

konnte. Higgs und Englert haben für ihre Vorhersage 2013 den Physiknobelpreis bekommen. Auch wenn das Standardmodell, das vor über 40 Jahren eingeführt wurde, seitdem jedem Test in Laborexperimenten Stand hält, kann die Theorie nicht vollständig sein. Es gibt fundamentale Fragen, die das Standardmodell nicht beantworten kann, wie z.B. die Ursache des Materieüberschusses im Universum, die Gravitation oder den Ursprung der dunklen Materie, deren Existenz in cosmologischen Messungen eindeutig festgestellt wurde.

2 Beschreibung von Streuprozessen und Zerfallsraten

2.1 Streuprozesse

Wir unterscheiden drei Arten von Streuprozessen.

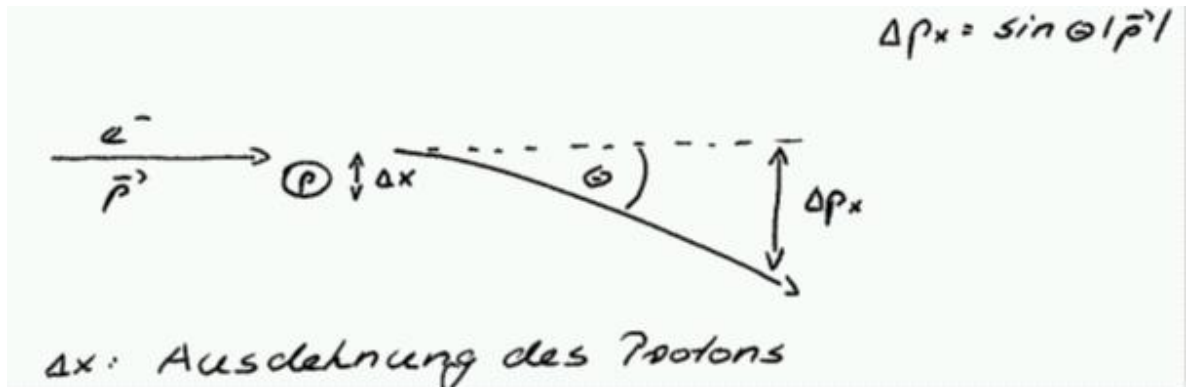
1) **elastische Streuung** z.B. $e^- + p \rightarrow e^- + p$

Bei elastischen Streuungen bleiben die Stoßpartner vor und nach der Streuung erhalten.

Eine Substruktur Δx kann aufgelöst werden, wenn die deBroglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ in der selben Größenordnung ist.

Ausdehnung des Protons $\Delta x \sim 1 fm$, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 197 MeV/c fm$
 $\rightarrow |\vec{p}| \sim 1.2 GeV/c$.

Um in Streuprozessen Informationen über die Struktur des Protons zu erlangen, muss der Impuls der einfallenden Teilchen mindestens $1.2 GeV/c$ sein.



(im Ruhesystem des Protons)

