

1 Einführung

1.1 Größenordnungen in der Teilchenphysik

1.1.1 Energie, Impuls und Masse

Elektronen-Volt eV ist die Basiseinheit für Energie in der Teilchenphysik:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Betrachtet man die relativistische Energie-Impuls-Beziehung eines Teilchens mit Energie E , Ruhemasse m_0 und Impuls p :

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1)$$

ist die Definition von eV/c als Grundeinheit für Impuls und eV/c^2 als Grundeinheit für Masse naheliegend.

Z.B. ist die Masse eines Elektrons $m(e^-) = 511 \text{ keV}/c^2$ und die eines Protons $m(p) = 938 \text{ MeV}/c^2$

Viele Experimente in der Teilchenphysik basieren auf Gleichung 1:

Hochenergetische Teilchen, d.h. Teilchen für die gilt $m_0^2 c^4 \ll E^2$ werden zur Kollision gebracht, zum Beispiel Elektronen e^- und Positronen (Antiteilchen des Elektrons) e^+ am LEP Beschleuniger am CERN¹, oder p mit p am Large Hadron Collider (LHC)². In der Kollision entstehen neue Teilchen, deren Masse oft ein vielfaches größer ist als die Masse der ursprünglichen Kollisionspartner. So wurden z.B. am LEP Beschleuniger sogenannte W und Z Bosonen mit einer Masse von $80 \text{ GeV}/c^2$ bzw. von $91 \text{ GeV}/c^2$ studiert und am LHC wurde das Higgs Boson mit einer Masse von $126 \text{ GeV}/c^2$ produziert.

Einschub: Relativistische Mechanik, Rechnen mit 4er Vektoren

Zeit-Orts-4er-Vektor: $x = (ct, \vec{x}) = (ct, x, y, z) = x^\mu$

Energie-Impuls-4er-Vektor (oder oft auch 4er-Impuls genannt):

$$p = (E/c, \vec{p}) = (E/c, p_x, p_y, p_z) = p^\mu$$

Konvention: In dieser Vorlesung bezeichnet \vec{x} einen 3er-Vektor im Ortsraum bzw. \vec{p} ein 3er-Vektor im Impulsraum. 4er Vektoren werden mit x bzw. p

¹ Laufzeit von 1989-2000

² seit 2008

bezeichnet.

Ein Skalarprodukt aus zwei 4er-Vektoren, z.B. $a = (a_0, \vec{a})$ und $b = (b_0, \vec{b})$ ist definiert als

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (2)$$

mit folgender Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Das so definierte Skalarprodukt ist **lorentzinvariant!**

Beispielaufgabe:

Ein Proton mit der Energie von 100 GeV trifft frontal auf ein Proton mit der Energie von 300 GeV. Wie groß ist die Schwerpunktsenergie (= Energie im Ruhesystem)?

Bei folgender Rechnung wurden die Massen der Teilchen vernachlässigt, da $E \gg mc^2$.

Laborsystem: $p_1 = (300\text{GeV}/c, 300\text{GeV}/c, 0, 0)$, $p_2 = (100\text{GeV}/c, -100\text{GeV}/c, 0, 0)$

Ruhesystem: $p'_1 = (E'_1, \vec{p}'_1)$, $p'_2 = (E'_2, \vec{p}'_2)$ und $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0 \rightarrow E'_1 = E'_2 = E'$

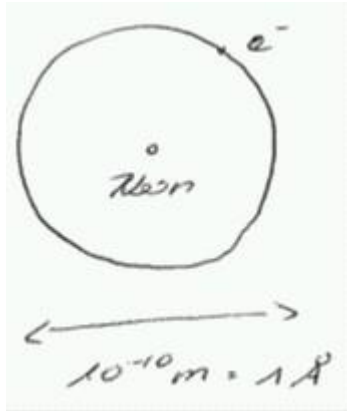
Lorentzinvarianz des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} (p'_1 + p'_2)^2 &= (p_1 + p_2)^2 \\ 4E'^2/c^2 &= (300\text{GeV}/c + 100\text{GeV}/c)^2 - (300\text{GeV}/c - 100\text{GeV}/c)^2 \\ E'^2 &= 30.000\text{GeV}^2 \\ 2E' &\sim 346\text{GeV} \end{aligned}$$

Die Schwerpunktsenergie ist $E_{CMS} = 346 \text{ GeV}$ (CMS: center-of-mass system).

1.1.2 Längenskalen

Ein Atom hat einen Durchmesser von $10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$. In der Mitte befindet sich der Atomkern und auf den Schalen “bewegen” sich die Elektronen.



Elektron sind sogenannte punktförmige Teilchen, d.h. haben keine Ausdehnung und dementsprechend auch keine Substruktur.

Experimentell kann man nur eine Obergrenze für die Ausdehnung eines Elektrons angeben.

