

FWHM: full width at half maximum

Hinweis: Wenn eine gemessene Verteilung betrachtet wird, muss man aufpassen, ob die beobachtete Breite ein Effekt der limitierten Detektorauflösung ist oder die natürliche Linienbreite erkennbar ist (siehe auch Folien).

2.3 Theoretische Beschreibung von Streuprozessen

Wir haben den Wirkungsquerschnitt durch eine experimentelle Messvorschrift eingeführt:

$$\sigma = \frac{\dot{N}_s}{\Phi \cdot N_t}, \quad (26)$$

wobei \dot{N}_s die Rate der gestreuten Teilchen, Φ der einlaufende Fluss und N_t die Anzahl der Target-Teilchen ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ω hängt wie folgt mit dem Wirkungs-

querschnitt zusammen:

$$\omega = \frac{\dot{N}_s}{N_i N_t} = \frac{\sigma \cdot \Phi \cdot N_t}{N_i \cdot N_t} = \frac{n_i \cdot v_i \cdot \sigma}{n_i \cdot V} = \frac{v_i \cdot \sigma}{V}$$

v_i ist dabei die Geschwindigkeit der einlaufenden Teilchen ist und n_i die Teilchendichte im einlaufenden Strahl.

Das Normierungsvolumen V fällt wie wir später in der Rechnung sehen werden heraus, so dass wir es gleich an dieser Stelle auf 1 setzten.

Die Theoretische Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit und damit auch des Wirkungsquerschnitts ergibt sich aus Fermis Goldener Regel:

$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (27)$$

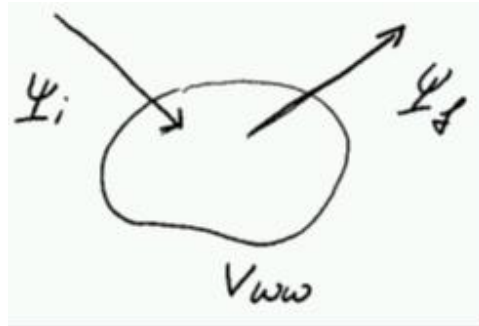
Hierbei ist $\mathcal{A}_{fi} = \mathcal{A}(i \rightarrow f)$ die **Übergangsamplitude** vom Anfangszustand (initial) zum Endzustand (final), die mittels Feynman-Diagrammen berechnet werden und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand. Die Übergangsamplitude beschreibt die “Physik des Prozesses”, die Zustandsdichte die “Kinematik”.

2.4 Feynman-Diagramme

Eine korrekte Einführung von Feynman-Diagrammen ist schwierig und erst in der Quantenfeld-Theorie möglich. Feynman-Graphen veranschaulichen Rechenregeln für die Berechnung von Übergangsamplituden. Auch ohne die Graphen vollständig berechnen zu können, geben sie eine gute Illustration der betrachteten Prozesse und ein Verständnis über die Dynamik eines Prozesses. Sie sind als “Piktogramme” ein wichtiges Werkzeug in der Teilchenphysik.

Betrachten wir z.B. den Streuprozesses $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Wie können wir die zugehörige Übergangsamplitude ausrechnen?

Übergangsamplituden sind bereits aus PEP-4 bekannt z.B. zur Beschreibung atomarer Übergänge. Vereinfacht wurde da beschrieben:



Dabei sind Ψ_i, Ψ_f Eigenfunktionen zu $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Die Wellenfunktion für freie Teilchen ist gegeben durch $\Psi = \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\frac{E}{\hbar}t}$ mit $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$. Der Hamiltonian des Systems ist gegeben durch:

$$H = H_0 + H_{WW} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{WW}$$

wobei $H_{WW} \ll H^0$, d.h. das Problem kann störungstechnisch behandelt werden.

In dem Fall gilt (Herleitung siehe z.B. Halzen + Martin):

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \mathcal{A}_{fi} = \langle \Psi_f | V_{WW} | \Psi_i \rangle = \int \int \Psi_f^* V_{WW} \Psi_i dx dt$$

Der Ansatz ist gültig für **nichtrelativistische** Problemstellungen, in denen der **Teilcheninhalt erhalten** bleibt.

Beide Voraussetzungen sind nicht in der Teilchenphysik erfüllt.

