

## 2.5 Phasenraum und Zustandsdichten

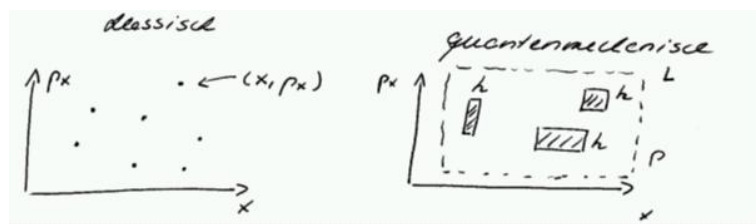
In Gleichung 28 haben wir die Übergangswahrscheinlichkeit,  $\omega_{fi}$  pro Zeit definiert als

$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \rho(E_f). \quad (35)$$

Die Initialen  $i$ ,  $f$  stehen für initial und final state. Die Übergangsamplitude  $\mathcal{A}_{fi}$  wird mittels Feynman-Diagrammen ausgerechnet. In diesem Kapitel geht es um die Zustandsdichte  $\rho(E_f) = \frac{dN}{dE_f}$  im Endzustand.

Um Teilchenzustände zu beschreiben, muss Ort und Impuls (Punkt im Phasenraum) angegeben werden.

Beispiel in 1D:



Aufgrund der Unschärferelation wird ein Zustand durch eine Zelle mit Volumen  $h$  beschrieben. Wieviel Zustände paßen in ein Phasenraumvolumen  $L \times p$ ? Die Form der Zelle spielt dabei keine Rolle.

$$N = \frac{L \cdot p}{h} = \frac{L \cdot p}{2\pi\hbar}$$

Wenn wir das Problem auf drei Dimensionen erweitern erhalten wir für die Anzahl der Zustände in einer Zelle mit dem Volumen  $V$  und Impuls  $\int dp_x dp_y dp_z = \int p^2 dp d\Omega$ , mit  $p = |\vec{p}|$ :

$$N = \frac{V \int p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}$$

$V$  ist ein Normierungsvolumen. Wir haben in Gleichung 27 bereits ein Normierungsvolumen eingeführt und damals darauf hingewiesen, dass es sich später rauskürzt und es deshalb auf 1 gesetzt. Hier ist nun ein weiteres Volumen; beide kürzen sich mit der Normierung der Wellenfunktion (1 Teilchen pro Volumen), die in der Übergangsamplitude steckt. d.h. wir setzen der

Einfachheit halber auch hier das Volumen auf eins.

### 2.5.1 Zustandsdichte im 1-Teilchen Endzustand

Für ein 1-Teilchen Endzustand ist die gesammte Energie im Endzustand, die Energie des Teilchens:  $E_f = E_1$

$$\rho(E_1) = \frac{dN}{dE_1} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE_1} \int \int p_1^2 dp_1 d\Omega_1 \quad (36)$$

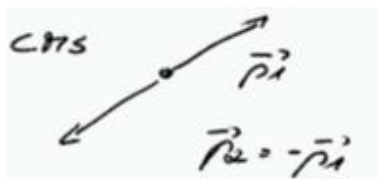
Mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung:  $E_1^2 = p_1^2 c^2 + m^2 c^4$  folgt:

$$2 E_1 dE_1 = 2 p_1 dp_1 c^2 \quad (37)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dE_1} = \frac{E_1}{p_1 c^2} \frac{d}{dp_1} \quad (38)$$

$$\rho(E_1) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1}{p_1 c^2} p_1^2 \int d\Omega_1 \quad (39)$$

### 2.5.2 Zustandsdichte im 2-Teilchen Endzustand



Rechnung im Schwerpunktsystem (CMS):

$$E_f = E_1 + E_2 \quad (40)$$

$$dE_f = dE_1 + dE_2 \quad (41)$$

$$= \frac{p_1 c^2}{E_1} dp_1 + \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2 \quad (42)$$

Im Schwerpunktssystem gilt  $p_1^2 = p_2^2 \rightarrow p_1 dp_1 = p_2 dp_2$

$$dE_f = \left( \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) c^2 p_1 dp_1 \quad (43)$$

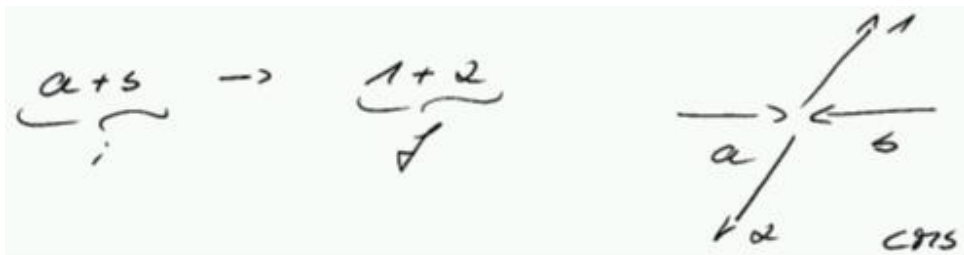
$$\Rightarrow \rho(E_f) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{1}{c^2} p_1 \int d\Omega_1 \quad (44)$$