Der kleinste Abstand Δx , den man mit einem Mikroskop auflösen kann, entspricht der zugehörigen Wellenlänge λ . Bei Teilchenkollisionen entspricht die erreichbare Präzision der DeBroglie-Wellenlänge der benutzten Teilchen:

$$\Delta x = \lambda = \frac{h}{p} \quad (4)$$

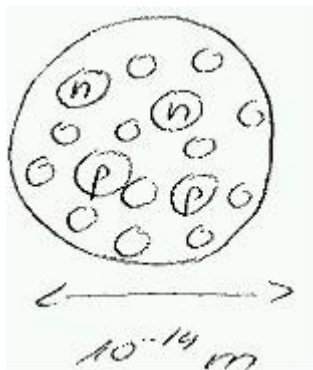
wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und p der Impuls der Teilchen ist. Eine Größe, die man sich auf alle Fälle merken sollte, ist $\hbar = h/2\pi = 197 \text{ MeV fm}/c$. Typische maximale Impulse an Hochenergiebeschleunigern sind $100 \text{ GeV}/c$:

$$\Delta x = \frac{0.197 \text{ GeV}/c}{100 \text{ GeV}/c} 2\pi \text{ fm} \sim 1 \cdot 10^{-17} \text{ m} \quad (5)$$

$\mathcal{O}(10^{-18} \text{ m})$ entspricht der oberen Grenze, die wir für die Ausdehnung von Elektronen angeben können.

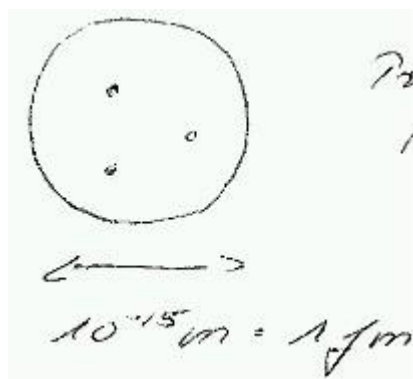
Der Atomkern besteht aus Neutronen und Protonen.

Die Dichte von Kernen ist konstant (siehe später in der Vorlesung), d.h. das



Kernvolumen wächst proportional zur Atommassenzahl A und entsprechend der Kernradius mit $A^{1/3}$. Eine gute Näherung des Kernradius R_K für alle Kerne mit $A > 10$ ist $R_K = 1.22 \text{ fm } A^{1/3}$. Daraus folgt, dass Atomkerne einen Radius von $\mathcal{O}(10^{-14}\text{m})$ haben.

Proton und Neutron werden unter dem Begriff Nukleonen zusammengefaßt. Sie haben einen Durchmesser von etwa 1 fm und bestehen jeweils aus drei Quarks; das Proton aus zwei u und einem d Quark und das Neutron aus zwei d und einem u Quark. Die Masse eines Protons ist $m(p) = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ und die des Neutrons $m(n) = 939.6 \text{ MeV}/c^2$. Quarks sind (in unseren Modellen) genauso wie das Elektron punktförmige Teilchen.



1.2 Elementarteilchen

Alle punktförmigen Teilchen werden Elementarteilchen genannt. Es gibt Elementarteilchen, die Fermionen sind, d.h. einen halbzahligen Spin haben ($1/2$, $3/2$, $5/2$, ...) und Bosonen, die einen ganzzahligen Spin haben. Die Klasse der fermionischen Elementarteilchen kann man noch weiter in Leptonen und Quarks unterteilen.

1.2.1 Fermionen

Leptonen

I	II	III	Q (Ladung)
ν_e	ν_μ	ν_τ	0
e^-	μ^-	τ^-	-1
$m(e)=511 \text{ keV}/c^2$	$m(\mu)=106 \text{ MeV}/c^2$	$m(\tau)=1.75 \text{ GeV}/c^2$	

Neutrinos haben in vielen Modellen (und im Rahmen dieser Vorlesung) keine Masse. Allerdings wurde durch die Umwandlung von einer Neutrinosorte in die andere nachgewiesen, dass mindestens eine Neutrinosorte zwar eine sehr kleine aber von null verschiedene Masse haben muß. Für den experimentellen Nachweis der Neutrinomasse ging vor wenigen Tagen der Nobelpreis an Arthur B. McDonald (SNO Experiment) und an Takaaki Kajita (Super-Kamiokande Experiment).

Quarks

I	II	III	Q
u (up)	c (charm)	t (top)	+ 2/3
$m(u)=3 \text{ MeV}/c^2$	$m(c)=1.3 \text{ GeV}/c^2$	$m(t)= 173 \text{ GeV}/c^2$	
d (down)	s (strange)	b (bottom)	- 1/3
$m(d)=6 \text{ MeV}/c^2$	$m(s)=104 \text{ MeV}/c^2$	$m(b)= 4.2 \text{ GeV}/c^2$	

Schwere Teilchen zerfallen (wenn nicht durch bestimmte Erhaltungssätze ein Zerfall verboten ist) in leichtere Teilchen. D.h. die Teilchen der ersten Familie (Elektron, up und down Quark) sind stabil, ebenso die Neutrinos. Die Materie um uns herum ist aus Elektronen, Protonen und Neutronen, d.h. up und down Quarks aufgebaut.

Für Quarks existieren neben der elektrischen Ladung auch sogenannte Farbladung (\equiv Ladung der starken Wechselwirkung, siehe später). Sie kann drei Werte annehmen r - red, g - green, b - blue.