- (1) Teilchen vernichten sich und neue Teilchen entstehen (z.B. $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$).
- (2) Die an den Prozessen beteiligten Teilchen sind in der Regel hoch relativistisch.

Ein Ausweg zu Problem (1) bietet die Quantenfeldtheorie (QFT):

Die skalare Funktion $\Psi(\vec{x})$ wird durch einen Operator ersetzt, der Teilchen

mit Impuls \vec{k} erzeugen und vernichten kann.

Um Problem (2) korrekt zu behandeln muss die relativistische Energie-Impulsbeziehung betrachtet werden:

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ E_+ &= +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \equiv +E \\ E_- &= -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \equiv -E \end{aligned}$$

Zu den beiden Energieeigenwerten, gehören unterschiedliche Wellenfunktionen:

$$\Psi_+ = \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\frac{E}{\hbar}t} \quad (28)$$

$$\Psi_- = \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i(-\frac{E}{\hbar})t} \quad (29)$$

$$= \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\frac{E}{\hbar}(-t)} \quad (30)$$

Ein Teilchen mit negativer Energie kann interpretiert werden als Teilchen mit positiver Energie, das sich rückwärts in der Zeit bewegt.

Betrachten wir den elektromagnetischen 4-er Strom $j = q \cdot p = q \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

Für Elektronen bzw. Positronen gilt für die Ladung q :

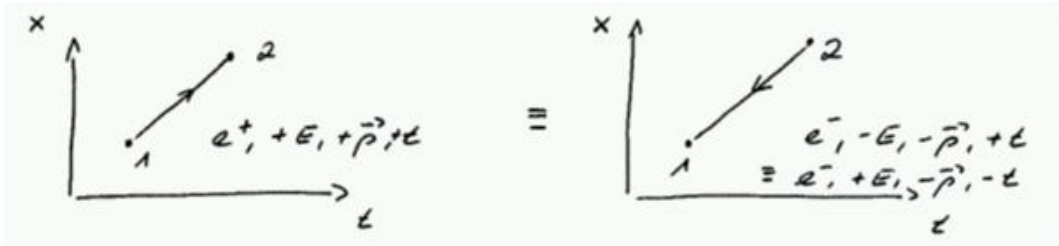
$$q(e^-) = +1 \quad q(e^+) = -1$$

$$j(e^-, E, \vec{p}) = q(e^-) p = +1 \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -\frac{E}{c} \\ -\vec{p} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$= j(e^+, -E, -\vec{p}) \quad (32)$$

(Zur Schreibweise: $j(e^-, E, \vec{p})$ bedeutet, der EM 4er-Strom eines e^- mit Energie E und Impuls \vec{p}).

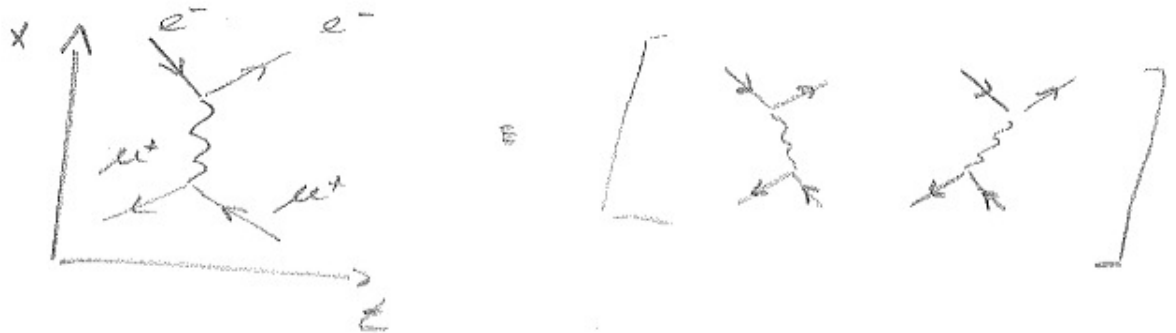
Aus der Gleichung (29,30) und (31,32) folgt dass „mathematisch“ (= in der Behandlung von Feynman-Diagrammen) ein Antiteilchen, das sich in positive x und t Richtung bewegt, identisch zu dem zugehörigen Teilchen ist, das sich in negative x und t Richtung bewegt!