2) **inelastische Streuung**, z.B. $e^- + p \rightarrow e^- + p^*$

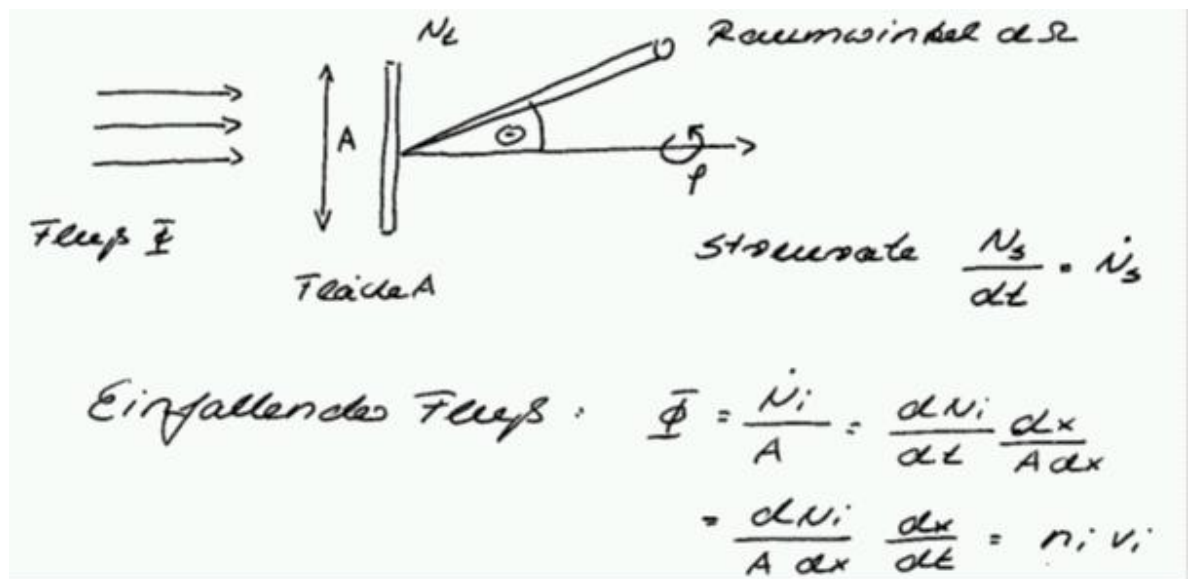
Teilchen, die eine Substruktur haben, können angeregt werden. Die angeregten Zustände haben einen höheren Spin aufgrund von Relativbewegungen ihrer Konstituenten. Damit steigt die Masse des angeregten Zustandes relativ zum Grundzustand. Ein Beispiel für einen angeregten Zustand des Protons ist das $\Delta(1232)$ (Die Zahl in der Klammer bezeichnet die Masse des Teilchens $m(\Delta(1232) = 1232 \text{ MeV}/c^2$). Es hat genauso wie das Proton den Quarkinhalt $|uud\rangle$. Der Spin des Protons ist allerdings $S=1/2$ (kleinst möglicher Spin, den man aus drei Quarks, die jeweils $S=1/2$ haben kombinieren kann), wohingegen das $\Delta(1232)$ einen Spin von $3/2$ hat. Dass man angeregten Zuständen einen eigenen Namen gibt und nicht einfach als p^* bezeichnet, liegt an dem großen relativen Massenzuwachs eines $\Delta(1232)$ relativ zum Proton. Es gibt noch viele weitere Δ -Teilchen mit höherem Spin. Inelastische Streuung bedeutet, dass mindestens eines der Anfangsprodukte in der Kollision angeregt wird.

3) **tief inelastische Streuung**: z.B. $e^- + p \rightarrow X + Y$

In der tief inelastischen $e^- + p$ Streuung bricht das Proton auf und es entstehen mehrere neue Teilchen.

2.1.1 Wirkungsquerschnitt eines Prozesses

Der Wirkungsquerschnitt ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen Stoßpartnern



Φ : einfallender Teilchenfluß; Einheit: $\frac{1}{s m^2}$

\dot{N}_i : Rate der auf die Fläche A einfallenden Teilchen; Einheit: $\frac{1}{s}$

n_i : Teilchendichte im Strahl; Einheit: $\frac{1}{m^3}$

v_i : Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen; Einheit: $\frac{m}{s}$

N_t : Anzahl der Teilchen im Target

N_s : Anzahl der gestreuten Teilchen

\dot{N}_s : Streurrate; Einheit: $[\frac{1}{s}]$

Rate der in das Raumwinkelelement $d\Omega(\varphi, \theta)$ gestreuten Teilchen:

$$d\dot{N}_s(\varphi, \theta) = C \cdot \Phi \cdot N_t \cdot d\Omega(\varphi, \theta) \quad (8)$$

Die Proportionalitätskonstante C wird als differentieller Wirkungsquerschnitt definiert.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\varphi, \theta) = C = \frac{d\dot{N}_s(\varphi, \theta)}{\Phi \cdot N_t \cdot d\Omega(\varphi, \theta)} \quad (9)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} ist definiert als das Raumwinkelintegral über den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \frac{\dot{N}_s}{\Phi \cdot N_t} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (10)$$

Die Dimension des Wirkungsquerschnitts ist Rate/(Rate/Fläche) = Fläche.