Zu allen Teilchen existieren Antiteilchen mit entgegengesetzter elektrischer Ladung und Farbladung³, aber mit selber Masse, selben Spin und selber Lebensdauer:

$$e^- \rightarrow e^+, u \rightarrow \bar{u}, \nu_e \rightarrow \bar{\nu}_e, t \rightarrow \bar{t}, \dots$$

Antiteilchen geladener Teilchen werden mit entsprechend umgekehrter Ladung gekennzeichnet oder mit einem Querstrich, neurale mit einem Querstrich.

Das Elektron ist das einzige Teilchen, dessen Antiteilchen einen eigenen Namen hat, das Positron. Es wurde 1932 von Carl D. Anderson nachgewiesen. Er erhielt 1936 für diese Entdeckung den Physiknobelpreis.

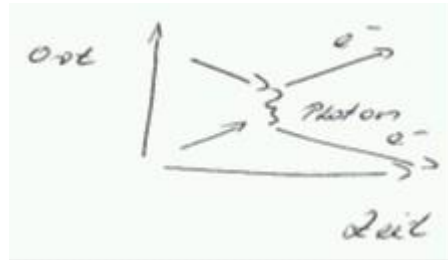
1.3 Fundamentale Wechselwirkungen

In der Quantenfeldtheorie (QFT) behandelt man Kräfte als quantisierte Felder. Wechselwirkungen (WW) zwischen Elementarteilchen werden als Austausch dieser Feldquanten (Austauschbosonen) beschrieben.

Feynman-Diagramm sind Pictogramme für Rechenregeln in der QFT, die von Richard Feynman eingeführt wurden. Aber auch ohne Rechnung sind sie zur Veranschaulichung von Prozessen in der Teilchenphysik hilfreich. Mehr Details zu Feynman-Diagrammen werden später in der Vorlesung eingeführt.

Ein Beispiel für die Streuung zweier Elektronen auf Grund ihrer Coulombwechselwirkung ist hier dargestellt. Die Übertragung der elektromagnetischen Kraft (Coulombwechselwirkung), d.h. die Abstoßung der Teilchen, geschieht

³allgemein haben Antiteilchen invertierte Quantenzahlen



durch den Austausch eines Photons. Das Photon existiert kurzzeitig virtuell, es wird von einem Elektron emittiert und von dem zweiten absorbiert. Virtuell bedeutet, dass das Teilchen für eine kurze Zeit im Rahmen der Unschärferelation nicht die relativistische Energie-Impulsbeziehung (siehe Gleichung 1) erfüllt.

Insgesamt gibt es vier fundamentale WW: die starke Kraft, die elektromagnetische (EM) Kraft, die schwache Kraft und die Gravitation. Alle anderen Kräfte lassen sich auf diese vier Kräfte zurückführen. Z.B. ist die Kernkraft ein Effekt der starken WW, oder die Van-der-Waals Kraft (siehe Festkörperphysik) ist ein Resultat der elektromagnetischen Kraft). Die Gravitation spielt auf der Skala, die relevant für die Teilchenphysik ist, keine Rolle. Sie kann auch nicht im Rahmen der QFT beschrieben werden.

Die folgende Tabelle listet einige Eigenschaften der Wechselwirkungen und ihrer Austauschteilchen auf. Die rel. Stärken sind auf der für die Teilchenphysik relevanten Skalen angegeben.

WW	rel. Stärke	Austauschboson	Spin	Masse	Reichweite
starke	1	8 Gluonen	1	0	$< 1 \text{ fm}$
EM	$\sim 10^{-2}$	Photon	1	0	∞
schwache	$\sim 10^{-7}$	W^\pm, Z	1	$80 \text{ GeV}/c^2$ $91 \text{ GeV}/c^2$	$\sim 10^{-3} \text{ fm}$
Gravitation	$\sim 10^{-39}$	Graviton*	2	0	∞

*noch nicht entdeckt.

Im folgenden werden kurz einige Eigenschaften der drei für die Teilchenphysik relevanten Kräfte diskutiert. Es wird auf alle drei noch im Detail im Laufe der Vorlesung eingegangen werden.

1.3.1 Elektromagnetische (EM)Kraft

Die EM Kraft wirkt auf alle elektrisch geladenen Teilchen. Das Potential hat theoretisch eine unendliche Reichweite:

$$V(r) \propto -\frac{q_1 q_2}{r} \quad (6)$$

wobei q_1 und q_2 die Ladung der Teilchen ist, zwischen denen die Kraft wirkt und r ihr Abstand. Praktisch gibt es natürlich Abschirmungseffekte, da die Materie aus positiv und negativ geladenen Teilchen besteht, die sich gegenseitig neutralisieren.

Nebenbemerkung:

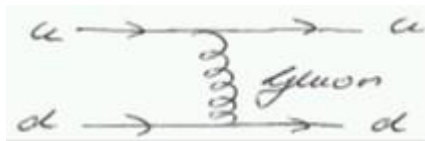
Das Gravitationspotential hat die gleiche Form.

$$V(r) \propto \frac{m_1 m_2}{r} \quad (7)$$

Da es keine Antimaterie in unserem Universum gibt, gibt es keine Abschirmeffekte und die Gravitationskraft wird bei großen Skalen die dominante Wechselwirkung, da die beteiligten Massen sehr groß sind.