2.4.1 Feynman-Diagramme in der QED (Quantenelektrodynamik)

(QED ist die QFT der EM Wechselwirkung)

Beispiel: $e^- + \mu^+ \rightarrow e^- + \mu^+$



Die Richtung der Orts- und Zeitachse ist eine Frage der Konvention. In dieser Vorlesung geht die Zeitachse von links nach rechts und die Ortsachse von unten nach oben.

Der Prozess in dem zunächst das Elektron ein Photon aussendet, das dann von dem Anti-muon absorbiert wird ist ununterscheidbar von dem Prozess in dem zunächst das Anti-muon ein Photon aussendet, das dann von dem Elektron absorbiert wird. Zur korrekten Berechnung der Übergangsamplitude des gesamten Prozesses müssen beide Diagramme berechnet werden. Das Diagramm mit vertikaler Photon-Linie bedeutet die Summe aus den beiden einzelnen Diagrammen.

Feynman-Regeln:

- 1) Fermionen (Quarks und Leptonen) werden mit Pfeilen in positive Zeitrichtung, Antifermionen (Anti-Quarks und Anti-Leptonen) mit Pfeilen in negative Zeitrichtung gezeichnet.
- 2) Das Austauscheteilchen der EM Wechselwirkung ist das Photon.
- 3) In der QED gibt es nur einen erlaubten Vertex: Ein Photon koppelt an eine Fermionenlinie. Der Vertex kann beliebig gedreht werden.



Die Stärke der Kopplung ist proportional zur elektrischen Ladung des beteiligten Fermions.

Die Feinstrukturkonstante α ist definiert als:

$$\alpha = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot \epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot e^2 \sim \frac{1}{137} \quad (33)$$

wobei e die Elementarladung ist. Die Feinstrukturkonstante ist die Kopplungskonstante der EM Wechselwirkung.

4) An jedem Vertex gilt:

- Impulserhaltung
- Energieerhaltung
- Leptonenzahlerhaltung und Erhaltung des Quarkflavours⁶

⁶Es gibt Elektronleptonzahl L_e , Muonleptonzahl L_μ und Tauleptonzahl L_τ . Es gilt $L_e(e^-) = L_e(\nu_e) = 1$; $L_e(e^+) = L_e(\bar{\nu}_e) = -1$ und analog für die beiden anderen Leptonenfamilien. Elektronleptonzahlerhaltung bedeutet, dass die Summe aller Elektronleptonzahlen der Teilchen, die in einen Vertex hineingehen, die gleiche ist wie die, die der Teilchen die aus einem Vertex hinausgehen. Wieder gilt das gleiche analog für die Muonleptonzahlerhaltung und die Tauleptonzahlerhaltung. Der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrien wird in einer späteren Vorlesung diskutiert. Jedes Quark hat einen eigenen Quarkflavour und der Wert der zugehörigen Quarkflavourzahl ist +1. Die zugehörige Antiquark haben entsprechend eine Quarkflavourzahl von -1. Leptonzahl

- ▶ Fermionstromerhaltung
- ▶ Erhaltung der elektrischen Ladung

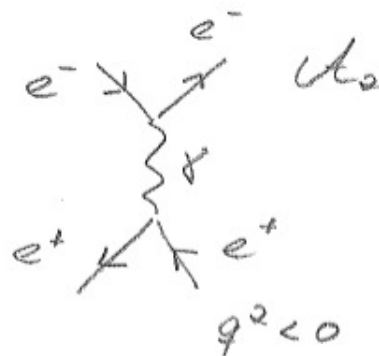
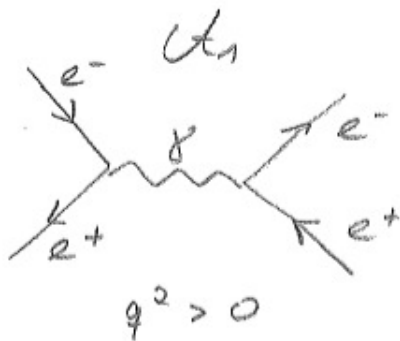
5) Innere Linien (mit Anfangs- und Endvertex) sind virtuelle Teilchen, d.h. es gilt in der Regel nicht die relativistische Energie-Impuls-Beziehung freier Teilchen (freies Photon $m^2c^4 = 0 = E^2 - p^2c^2$; virtuelles Photon $E^2 - p^2c^2 \neq 0$).