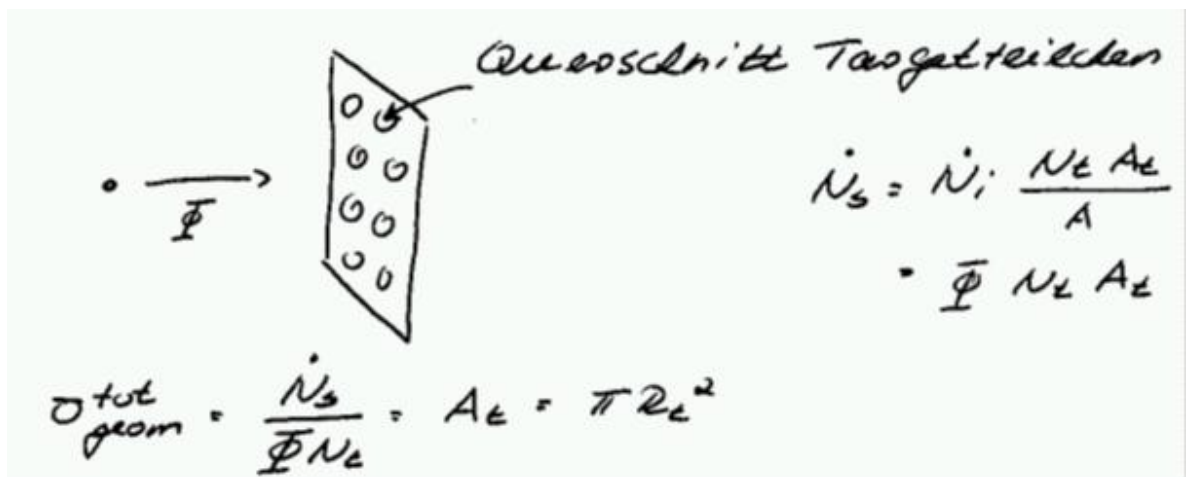
Typische Einheit für den Wirkungsquerschnitt in der Teilchenphysik:

1 barn \equiv 1b = 10^{-28} m² (Barn bedeutet auf englisch Scheunentor)

2.1.2 Geometrischer Wirkungsquerschnitt

Den Zusammenhang einer Wechselwirkungsrate und einer Fläche kann man sich veranschaulichen, wenn man den geometrischen Wirkungsquerschnitt betrachtet. Das heisst, wir gehen davon aus, dass Teilchen harte Kugeln sind, die nur miteinander wechselwirken, wenn sie sich berühren - eine Art Billard.

Beispiel 1: Ein punktförmiges Probe-Teilchen wird auf ein dünnes Target (nur eine Atomlage) geschossen.

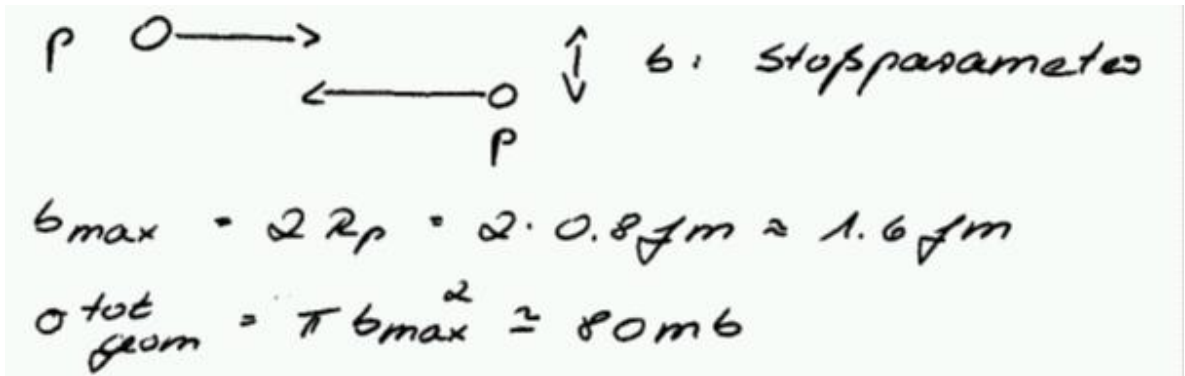


R_t : Radius der Target-Teilchen

A_t : Querschnittsfläche eines Target-Teilchens

In diesem Beispiel entspricht der totale Wirkungsquerschnitt dem geometrischen Querschnitt eines Streuzentrums - umso größer der geometrische Querschnitt, umso größer die Rate der gestreuten Teilchen.