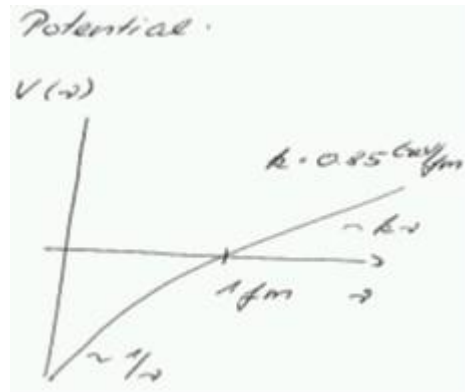
1.3.2 Starke Kraft

Die starke Kraft wirkt nur zwischen Teilchen mit Farbladung, d.h. Quarks und Gluonen. Es gibt 8 Gluonen mit unterschiedlichen Farb-Antifarbkombinationen.



Viele der Unterschiede der EM und der starken Kraft lassen sich darauf zurückführen, dass die Gluonen selbst Farbe tragen, wohingegen das Photon elektrisch neutral ist. Das Potential der starken Wechselwirkung hat bei kleinen Abständen (< 1 fm) eine $1/r$ Abhängigkeit, bei großen Abständen steigt es jedoch linear mit dem Abstand. D.h. bei kleinen Abständen sind zwei Quarks nur schwach gebunden, jedoch benötigt man um so mehr Energie, umso weiter man sie auseinander reißen möchte. Deshalb kommen Quarks

nicht alleine vor, sondern sind immer in farbneutralen Hadronen gebunden, deren Ausdehnung bei etwa einem Femtometer liegen.



Man unterscheidet zwei Sorten von Hadronen:

Baryonen bestehen aus drei Quarks $|qqq\rangle$ mit Farben r, g, b oder 3 Antiquarks $|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$ mit den Farben $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$; z.B. $p = |uud\rangle$, $n = |udd\rangle$, $\Lambda = |uds\rangle$, Δ^{++}

Mesonen bestehen aus einem Quark-Antiquark-Paar $|q\bar{q}\rangle$ mit Farbe und Antifarbe ($r\bar{r}$ oder $g\bar{g}$ oder $b\bar{b}$)

z. B. $\pi^+ = |u\bar{d}\rangle$, $\pi^- = |\bar{u}d\rangle$, $B^+ = |u\bar{b}\rangle$, $D^0 = |\bar{u}c\rangle$

In Tabelle 1 sind alle Mesonen im Grundzustand (kein relativer Bahndrehimpuls der Quark-Antiquark-Paare; $L=0$) aufgeführt. Mesonen werden nach ihrem schwersten Quark benannt:

u, d : Pion s : Kaon c : D-Meson b : B-Meson

Das top-Quark ist so schwer, dass es zerfällt, bevor es einen gebundenen Zustand eingehen kann. Die Lebensdauer eines top-Quarks ist $\tau(\text{top}) = 10^{-29}\text{s}$. Die Zeitskala der Hadronisierung, d.h. die Zeitspanne die nötig ist, dass sich Hadronen bilden, liegt bei $t_{had} = 10^{-22}\text{s}$, d.h. ist deutlich länger.

	u	d	s	c	b	t
\bar{u}	π^0	π^-	K^-	D^0	B^-	
\bar{d}	π^+	π^0	\bar{K}^0	D^+	\bar{B}^0	—
\bar{s}	K^+	K^0	\bar{q}	D_s^+	\bar{B}_s^0	—
\bar{c}	\bar{D}^0	D^-	D_s^-	J/Ψ	B_c^-	—
\bar{b}	B^+	B^0	B_s^0	B_c^+	Υ	—
\bar{t}	—	—	—	—	—	—

Tabelle 1: Mesonen und Quark-Antiquark-Resonanzen im Grundzustand (L=0)..

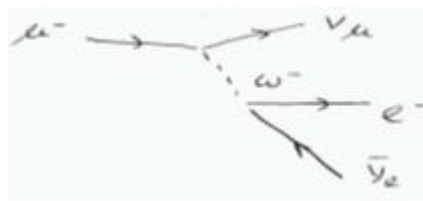
Nebenbemerkung:

Kürzlich (April 2014) wurden am LHCb-Experiment (Large Hadron collider beauty experiment) am CERN erstmals 4-Quarkzustände, sogenannte Tetraquarks mit folgendem Quarkinhalt $|q\bar{q}q\bar{q}\rangle$ nachgewiesen. Im Juli 2015 wurden am gleichen Experiment Pentaquarks ($|q\bar{q}qqq\rangle$ bzw. $|q\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$) entdeckt. Die bei weitem am häufigsten vorkommenden und für diese Vorlesung relevanten Hadronen sind allerdings die Mesonen und Baryonen.

