 0 (Grundzustand)

Φ_{Raum}: sym. wegen l = 0
α_{Spin}: sym. wegen J = 1
daraus folgt dass χ_{iso} antisymmetrisch sein muss $\rightarrow |I, I_z >= |0, 0>$

$\Rightarrow |d >= |I = 0, I_z = 0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|np> -|pn>)$

Isospinerhaltung der starken WW

Isospinerhaltung wird oft benutzt um Wechselwirkungsraten zu vergleichen.
z.B. die beiden Reaktionen $p + p \rightarrow d + \pi^+$ und $p + n \rightarrow d + \pi^0$:

		p	+	p	$\rightarrow$	d	+	π^+
(1)	I	1/2		1/2		0		1
	I_3	+1/2		+1/2		0		+1
		p	+	n	$\rightarrow$	d	+	π^0
SW (2)	I	1/2		1/2		0		1
	I_3	+1/2		-1/2		0		0

p + n können zu $|I = 1, I_3 = 0>$ oder zu $|I = 0, I_3 = 0>$ koppeln. Jedoch nur für I = 1 Zustand ist die Reaktion möglich. D.h. in 50% der Fälle koppeln p und n zu einem Isospinzustand der die Reaktion nicht erlaubt. D.h die Reaktion (2) ist nur halb so wahrscheinlich wie die Reaktion (1)[11].

Bemerkung:

- Isospin Symmetrie ist für EM WW nicht anwendbar q(p) $\neq$ q(n)

[11]Unter der richtigen Annahme, dass alle Isospinzustände gleich wahrscheinlich sind.

- Isospin ist in der schwachen WW verletzt (mehr dazu später in der Vorlesung)

- Das Konzept des starken Isospins stammt aus der Zeit in der Quarks noch nicht bekannt waren. Heute benutzt man statt dessen oft Quarkflavour-Quantenzahlen: U, D, C, S, T, B
  Diese QZ sind jeweils 1 für die entsprechend Quarks und -1 für die zugehörigen Antiquarks. Ein u Quark hat den Isospin $|1/2, 1/2>$ ein d Quark den Isospin $|1/2, -1/2>$ alle anderen Quarks haben keinen Isospin. Die starke + EM WW erhalten den Quarkflavour. Die schwache WW verletzt auch diese QZ.

4.5 Diskrete Transformationen (multiplikative QZ)

P: Raumspiegelung $\vec{x} \to -\vec{x}$
T: Zeitumkehr $t \to -t$
C: Ladungskonjugation $q \to -q$

4.5.1 Raumspiegelung

Die zweimalige Raumspieglung führt zur Identität.

$$P^2\Psi(t, \vec{x}) = \eta_p^2\Psi(t, \vec{x}) = \Psi(t, \vec{x}) \tag{100}$$

D.h. die Eigenwert des Paritätsoperators η_p können nur $\pm$ 1 sein

Beispiel EM Übergänge:

Das Problem wird beschrieben durch ein rotationssymmetrisches Potential, d.h. die Lösungen haben die Form $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y^{lm}(\theta, \varphi)$

Paritätstransformation:
$r \to r$
$\theta \to \theta + \pi$