Beispiel 2: Ein Proton wird auf ein Proton geschossen



$$N_t = N_i = 1$$

R_p : Radius des Protons

b_{max} : maximaler Abstand, so dass sich die Protonen gerade noch berühren

Der experimentell gemessene Wirkungsquerschnitt ist die Summe aus elastischem und inelastischem Wirkungsquerschnitt.

Die Wirkungsquerschnitte sind energieabhängig, umso größer die Energie, umso näher kommen sich die beiden Teilchen und umso größer ist die Wahrscheinlichkeit für eine Wechselwirkung. Die gemessenen Werte sind:

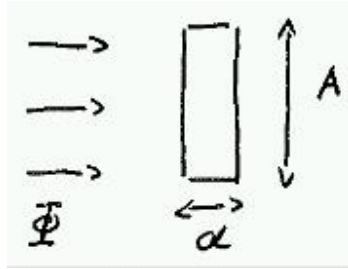
$$\sigma_{pp} (E_{CME} = 10 \text{ GeV}) \simeq 40 \text{ mb}$$

$$\sigma_{pp} (E_{CME} = 1 \text{ TeV}) \simeq 80 \text{ mb}$$

Der geometrische Wirkungsquerschnitt gibt in diesem Fall eine gute Abschätzung für den wahren Wirkungsquerschnitt. Das liegt daran, dass die geometrische Fläche des Protons der effektiven Fläche der Streuung (Reichweite der Kraft, die für die Streuung verantwortlich ist) entspricht. Die effektive Streufläche hängt von der Art und Energie der Teilchen ab und stimmt in der Regel nicht mit der geometrischen Fläche überein. Dennoch ist sich eine effektive Fläche vorzustellen, eine anschauliche Möglichkeit zu verstehen, dass der Wirkungsquerschnitt, der ein Maß für die Streuwahrscheinlichkeit

ist, die Dimension Fläche hat.

2.1.3 Freie Weglänge und Strahlabschwächung



Wir betrachten ein dickes Target der Dicke d . Wir können das als viele Lagen dünner Targets mit der Dicke dx behandeln. Die Anzahl der einlaufenden Teilchen in jeder Lage reduziert sich um die Anzahl der gestreuten Teilchen in der vorherigen Lage.

Anzahl aller Targetteilchen in einer Lage der Dicke dx :

$$N_t = n_t A dx = \frac{\rho N_A}{m_{mol}} A dx \quad (11)$$

n_t : Targetdichte

ρ : Dichte

N_A : Avogadrozahl

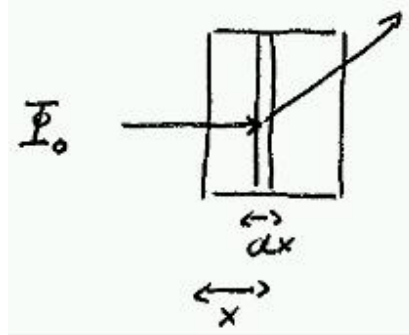
m_{mol} : Molmasse

Streurrate in einer Lage dx an der Stelle x :

$$\dot{N}_s(x) = \Phi(x) \cdot N_t \cdot \sigma = \frac{\dot{N}_i(x)}{A} \cdot n_t \cdot A \cdot dx \cdot \sigma = \dot{N}_i(x) \cdot n_t \cdot dx \cdot \sigma \quad (12)$$

Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für Streuung nach Strecke x in Abschnitt dx :

$$P(x) = \frac{\dot{N}_s(x)}{\dot{N}_i(x)} = n_t \cdot \sigma \cdot dx \quad (13)$$



Schwächung des einlaufenden Flusses:

$$-d\Phi(x) = \Phi(x) \cdot n_t \cdot \sigma \cdot dx \rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 e^{-x(n_t \cdot \sigma)} = \Phi_0 e^{-x/\lambda},$$

wobei $\lambda = \frac{1}{n_t \cdot \sigma}$ die mittlere freie Weglänge des Projektils im Target ist. Der Teilchenfluß, das heisst die Anzahl der Teilchen im Strahl, nimmt exponentiell ab.