1.3.3 Schwache Kraft

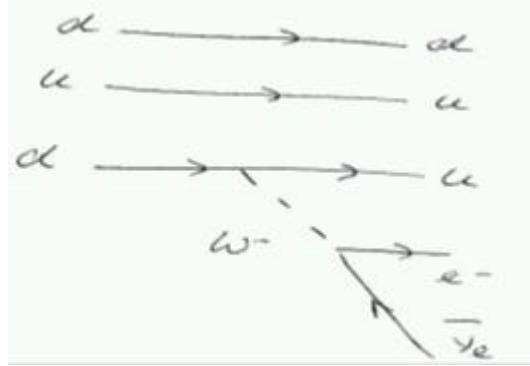
Die schwache Kraft koppelt an alle Quarks und an alle Leptonen⁴. Das bekannteste Beispiel eines schwachen Zerfalls ist der β -Zerfall

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$



⁴Das equivalent zur elektrischen Ladung bei der EM Wechselwirkung und der Farbladung bei der starken Wechselwirkung ist der schwache Isospin, eine weitere Quantenzahl (= Freiheitsgrad), die den Teilchen zugeordnet ist.

oder $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$



1.3.4 Zusammenfassung

Die Tabelle faßt zusammen, welche Teilchen und Antiteilchen an welcher Wechselwirkung teilnehmen.

Teilchen	starke WW	EM W	schwache WW
geladene Leptonen	0	x	x
Neutrinos + Antineutrinos	0	0	x
Quarks und Antiquarks	x	x	x

x: nimmt an WW Teil

1.4 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell (SM) ist eine QFT, die die WW zwischen den Elementarteilchen beschreibt.

Neben den Austauscheteilchen gibt es noch ein weiteres Boson, das Higgsboson, das den Teilchen Masse verleiht.

Der Higgsmechanismus wurde 1964 gleichzeitig von Higgs und von Englert und Brout eingeführt. Es ist eines der größten Erfolge des Standardmodells, dass dieses vorhergesagte Teilchen mit genau den vorhergesagten Eigenschaften 2012 am Large Hadron Collider am CERN nachgewiesen werden

konnte. Higgs und Englert haben für ihre Vorhersage 2013 den Physiknobelpreis bekommen. Auch wenn das Standardmodell, das vor über 40 Jahren eingeführt wurde, seitdem jedem Test in Laborexperimenten Stand hält, kann die Theorie nicht vollständig sein. Es gibt fundamentale Fragen, die das Standardmodell nicht beantworten kann, wie z.B. die Ursache des Materieüberschusses im Universum, die Gravitation oder den Ursprung der dunklen Materie, deren Existenz in cosmologischen Messungen eindeutig festgestellt wurde.

2 Beschreibung von Streuprozessen und Zerfallsraten

2.1 Streuprozesse

Wir unterscheiden drei Arten von Streuprozessen.

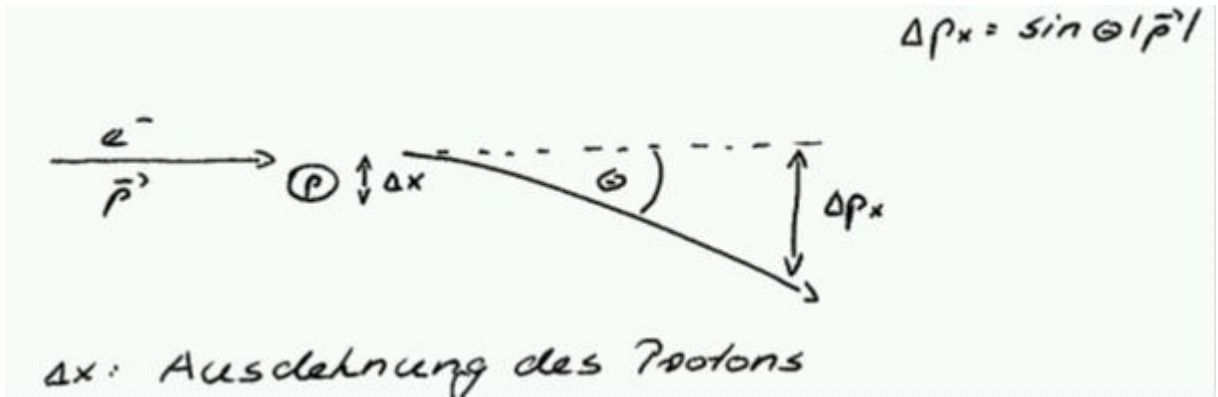
1) **elastische Streuung** z.B. $e^- + p \rightarrow e^- + p$

Bei elastischen Streuungen bleiben die Stoßpartner vor und nach der Streuung erhalten.

Eine Substruktur Δx kann aufgelöst werden, wenn die deBroglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ in der selben Größenordnung ist.

Ausdehnung des Protons $\Delta x \sim 1 fm$, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 197 MeV/c fm$
 $\rightarrow |\vec{p}| \sim 1.2 GeV/c$.

Um in Streuprozessen Informationen über die Struktur des Protons zu erlangen, muss der Impuls der einfallenden Teilchen mindestens $1.2 GeV/c$ sein.