### 2.5.3 Zustandsdichte im n-Teilchen Endzustand

Aufgrund von Energie und Impulserhaltung ist wenn die Gesamtenergie des Endzustands  $E_f$  gegeben ist, und der Impuls und die Energie von  $n - 1$  Teilchen festgelegt ist auch der Impuls des n-ten Teilchens gegeben. Deshalb geht das Integral immer nur über  $n - 1$  Impulse.

$$\rho(E_f) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE_f} \int dp_1^3 \cdot \dots \cdot dp_{n-1}^3 \quad (45)$$

## 2.6 Wirkungsquerschnitt



$$\sigma = \frac{w_{fi}}{v_i}$$

$v_i$  = Geschwindigkeit a  $\rightarrow$  b (b in Ruhe)

$$w_{fi} = \int \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1}_{\text{Phasenraum}} d\Omega_1$$

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts werden einige Näherungen eingeführt.

1)  $v_i = c$  hochrelativistisch

2)  $m_i \ll E_i/c^2 \rightarrow E_i \sim p_i c, \quad i=1,2$

3) CMS:  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \rightarrow E_1 + E_2 = 2 p_1 c; \quad E_1 E_2 = p_1^2 c^2$

Die Definition des Wirkungsquerschnitts und insbesondere des einlaufenden Fluss wurde in einer Fix-Target Konfiguration eingeführt, d.h. nicht im Schwerpunktsystem. Hingegen benutzten wir für den Rest der Rechnung die Beschreibung im Schwerpunktsystem. Deshalb muss der Flußfaktor für die Berechnungen im Schwerpunktsystem relativ zur fixed Target Konfiguration korrigiert werden, was einen zusätzlichen Faktor 2 bringt. Dadurch ergibt sich als differentieller Wirkungsquerschnitt eines Stosses ( $a + b \rightarrow 1 + 2$ )

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = 2 \times \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^3} \frac{p_1^2 c^2}{2p_1 c} p_1 |\mathcal{A}_{fi}|^2 \quad (46)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} p_1^2 c^2 |\mathcal{A}_{fi}|^2 \quad (47)$$

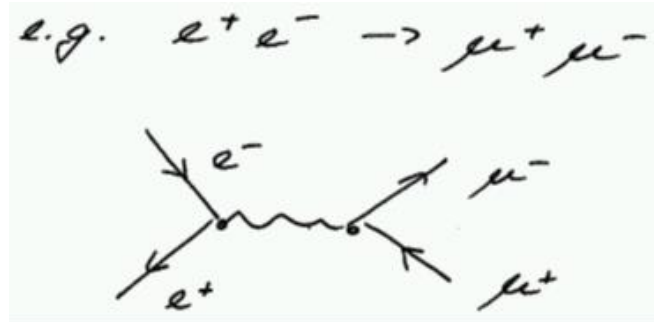
Nebenbemerkung:

Ein Wirkungsquerschnitt ist eine lorentzinvariante Größe. Jedoch sind die beiden einzelnen Komponenten Übergangsamplitude und Phasenraumfaktor, so wie wir sie definiert haben nicht LI. Ein LI Maß für den Phasenraum ist z.B.  $\frac{d^3p}{2E}$ . Entsprechend wird ein Faktor  $\sqrt{2E}$  in der Normierung der Wellenfunktion absorbiert. Die so transformierte LI Übergangsamplitude wird Matrixelement  $M_{fi}$  genannt.

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{1}{(E_a + E_b)^2} \int |M_{fi}|^2 d\Omega_1 \quad (48)$$

Ein differentieller Wirkungsquerschnitt ist keine LI Größe, da ein Raumwinkelelement nicht LI ist.

## 2.7 $e^+e^-$ Annihilation



$$\mathcal{A}_{fi} \sim \sqrt{\alpha} \frac{1}{q^2} \sqrt{\alpha} \quad q^2 = E_{CMS}^2$$

Für das oben gegebene Feynman-Diagramm entspricht  $q^2$  dem Quadrat der Schwerpunktsenergie  $E_{CMS}^2$ .