Beispielaufgabe 1:

Ein Strahl Protonen wird auf ein Kohlenstoff C^{12} target geschossen. Wie dick muss das Target sein, damit 50% der Teilchen das Target ohne Ablenkung durchqueren?

$$\rho = 2.265 \text{ g/cm}^3; N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}; m_{mol} = 12 \text{ g/mol}; \sigma = 210 \text{ mb}$$

$$\begin{aligned} n_t &= \rho \cdot N_A / m_{mol} = 1.1 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3} \\ \lambda &= (n_t \cdot \sigma)^{-1} \sim 42 \text{ cm} \\ e^{-d/\lambda} &= 0.5 \rightarrow \mathbf{d \sim 29 \text{ cm}} \end{aligned}$$

Beispielaufgabe 2:

Der Wirkungsquerschnitt der Streuung von zwei Protonen bei einer Schwerpunktsenergie von 10 GeV ist $\sigma_{pp}(10 \text{ GeV}) \sim 40 \text{ mb}$. Der Querschnitt des einfallenden Strahls Protonen ist $100 \mu\text{m}^2$. Der Strahl trifft auf ein

ruhendes Target von 10.000 Protonen. Die Energie der einfallenden Protonen ist so gewählt, dass die Schwerpunktsenergie der Kollision 10 GeV beträgt. Wieviele Teilchen müssen pro Sekunde eingeschossen werden damit 1 Teilchen pro Sekunde gestreut wird.

$$\begin{aligned} \dot{N}_s &= 1s^{-1}; \quad N_t = 10.000; \quad A = 10^{-10}m^2; \quad \sigma = 40mb = 4 \cdot 10^{-30}m^2 \\ \sigma &= \frac{\dot{N}_s}{\phi \cdot N_t} = \frac{\dot{N}_s \cdot A}{\dot{N}_i \cdot N_t}; \\ \rightarrow \dot{N}_i &= \frac{\dot{N}_s \cdot A}{N_t \cdot \sigma} = 2.5 \cdot 10^{15}s^{-1} \end{aligned}$$

2.2 Zerfallsgesetz und Zerfallsbreite von Teilchen

Das radioaktive Zerfallsgesetz ist exponentiell:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}, \quad (14)$$

wobei N_0 , die Anzahl der Teilchen zum Zeitpunkt $t=0$ ist und τ die mittlere Lebensdauer des Teilchens. Die mittlere Lebensdauer τ hängt mit der Halbwertszeit $T_{1/2}$ wie folgt zusammen:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 \quad (15)$$

Wie sieht die Wellenfunktion für instabile Teilchen aus? Wir betrachten zunächst die Wellenfunktion $\Psi(t)$ für stabile Teilchen. Wir sind im Eigen-system des Teilchens, d.h. das Teilchen ist in Ruhe, m ist seine Ruhemasse und $E_0 = mc^2$ seine Energie:

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} = \Psi_0 e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \quad (16)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einem Zeitpunkt t irgendwo im Raum zu finden, ist gegeben durch:

$$P(t) \propto |\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 \quad (17)$$

D.h. sie ist konstant, das Teilchen zerfällt nicht ⁵.

Um das radioaktive Zerfallsgesetz $P(t) \propto e^{-t/\tau}$ für ein instabiles Teilchen zu erhalten, muss die Wellenfunktion entsprechend modifiziert werden:

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t - \frac{t}{2\tau}} \quad (18)$$

$$= \Psi_0 e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} \text{ mit } E_0 = mc^2 - \frac{i\hbar}{2\tau} = mc^2 - i \frac{\Gamma}{2} \quad (19)$$

$$(20)$$

wobei $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$ die Zerfallsbreite des Teilchens ist.

