

$$P^2 = M^2 c^2 \quad (133)$$

$$Pq = \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu/c \\ \vec{p} - \vec{p}' \end{pmatrix} = M\nu \quad (134)$$

$$0 \approx \underbrace{x_p^2 M^2 c^2}_{\ll |q^2|} + 2x_p M\nu + q^2 \quad (135)$$

$$\Rightarrow x_p = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M\nu} \stackrel{!}{=} x_B \quad (136)$$

$$(137)$$

Interpretation

Inelastische Streuung am Proton mit einem Bjorken $x_B = \frac{Q^2}{2M\nu} =: x$ kann als elastische Streuung an einen Parton, das den Impulsanteil $x_p = x$ des Protonimpulses trägt, beschrieben werden.

Unter der Annahme, dass e^- elastisch mit dem Parton streut, kann man von außen den Impulsanteil x und damit die Impulsverteilung $f(x)$ der Partonen i messen:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx} \sim f_i(x) \quad (138)$$

Der Wirkungsquerschnitt für elastische e^- -Parton Streuung mit Anteil x des Protonimpulses wird für Stosspartner mit Spin=1/2 durch die Dirac-Formel beschrieben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Parton} = z_i^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + \frac{Q^2}{2m_p^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (139)$$

$$= z_i^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + \frac{Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (140)$$

dabei ist z_i die Ladung des Partons i .

Der Wirkungsquerschnitt für tiefinelastische Streuung ist die Summe über alle Partonen

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx}\right)_{Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \sum_i z_i^2 f_i(x) \left(1 + \frac{Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (141)$$

mit $f_i(x)dx =$ Wahrscheinlichkeit Parton i mit $x \in [x, x + dx]$ zu finden. Das kann mit der Gleichung 119, 121, 122 der inelastischen Streuung verglichen werden:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE' Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x, Q^2)}{\nu} + \frac{2F_1(x, Q^2)}{Mc^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \nu &= E - E' \\ d\nu &= -dE' \\ x &= \frac{Q^2}{2M\nu} \Rightarrow \nu = \frac{Q^2}{2Mx} \\ \frac{d}{d\nu} &= \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\nu} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{Q^2}{2M\nu^2}\right) = -\frac{x}{\nu} \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} &= \frac{\nu}{x} \frac{d}{dE'} \end{aligned}$$

Zusätzlich benutzen wir das im Experiment gesehen wurde dass $F_2(x, Q^2) = F_2(x)$ bzw. $F_1(x, Q^2) = F_1(x) \cdot x$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx}\right)_{Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x)}{x} + \frac{2F_1(x)\nu}{xMc^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (143)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x)}{x} + \frac{2F_1(x)Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (144)$$

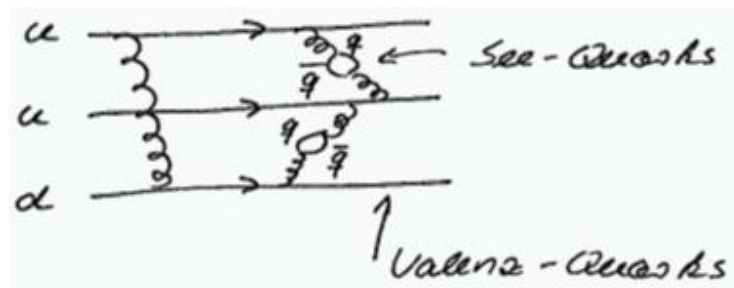
Wenn Partonen Spin 1/2 Teilchen sind, muss die inelastische Streuung an Protonen mit der Dirac-Streuung an den Partonen identisch sein, d.h.:

$$2F_1(x) = \frac{F_2(x)}{x} = \sum_i z_i^2 f_i(x) \quad (145)$$

$$\Rightarrow 2xF_1(x) = F_2(x)$$

Diese Beziehung ist die Callen-Cross Beziehung. Sie wurde im Experiment getestet (siehe Folie). Daraus folgt, dass der Spin der Partonen $1/2$ ist!

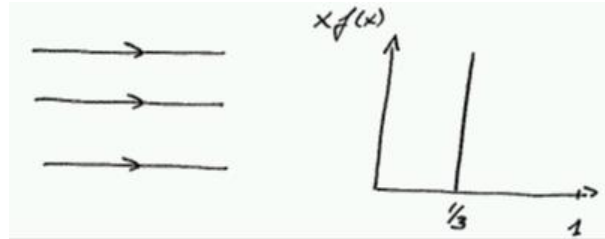
Bisher haben wir das Proton als aus 3 Quarks aufgebaut angenommen. Jedoch aufgrund von Vakuumfluktuationen gibt es Quark-Antiquark Paare, sogenannte See-Quarks.