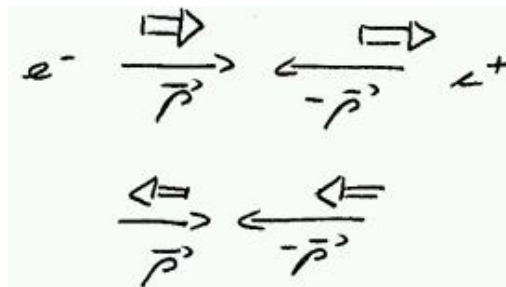
Es gibt verschiedene mögliche Spineinstellungen der Elektronen und Myonen. Da der Spin der Elektronen und Myonen meßbar ist, sind diese Prozesse unterscheidbar. D.h. es treten keine Interferenzeffekte auf. Wenn wir aber die Übergangsamplitude für  $e^- + e^+$  unabhängig der Spineinstellung ausrechnen wollen (z.B. im Experiment mit nicht polarisierten Elektron- und Positron-Strahlen) müssen wir über die Quadrate der Amplituden aller erlaubten Spin-Kombinationen im Anfangs- und Endzustand summieren.

Der Spin eines Fermions ist  $1/2$ , der des Photons  $1$ . d.h. nur Konfiguration im Anfangszustand mit Gesamtspin  $S = 1$  sind erlaubt<sup>7</sup>.

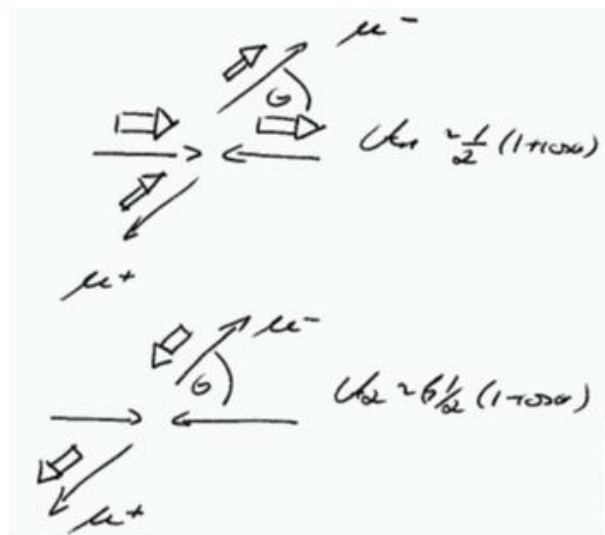
---

<sup>7</sup>Wir rechnen an dieser Stelle mit masselosen Teilchen im Endzustand, d.h.  $v = c$ , d.h. die Orientierung des Spins relativ zum Impuls ist nicht abhängig vom Bezugssystem

Erlaubte Konfigurationen:



Analog im Endzustand



Nur zwei der vier möglichen Spinkonfigurationen im Anfangszustand sind erlaubt, dennoch muss über all vier möglichen Spineinstellungen im Anfangszustand gemittelt werden. Für beide erlaubten Anfangskonfigurationen gibt es zwei mögliche Endkonfigurationen, die ebenfalls nicht interferieren  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 \propto (\frac{1}{2}(1 + \cos \theta))^2 + (\frac{1}{2}(1 - \cos \theta))^2$ .

$$\overline{|\mathcal{A}_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{spin=1}^4 |\mathcal{A}_{fi}|_{spin}^2 \quad (49)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos^2\theta) \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} (\hbar c)^6 \quad (50)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{E_{CMS}^2}{4} \underbrace{\frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} (\hbar c)^6 \frac{1}{4} (1 + \cos^2\theta)}_{\overline{|\mathcal{A}_{if}|^2}} \quad (51)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{E_{CMS}^2} (1 + \cos^2\theta) (\hbar c)^2 \quad (52)$$

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \frac{1}{E_{CMS}^2} (\hbar c)^2 \quad (53)$$

$$= \frac{87nb}{E_{CMS}^2 [GeV^2]} \quad (54)$$

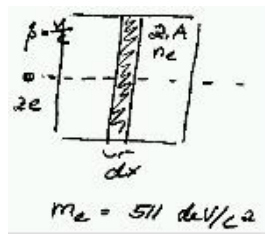
Der berechnete Wirkungsquerschnitt stimmt exakt mit den gemessenen Werten in einem großen  $E_{CMS}^2 = q^2$  Bereich überein.

## 3 Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

### 3.1 Energieverlust schwerer geladener Teilchen durch Ionisation

Unter "schweren geladenen" Teilchen versteht man hier alle geladenen Teilchen außer Elektronen und Positronen. Elektronen und Positronen verlieren zwar auch über den unten beschriebenen Mechanismus Energie, aber es ist für sie nicht der dominante Mechanismus.