6) Äußere Linien (= reale Teilchen) erfüllen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Beispiel: $e^+ + e^+ \rightarrow e^- + e^-$

raumartiges virtuelles Photon

zeitartiges virtuelles Photon



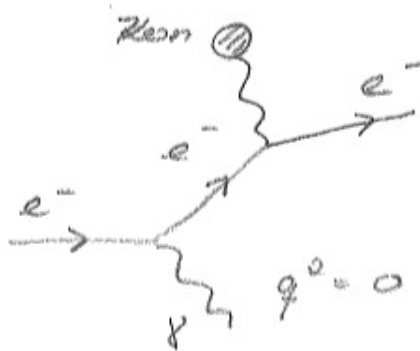
Mit q^2 wird das Quadrat des 4er-Impulsübertrags auf das Photon (allgemein auf das Austauscheteilchen) bezeichnet. Für reale Teilchen ist das Quadrat des 4er-Impulses die invariante Masse $\cdot c^2$, d.h. im Fall des Photons 0.

$$q^2 = (E/c, \vec{p})^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = (\vec{p}^2 + m^2c^4)/c^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 = 0$$

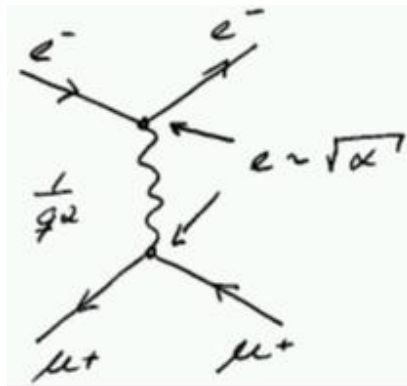
Ein Beispiel für ein reales Photon ist die Abstrahlung eines Photons (z.B.

und Quarkflavourerhaltung bedeutet dass Quarks und Leptonen immer nur in Teilchen-Antiteilchen Paaren erzeugt und vernichtet werden können.

Bremsstrahlung). Dies ist nur in der Nähe eines Kerns möglich, der den Rückstoßimpuls des Elektrons aufnehmen kann, da sonst nicht gleichzeitig Energie und Impuls erhalten bleiben kann (siehe Übungsaufgabe).



2.4.2 Berechnung von Übergangsamplituden aus Feynman-Graphen



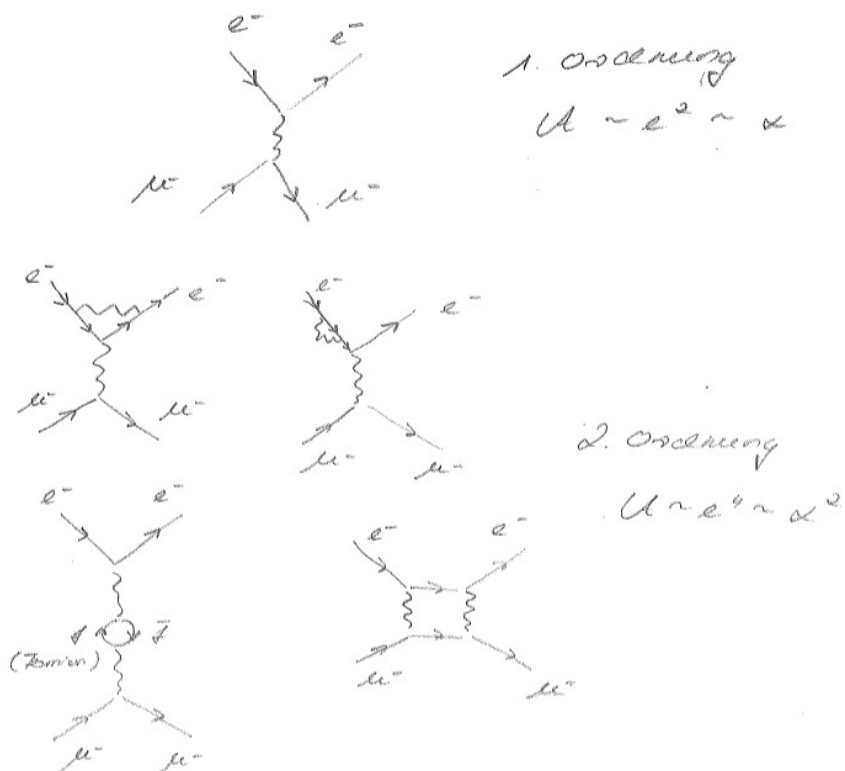
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e^- + \mu^+ \rightarrow e^- + \mu^+) &\propto \frac{\text{Vertexkopplung} \cdot \text{Vertexkopplung}}{q^2 \text{ des Austauschteilchens}} \\ &= \sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Jedes Feynman-Diagramm, das die Regeln einhält, entspricht einem physikalischen Prozess und muss bei der Berechnung berücksichtigt werden. Die Amplituden aller von außen ununterscheidbaren Prozesse werden aufsummiert.