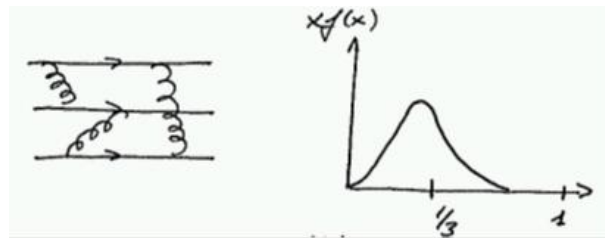
$$\Rightarrow F_2(x) = x \sum_i z_i^2 (f_i^q(x) + f_i^{\bar{q}}(x))$$

6.5 Was erwarten wir für die Impulsverteilung $xf(x)$ der Partonen im Proton?

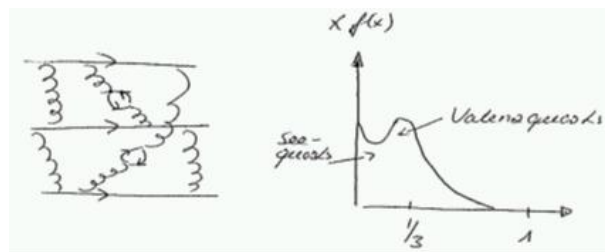
Wir fangen mit einem sehr vereinfachten Fall an, das Proton besteht aus drei Quarks gleicher Masse, die nicht miteinander wechselwirken. D.h. die drei Quarks teilen sich den Impuls untereinander auf, jedes Quark bekommt genau ein Drittel des Protonimpulses. D.h. die Momentumverteilung peaked by $x = 1/3$.



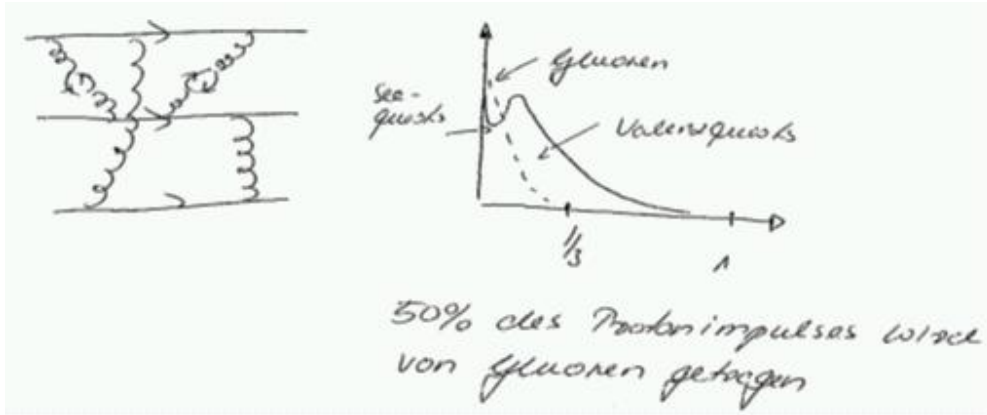
Wenn die 3 Quarks miteinander wechselwirken, geben sie in Stossprozessen Impuls aneinander ab. D.h. die oben diskutierte Verteilung wird verschmiert.



Zusätzlich berücksichtigen wir, dass sich Quark-Antiquark-Paare kurzzeitig im Rahmen der Heissenbergschen Unschärferlation bilden können. Diese zusätzlichen See-Quarks tragen im Mittel ein kleineren Impuls als die Valenzquarks. Der Peak in der Impulsverteilung der die Valenzquarks beschreibt verschiebt sich dadurch leicht zu niedrigeren Impulsen.



Zuletzt berücksichtigen wir noch, dass die Gluonen ca. 50% des Protonimpulses tragen. Ihr Impuls ist wie für die See-Quarks klein. Jedoch da die Summe aus den Impulsen der Gluonen, der Seequarks und der Valenzquarks den Impuls des Protons gibt, verschiebt sich die Verteilung der Impulse der Valenzquarks nochmals Richtung kleinere x -Werte. Der Peak liegt bei ca. $x = 0.15 - 0.2$.