Die Energieverteilung des Teilchens ist durch die Fouriertransformation der zeitabhängigen Wellenfunktion gegeben.

$$\tilde{\Psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(t) e^{i \frac{E}{\hbar} t} dt \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi_0 e^{i \frac{E}{\hbar} t - i \frac{mc^2}{\hbar} t - \frac{\Gamma}{2\hbar} t} dt \quad (22)$$

$$= \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hbar}{i(E - mc^2) - \Gamma/2} \quad (23)$$

$$\tilde{P}(E) \propto \left| \tilde{\Psi}(E) \right|^2 = \frac{\Psi_0^2}{2\pi} \frac{\hbar^2}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \quad (24)$$

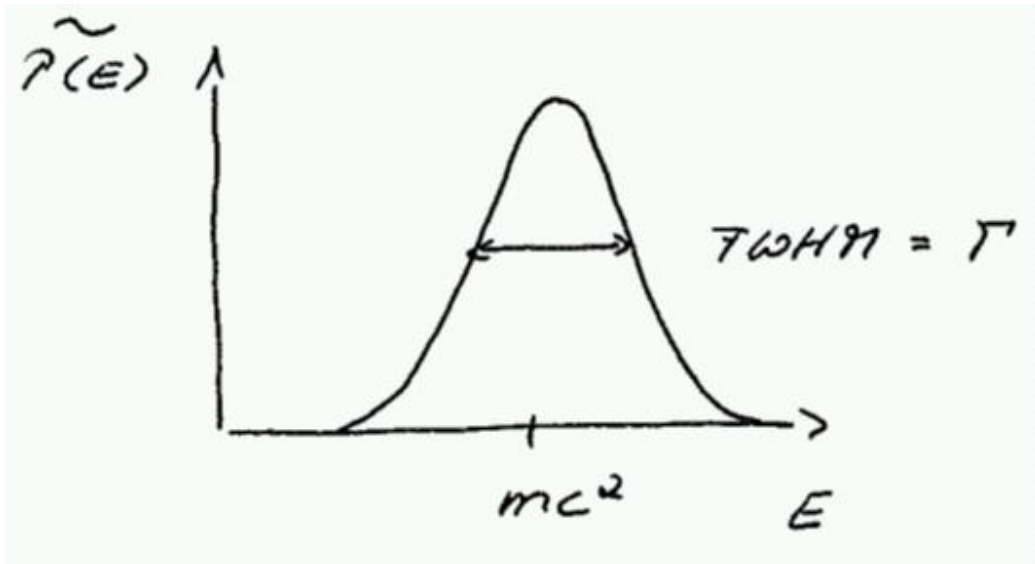
Normierung \Downarrow

$$\tilde{P}(E) = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{\hbar^2}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \quad (25)$$

Dabei ist $\tilde{P}(E)$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Energieraum.

Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt das Teilchen eine Energiebreite $\Delta E = \Gamma \equiv$ "natürliche Linienbreite": Umso größer die Lebensdauer umso schmaler ist die Energiebreite.

⁵Es steht in der Gleichung ein \propto und kein $=$ damit wir uns keine Gedanken über die korrekte Normierung der Wellenfunktion machen müssen



FWHM: full width at half maximum

Hinweis: Wenn eine gemessene Verteilung betrachtet wird, muss man aufpassen, ob die beobachtete Breite ein Effekt der limitierten Detektorauflösung ist oder die natürliche Linienbreite erkennbar ist (siehe auch Folien).

2.3 Theoretische Beschreibung von Streuprozessen

Wir haben den Wirkungsquerschnitt durch eine experimentelle Messvorschrift eingeführt:

$$\sigma = \frac{\dot{N}_s}{\Phi \cdot N_t}, \quad (26)$$

wobei \dot{N}_s die Rate der gestreuten Teilchen, Φ der einlaufende Fluss und N_t die Anzahl der Target-Teilchen ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ω hängt wie folgt mit dem Wirkungs-