(im Ruhesystem des Protons)

2) **inelastische Streuung**, z.B. $e^- + p \rightarrow e^- + p^*$

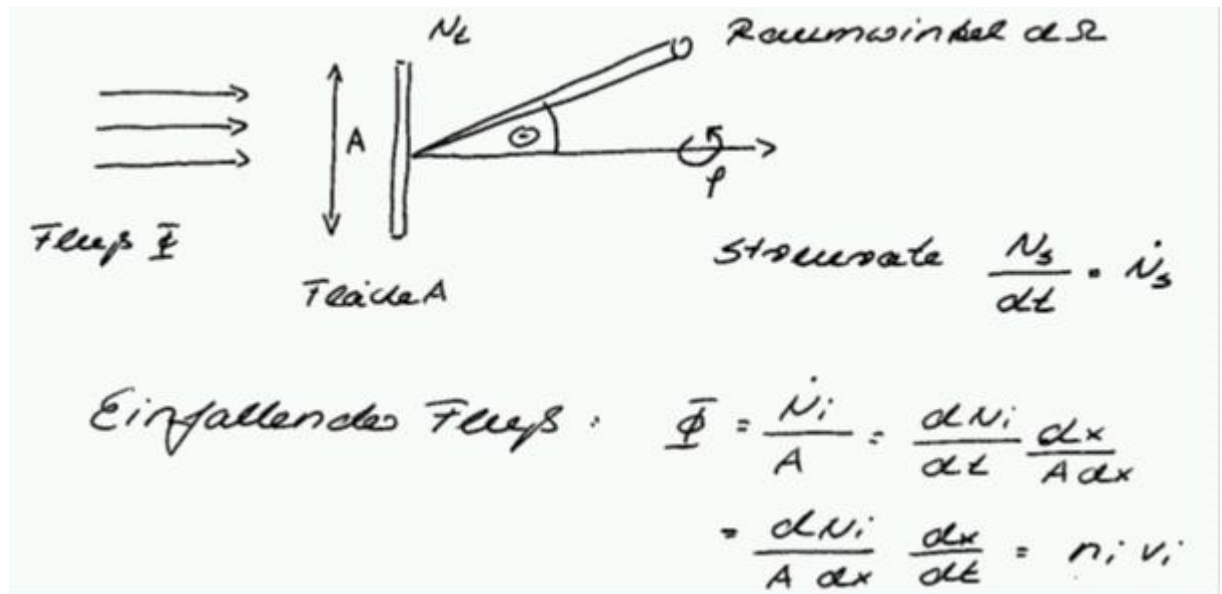
Teilchen, die eine Substruktur haben, können angeregt werden. Die angeregten Zustände haben einen höheren Spin aufgrund von Relativbewegungen ihrer Konstituenten. Damit steigt die Masse des angeregten Zustandes relativ zum Grundzustand. Ein Beispiel für einen angeregten Zustand des Protons ist das $\Delta(1232)$ (Die Zahl in der Klammer bezeichnet die Masse des Teilchens $m(\Delta(1232)) = 1232 \text{ MeV}/c^2$). Es hat genauso wie das Proton den Quarkinhalt $|uud\rangle$. Der Spin des Protons ist allerdings $S=1/2$ (kleinst möglicher Spin, den man aus drei Quarks, die jeweils $S=1/2$ haben kombinieren kann), wohingegen das $\Delta(1232)$ einen Spin von $3/2$ hat. Dass man angeregten Zuständen einen eigenen Namen gibt und nicht einfach als p^* bezeichnet, liegt an dem großen relativen Massenzuwachs eines $\Delta(1232)$ relativ zum Proton. Es gibt noch viele weitere Δ -Teilchen mit höherem Spin. Inelastische Streuung bedeutet, dass mindestens eines der Anfangsprodukte in der Kollision angeregt wird.

3) **tief inelastische Streuung**: z.B. $e^- + p \rightarrow X + Y$

In der tief inelastischen $e^- + p$ Streuung bricht das Proton auf und es entstehen mehrere neue Teilchen.

2.1.1 Wirkungsquerschnitt eines Prozesses

Der Wirkungsquerschnitt ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen Stoßpartnern



Φ : einfallender Teilchenfluß; Einheit: $\frac{1}{s m^2}$

\dot{N}_i : Rate der auf die Fläche A einfallenden Teilchen; Einheit: $\frac{1}{s}$

n_i : Teilchendichte im Strahl; Einheit: $\frac{1}{m^3}$

v_i : Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen; Einheit: $\frac{m}{s}$

N_t : Anzahl der Teilchen im Target

N_s : Anzahl der gestreuten Teilchen

\dot{N}_s : Streurrate; Einheit: $[\frac{1}{s}]$

Rate der in das Raumwinkelelement $d\Omega(\varphi, \theta)$ gestreuten Teilchen:

$$d\dot{N}_s(\varphi, \theta) = C \cdot \Phi \cdot N_t \cdot d\Omega(\varphi, \theta) \quad (8)$$

Die Proportionalitätskonstante C wird als differentieller Wirkungsquerschnitt definiert.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\varphi, \theta) = C = \frac{d\dot{N}_s(\varphi, \theta)}{\Phi \cdot N_t \cdot d\Omega(\varphi, \theta)} \quad (9)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} ist definiert als das Raumwinkelintegral über den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \frac{\dot{N}_s}{\Phi \cdot N_t} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (10)$$

Die Dimension des Wirkungsquerschnitts ist Rate/(Rate/Fläche) = Fläche.