Die Partonverteilung des Protons und Neutrons wurden durch eine Vielzahl von Streuexperimenten bestimmt: ep , μp , νp Streuung, woraus sich die Valenzquark, die Seequark wie auch die Gluonverteilung extrahieren lässt. (siehe Folie)

6.6 Zusammenfassung der Information über den Aufbau von Protonen aus Streuexperimenten

- Der mittlere Quadratische Radius des Protons is 0.97 fm.
- Das Proton besteht aus punktförmigen Teilchen, drei Valenzquarks und zusätzliche Seequarks und Gluonen
- Seequarks tragen in der Regel sehr kleines x
- Das Maximum der Valenzquarkverteilung liegt bei $x = 0.15, \dots, 0.2$
- Der Impulsanteil des Protons $\int x f(x) dx$ der von Quarks getragen wird entspricht 50% des Protonimpulses. Die übrigen 50% des Protonimpulses werden von Gluonen getragen.

7 Starke Wechselwirkung

7.1 Farbladung und Gluonen

Analog zur EM WW, die auf elektrisch geladene Teilchen wirkt, wirkt die starke WW auf Teilchen mit Farbladung. In der EM WW wird die WW durch das Photon als Austauscheteilchen übertragen, in der starken WW sind die Austauscheteilchen Gluonen. Ein signifikanter Unterschied ist, dass Gluonen **selbst Farbladung** tragen, das Photon jedoch elektrisch neutral ist.

Quarks (und Antiquarks) kommen in 3 Farben vor r, g, b (bzw. $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$). Gluonen tragen die Kombination aus einer Farbe und einer Antifarbe ($3 \otimes \bar{3}$)

Es gibt neun mögliche Farb-Antifarbe-Kombinationen, die sich in ein Colour-Oktett und ein Colour-Singlett aufteilen.

Colour-Oktett: $r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{b}, g\bar{r}, b\bar{r}, b\bar{g}, \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$

Colour-Singlett : $\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$

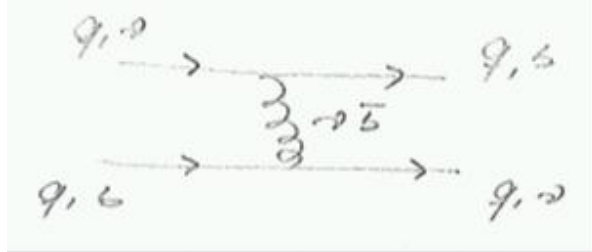
Das Colour-Singlett ist farbneutral $\hat{=}$ d.h. es ist invariant unter Rotation im Farbraum

Die Zustände $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$ haben in dieser Darstellung zwar auch keine netto-Farbe, sie sind jedoch nicht invariant unter Rotation im Farbraum. Das ist analog zu der Addition von zwei Spin=1/2 Teilchen. Der Gesamt-Spin kann 1 oder 0 sein. Auch im Triplet mit Gesamtspin 1 gibt es ein Element mit der z-Komponente null. Die Projektion des Spins des Teilchens auf die z-Achse ist 0, aber der Gesamtspin nicht. Wohingegen das Spin=0 Teilchen invariant unter Rotation im Spinraum ist, da sein Spin in keiner Projektion ungleich 0 ist.

Die Wahl der Zustände im Colour-Oktett sind Konvention, sie werden so gewählt dass sie eine orthonormal Basis bilden (all senkrecht aufeinander stehen).

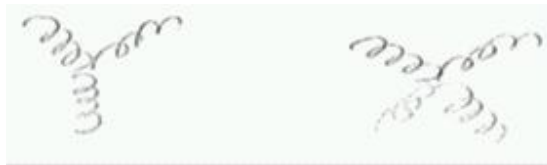
7.2 Quark-Quark Wechselwirkung

Die Farbladung wird an jedem Vertex eines Feynmandiagramms erhalten. Die starke Wechselwirkung ist insensitiv zu Quarkflavour (u, d, s, c, t, b) und



zur elektrischen Ladung ($2/3$, $-1/3$). Ein u und ein d Quarks sind für die starke Wechselwirkung ununterscheidbar (siehe Erhaltung des Isospins in der starken Wechselwirkung). Analog sind rote, grüne, blaue Quarks in der elektromagnetischen Wechselwirkung nicht unterscheidbar.)

Durch die Farbladung der Quarks sind auch 3-Gluon und 4-Gluon Vertices erlaubt. Analoge Vertices existieren in der elektromagnetischen Wech-



selwirkung nicht, da das Photon selbst keine elektrische Ladung trägt.