Die Teilchen verlieren über Streuung durch EM Wechselwirkung Energie. Die Elektronen des Mediums werden in höhere Schalen angeregt oder aus den Atomen gelöst (Ionisation). Genaue Berechnung (unter Berücksichtigung aller QM-Effekte) ist sehr schwierig. Der mittlere Energieverlust  $-dE$  pro Wegstrecke  $dx$  wird durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben.



$$\frac{-dE}{dx} = \left( \rho \cdot N_A \cdot \frac{Z}{A} \right) \frac{4\pi \cdot z^2 \cdot e^4}{m_e \cdot c^2 \cdot \beta^2} \left( \ln \frac{2 \cdot m_e \cdot c^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2}{I} - \beta^2 \right) \quad (55)$$

$m_e$ : Elektronenmasse

$z$ : Elementarladung des einlaufenden Teilchens

$Z$ : Kernladungszahl des Mediums

$A$ : Atommassenzahl des Mediums

$\rho$ : Dichte des Mediums

$\beta \cdot \gamma$ : relativistische Faktoren des einlaufenden Teilchens

$N_A$ : Avogadrokonstante

$n_e = \rho \cdot N_A \cdot \frac{Z}{A}$ : Elektronendichte im Medium

$I$ : mittleres Ionisationspotential des Mediums für Elektronen  
(für  $Z > 20$  :  $I \approx Z \cdot 10$  eV)

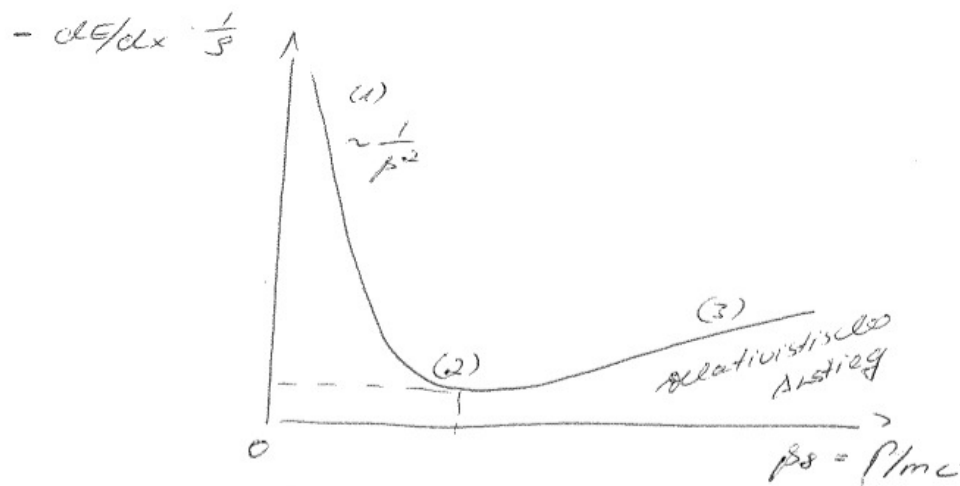


Die Größe  $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx}$  hat eine geringere Materialabhängigkeit.

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx} = K \cdot \frac{Z}{A} \cdot z^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \left( \ln \frac{2 \cdot m_e^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2}{I} - \beta^2 \right) \quad (56)$$

$$K = 0.307 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$$

Charakteristische Kurve:

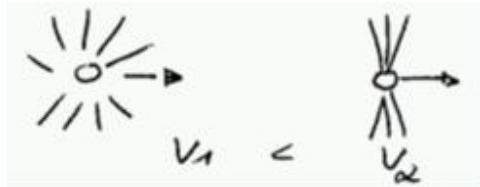


(1) Bei kleinen  $(\beta \cdot \gamma)$ :  $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx} \sim \frac{1}{\beta^2}$   
Starke Ionisation durch langsame Teilchen

(2) Minimum für  $\beta \cdot \gamma = p/mc \approx 3 - 4$

$$\left( -\frac{1}{\rho} \cdot dE dx \right)_{min} \approx 1 - 2 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}}$$

(3) Relativistischer Anstieg für große  $\beta\gamma$  Werte



Durch Lorentzkontraktion nimmt die transversale E-Feld Komponente der bewegten Ladung zu, d.h. das Medium sieht effektiv eine höhere Ladung. Der relativistische Anstieg ist aber ein sehr kleiner Effekt. In 1. Näherung können Teilchen mit  $\beta\gamma > 3$  als MIP (minimal ionising particle) betrachtet werden.

Die empirische Bethe-Bloch Formel beschreibt Energieverlust im Bereich  $\beta\gamma$  in  $[0.1, -\infty]$  auf  $\pm 5\%$  genau.