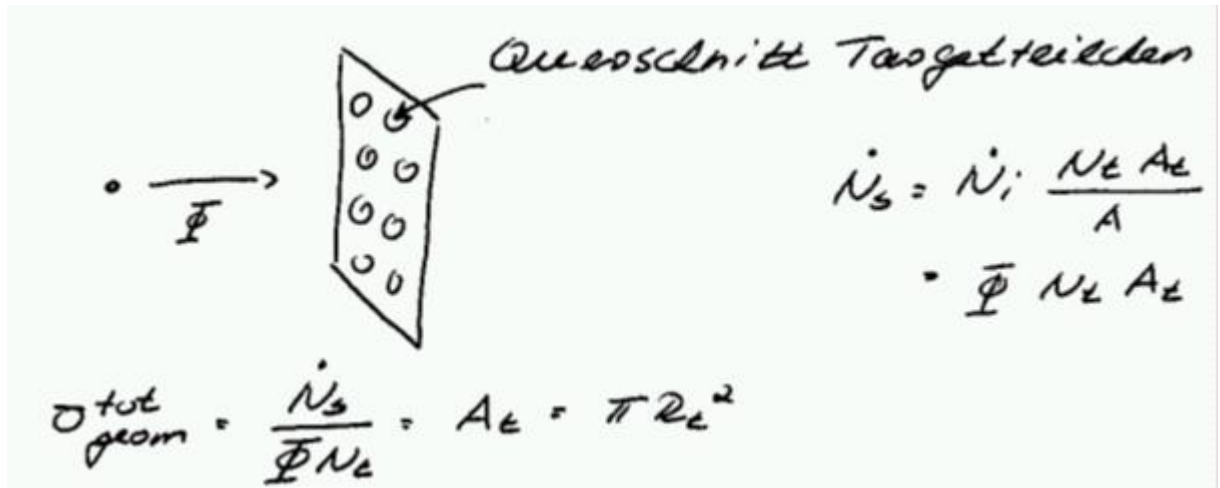
Typische Einheit für den Wirkungsquerschnitt in der Teilchenphysik:

1 barn \equiv 1b = 10^{-28} m² (Barn bedeutet auf englisch Scheunentor)

2.1.2 Geometrischer Wirkungsquerschnitt

Den Zusammenhang einer Wechselwirkungsrate und einer Fläche kann man sich veranschaulichen, wenn man den geometrischen Wirkungsquerschnitt betrachtet. Das heisst, wir gehen davon aus, dass Teilchen harte Kugeln sind, die nur miteinander wechselwirken, wenn sie sich berühren - eine Art Billard.

Beispiel 1: Ein punktförmiges Probe-Teilchen wird auf ein dünnes Target (nur eine Atomlage) geschossen.

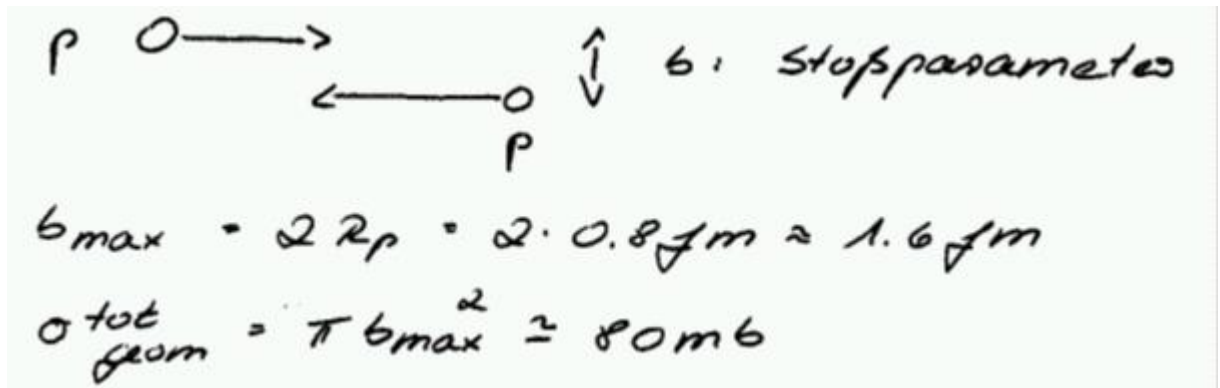


R_t : Radius der Target-Teilchen

A_t : Querschnittsfläche eines Target-Teilchens

In diesem Beispiel entspricht der totale Wirkungsquerschnitt dem geometrischen Querschnitt eines Streuzentrums - umso größer der geometrische Querschnitt, umso größer die Rate der gestreuten Teilchen.

Beispiel 2: Ein Proton wird auf ein Proton geschossen



$$N_t = N_i = 1$$

R_p : Radius des Protons

b_{max} : maximaler Abstand, so dass sich die Protonen gerade noch berühren

Der experimentell gemessene Wirkungsquerschnitt ist die Summe aus elastischem und inelastischem Wirkungsquerschnitt.