7.3 Evidenz für Farbe

Wie kamen die Physiker auf die Idee eine Farbladung einzuführen?

7.3.1 Statistisches Problem für $J = 3/2$ Baryonen

Ein Δ^{++} Teilchen besteht aus drei u quarks, hat Spin= $3/2$ und befindet sich im Grundzustand ($L=0$).

Die Wellenfunktion jedes Teilchens setzt sich aus dem Produkt der einzelnen Wellenfunktionen zusammen. Bevor man die Quantzahl Farbe einführte waren nur die Ortsellenfunktionen Ψ_{Raum} , die Spinwellenfunktion χ_{Spin} und die Flavourwellenfunktion $\Phi_{Flavour}$ bekannt. Die Gesamtwellenfunktion des Δ^{++} Teilchens ist dann:

$$\Psi_{\Delta^{++}} = \Psi_{Ort} \cdot \chi_{Spin} \cdot \Phi_{Flavour} \quad (146)$$

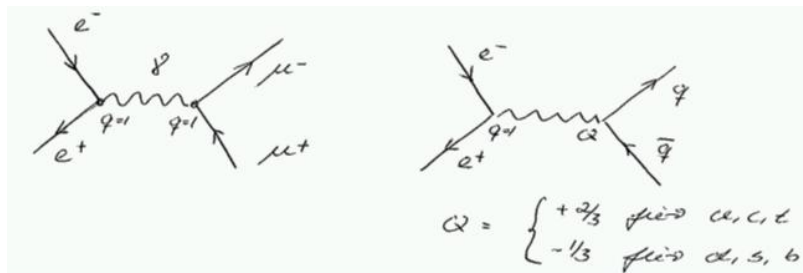
Die Symmetry der Ortswellenfunktion ist gegeben durch $(-1)^L$. Da L in diesem Fall 0 ist, ist die Ortswellenfunktion symmetrisch. Die Spinwellenfunktion ist ebenfalls symmetrisch unter vertauschen zweier Quarks, da alle drei Quarks die gleiche Spinrichtung haben. Da das Δ^{++} aus drei u Quarks besteht ist ebenfalls die Flavourwellenfunktion symmetrisch unter vertauschen zweier Quarks. D.h. die Gesamtwellenfunktion ist symmetrisch unter Vertauschen zweier Quarks. Das widerspricht aber der Tatsache, dass die gemeinsame Wellenfunktion von Fermionen asymmetrisch unter Vertauschung zweier Fermion sein muss. Der Ausweg dazu war einen weiteren Freiheitsgrad, d.h. eine weitere Quantenzahl, die Farbe einzuführen, deren Wellenfunktion ξ_{Farbe} vollständig asymmetrisch (d.h. asymmetrisch unter Vertauschung von jeder Kombination aus zwei Quarks) ist:

$$\xi_{Farbe} = \frac{1}{\sqrt{6}}(|rgb\rangle - |grb\rangle - |rbg\rangle + |gbf\rangle - |brg\rangle + |bgr\rangle) \quad (147)$$

Sie können überprüfen, dass unter Austausch von jeweils zwei Quarks die Farbwellenfunktion ξ_{Farbe} ihr Vorzeichen ändert. Die Gesamtwellenfunktion $\Rightarrow \Psi_{\Delta^{++}} = \Psi_{Raum} \cdot \chi_{Spin} \cdot \Phi_{Flavour} \cdot \xi_{Farbe}$ ist nun antisymmetrisch.

7.3.2 Hadronischer WQ für $e + e^-$ Annihilation

Ein weiterer experimenteller Hinweis auf den Freiheitsgrad "Farbe" kam aus dem Vergleich der Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$ und $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$.



Ohne Berücksichtigung der Farbe ist das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte der beiden oben skizzierten Reaktion $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \cdot Q^2$. Wobei Q die elektrische Ladung der Quarks im Endzustand sind.