z.B. gibt es zwei Beiträge zu dem Prozess $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ (siehe oben). Die beobachtete Meßgröße ist $\propto |\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2$. Man erwartet also auch Beiträge von Interferenztermen.

2.4.3 Feynman-Graphen höherer Ordnung

Beispiel: $\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$



Da $\alpha \sim \frac{1}{137}$ signifikant kleiner als 1 ist, haben in der QED Diagramme höherer Ordnung kaum Einfluss.

Zur Sprechweise: Ein Diagramm erster Ordnung ist ein Diagramm mit der kleinst möglichen Anzahl (n) an Vertices. Ein Diagramm zweiter Ordnung hat

(n+1) Vertices etc.

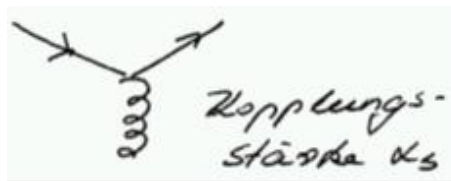
2.4.4 Feynman-Graphen für QCD (Quantenchromodynamik)

QCD ist die QFT der starken Wechselwirkung.

Austauschteilchen: masselose Gluonen

Gluonen koppeln an alle Teilchen die Farbladung tragen, d.h. an Quarks und Antiquarks aber nicht an Leptonen.

Fundamentaler Vertex:



Es gelten die selben Erhaltungssätze an jedem Vertex wie in der QED.

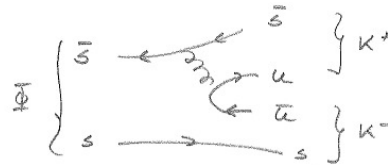
Die Kopplungsstärke α_s der starken WW ist stark energieabhängig!
Für $\alpha_s > 1$ sind höhere Ordnung, Diagramme nicht vernachlässigbar

Der Propagatorterm ist analog zur QED gegeben durch $\frac{1}{q^2}$, wobei q^2 das 4er-Impulsquadrat des Austauschteilchens (Gluons) ist.

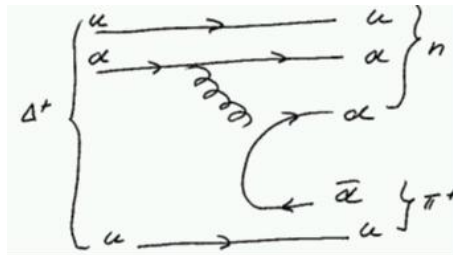
Die Berechnung der Amplitude eines Feynmandiagramms der QCD erfolgt analog zur Berechnung in der QED.

Beispiele für Zerfälle der starken Wechselwirkung:

$$\Phi |s\bar{s}\rangle \rightarrow K^+ |u\bar{s}\rangle + K^- |\bar{u}s\rangle$$



$$\Delta^+ |uud\rangle \rightarrow n |udd\rangle + \pi^+ |u\bar{d}\rangle$$



Eine Besonderheit der starken WW ist, dass die Austauscheteilchen (Gluonen) selbst Farbladung tragen. Das heißt Gluone wechselwirken miteinander. Deshalb gibt es neben dem fundamentalen Vertex noch zwei weitere erlaubte Vertices, die aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht weiter diskutiert werden.



2.4.5 Feynman-Diagramme der schwachen Wechselwirkung

Die Feynman-Diagramme der schwachen Wechselwirkungen sind komplexer und werden zu einem späteren Zeitpunkt in der Vorlesung diskutiert.