Wenn man zusätzlich die Farbe berücksichtigt gibt es für die Reaktion $\sigma(e^+ + e^- \rightarrow q\bar{q})$ drei mögliche Feynmandiagramme, nämlich einmal mit einem $r\bar{r}$, $g\bar{g}$ und einem $b\bar{b}$ Quark-Antiquark-Paar im Endzustand. D.h. der Gesamtwirkungsquerschnitt der Reaktion ist drei mal so groß¹⁵. Die entstehenden Quarkpaare hadronisieren zu 2 Teilchen Jets, die im Detektor beobachtbar sind. Die unterschiedlichen Quarkflavour sind nicht mehr zu unterscheiden.

$$\sigma_{had}(e^+e^- \rightarrow 2\text{ Jets}) = \sum_{\text{Farben}} \sum_i \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) Q^2(q_i), \quad (148)$$

dabei läuft die zweite Summe über alle Quarks für die $q\bar{q}$ -Paare bei gegebener Schwerpunktsenergie produziert werden können. Im Experiment wird das Verhältnis

$$R_{had} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow 2\text{ Jets})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_F \sum_i Q^2(q_i) \quad (149)$$

bestimmt. Für unterschiedliche Schwerpunktsenergien (center-of-mass energies: CME) misst man unterschiedliche Verhältnisse R_{had} .

$E_{CME} < 2m_c c^2 \approx 3\text{ GeV}$; es können u, d, s Paare erzeugt werden
 $\rightarrow R_{had} = 3 \cdot (2/3^2 + 1/3^2 + 1/3^2) = \frac{18}{9} = 2$

$E_{CME} < 2m_b c^2 \approx 10\text{ GeV}$; es können u, d, s, c Paare erzeugt werden
 $\rightarrow R_{had} = 10/3$

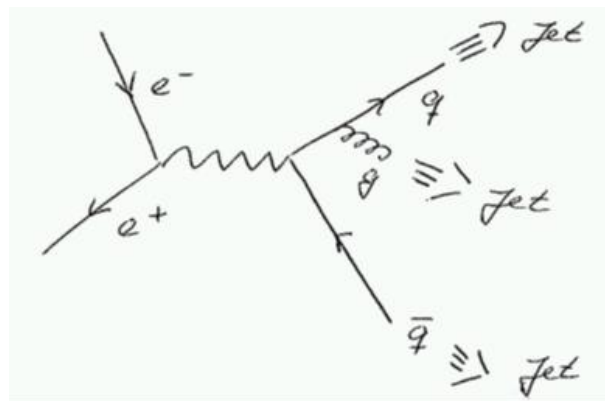
$E_{CME} < 2m_t c^2 \approx 300\text{ GeV}$; es können u, d, s, c, b Paare erzeugt werden
 $\rightarrow R_{had} = 11/3$

Die gemessenen R_{had} Verhältnisse bestätigen die aufgrund der Kinematik vorhergesagten Sprünge und den Farbfaktor 3! (siehe Folie).

¹⁵Auch wenn die elektromagnetische Wechselwirkung insensitiv gegenüber der Farbladung ist, sind die drei Diagramme im Prinzip unterscheidbar, d.h. sie interferieren nicht. Deshalb werden die Amplitudenquadrate und nicht die Amplituden addiert.

7.4 Evidenz für Gluonen

Analog der Bremsstrahlung erwartet man auch die Abstrahlung "reeller Gluonen".

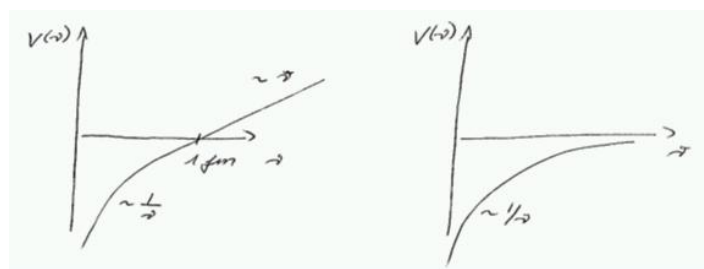


3 Jet Ereignisse bei Tasso am PETRA Beschleuniger (DESY) 1977 gelten als Nachweis für Gluonen. Aus dem Verhältnis von 3-Jet zu 2-Jet Ereignissen bekommt man eine Abschätzung der starken Kopplungskonstante α_s .

7.5 Quark-Antiquark Potential

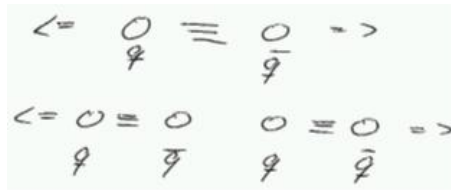
Starke WW (QCD)

Coulomb WW (QED)



$$V(r) = -4/3(\hbar c) \frac{\alpha_s}{r} + kr$$

Der Unterschied zwischen dem Potential der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung kommt von der Gluonselbstwechselwirkung. Für kleine r -Werte sind Quarks quasi frei, das nennt man asymptotische Freiheit. Für große Abstände braucht man immer mehr Energie die $q\bar{q}$ -Paare zu trennen. Die Quarks sind also im Farbpotential eingesperrt \Rightarrow Confinment. Aufgrund des Confinments ist die Produktion freier Quarks (oder allgemein farbgeladener Objekte) nicht möglich. Der Produktion des $q\bar{q}$ -Paares in der e^+e^- -Annihilation schliesst sich deshalb der Prozess der Hadronisierung an. Ab gewissem Abstand ist es energetisch vorteilhafter, neue Quark-Antiquark-Paare aus dem Vakuum zu bilden.



Am Ende der Hadronisierung steht der beobachtete Teilchen-Jet. Der genaue Prozess der Hadronisierung ist nur schlecht verstanden. Es gibt jedoch viele Modelle (oft mit vielen freien Parametern), die eine gute Beschreibung der experimentellen Daten ergeben. Diese Modelle sind wohlmotiviert, dennoch weit entfernt von einer first principel Beschreibung.

7.6 Laufende Kopplungskonstante α_s und asymptotische Freiheit

Die asymptotische Freiheit bei kleinen Abständen (großen Q^2 ¹⁶) wird durch die in diesem Limit immer kleiner werdende Kopplungskonstante $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$ beschrieben.

$$\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0 \text{ für } Q^2 \rightarrow \infty$$

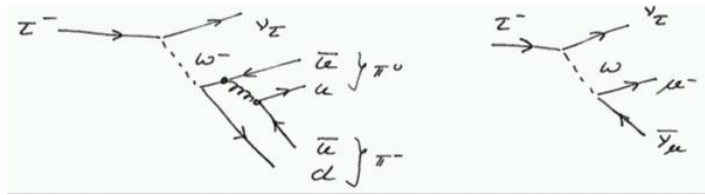
Dieses Verhalten wurde von Wilczek, Politzer und Gross 1975 im Rahmen der Quantumchromodynamik (QCD) vorhergesagt und experimentell

¹⁶Abstand und Impulsübertrag sind für virtuelle Teilchen über die Unschärferelation miteinander verknüpft.

bestätigt.

Wilczek, Politzer und Gross erhielten für diese Vorhersage und deren experimentelle Bestätigung den Physiknobelpreis 2004. Für kleine Q^2 ($Q^2 \rightarrow 0$) steigt $\alpha_s(Q^2)$ sehr stark an und erreicht bei etwa $Q^2 \approx (200 \text{ MeV}/c)^2$ die Grösse $O(1)$. Eine störungstheoretische Behandlung der starken Wechselwirkung ist in dem Bereich deshalb nicht möglich. Die Bindung von Quarks in Hadronen kann nicht perturbativ behandelt werden. Gleiches gilt für die Bindung von Nukleonen im Kern. Hier kommen effektive Theorien zur Anwendung.

7.7 Nebenbemerkung: Messung von α_s bei $q^2 = m_\tau^2 c^4$



Der Vergleich der Verzweungsverhältnisse der Zerfälle $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^0 \pi^-$ mit $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu$ erlaubt Rückschlüsse über $\alpha_s(m_\tau^2 c^4)$

7.8 Nebenbemerkung: Bestimmung des $q\bar{q}$ Potentials

Analog zum gebundenen e^+e^- Zustand (Positronium) eignen sich gebundene Zustände schwerer Quarks ($c\bar{c}$ und $b\bar{b}$), um mehr über das $q\bar{q}$ Potential zu lernen.

Die Auswertung der Charmoniumzustände unter der Annahme eines Potentials der Form $V(r) = -4/3(\hbar c) \frac{\alpha_s}{r} + kr$ hat die folgenden Parameter ergeben. $\alpha_s = 0.3$, $k = 1 \text{ GeV}/\text{fm}$. Diese Anpassungsrechnungen basieren aber nur auf einem kleinen Bereich (die Grösse des Charmoniums): $r \sim 0.2 - 0.3 \text{ fm}$. Der Vergleich der Unterschiede der Energieniveaus des Charmoniums und des Bottoniums zeigt, dass die starke WW flavour-blind ist, d. h. ΔE ist in beiden Systemen gleich. (siehe Folien).