Die Wirkungsquerschnitte sind energieabhängig, umso größer die Energie, umso näher kommen sich die beiden Teilchen und umso größer ist die Wahrscheinlichkeit für eine Wechselwirkung. Die gemessenen Werte sind:

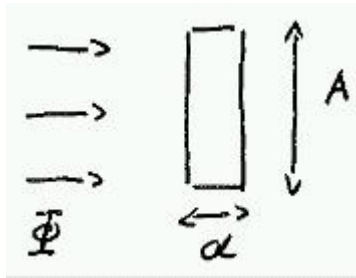
$$\sigma_{pp} (E_{CME} = 10 \text{ GeV}) \simeq 40 \text{ mb}$$

$$\sigma_{pp} (E_{CME} = 1 \text{ TeV}) \simeq 80 \text{ mb}$$

Der geometrische Wirkungsquerschnitt gibt in diesem Fall eine gute Abschätzung für den wahren Wirkungsquerschnitt. Das liegt daran, dass die geometrische Fläche des Protons der effektiven Fläche der Streuung (Reichweite der Kraft, die für die Streuung verantwortlich ist) entspricht. Die effektive Streufläche hängt von der Art und Energie der Teilchen ab und stimmt in der Regel nicht mit der geometrischen Fläche überein. Dennoch ist sich eine effektive Fläche vorzustellen, eine anschauliche Möglichkeit zu verstehen, dass der Wirkungsquerschnitt, der ein Maß für die Streuwahrscheinlichkeit

ist, die Dimension Fläche hat.

2.1.3 Freie Weglänge und Strahlabschwächung



Wir betrachten ein dickes Target der Dicke d . Wir können das als viele Lagen dünner Targets mit der Dicke dx behandeln. Die Anzahl der einlaufenden Teilchen in jeder Lage reduziert sich um die Anzahl der gestreuten Teilchen in der vorherigen Lage.

Anzahl aller Targetteilchen in einer Lage der Dicke dx :

$$N_t = n_t A dx = \frac{\rho N_A}{m_{mol}} A dx \quad (11)$$

n_t : Targetdichte

ρ : Dichte

N_A : Avogadrozahl

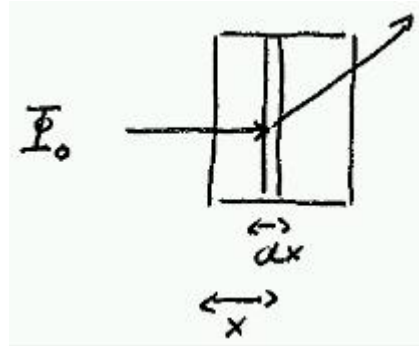
m_{mol} : Molmasse

Streurrate in einer Lage dx an der Stelle x :

$$\dot{N}_s(x) = \Phi(x) \cdot N_t \cdot \sigma = \frac{\dot{N}_i(x)}{A} \cdot n_t \cdot A \cdot dx \cdot \sigma = \dot{N}_i(x) \cdot n_t \cdot dx \cdot \sigma \quad (12)$$

Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für Streuung nach Strecke x in Abschnitt dx :

$$P(x) = \frac{\dot{N}_s(x)}{\dot{N}_i(x)} = n_t \cdot \sigma \cdot dx \quad (13)$$



Schwächung des einlaufenden Flusses:

$$-d\Phi(x) = \Phi(x) \cdot n_t \cdot \sigma \cdot dx \rightarrow \Phi(x) = \Phi_0 e^{-x(n_t \cdot \sigma)} = \Phi_0 e^{-x/\lambda},$$

wobei $\lambda = \frac{1}{n_t \cdot \sigma}$ die mittlere freie Weglänge des Projektils im Target ist. Der Teilchenfluß, das heisst die Anzahl der Teilchen im Strahl, nimmt exponentiell ab.

Beispielaufgabe 1:

Ein Strahl Protonen wird auf ein Kohlenstoff C^{12} target geschossen. Wie dick muss das Target sein, damit 50% der Teilchen das Target ohne Ablenkung durchqueren?

$$\rho = 2.265 \text{ g/cm}^3; N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}; m_{\text{mol}} = 12 \text{ g/mol}; \sigma = 210 \text{ mb}$$

$$\begin{aligned} n_t &= \rho \cdot N_A / m_{\text{mol}} = 1.1 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3} \\ \lambda &= (n_t \cdot \sigma)^{-1} \sim 42 \text{ cm} \\ e^{-d/\lambda} &= 0.5 \rightarrow \mathbf{d \sim 29 \text{ cm}} \end{aligned}$$

Beispielaufgabe 2:

Der Wirkungsquerschnitt der Streuung von zwei Protonen bei einer Schwerpunktsenergie von 10 GeV ist $\sigma_{pp}(10 \text{ GeV}) \sim 40 \text{ mb}$. Der Querschnitt des einfallenden Strahls Protonen ist $100 \mu\text{m}^2$. Der Strahl trifft auf ein

ruhendes Target von 10.000 Protonen. Die Energie der einfallenden Protonen ist so gewählt, dass die Schwerpunktsenergie der Kollision 10 GeV beträgt. Wieviele Teilchen müssen pro Sekunde eingeschossen werden damit 1 Teilchen pro Sekunde gestreut wird.

$$\begin{aligned} \dot{N}_s &= 1s^{-1}; \quad N_t = 10.000; \quad A = 10^{-10}m^2; \quad \sigma = 40mb = 4 \cdot 10^{-30}m^2 \\ \sigma &= \frac{\dot{N}_s}{\phi \cdot N_t} = \frac{\dot{N}_s \cdot A}{\dot{N}_i \cdot N_t}; \\ \rightarrow \dot{N}_i &= \frac{\dot{N}_s \cdot A}{N_t \cdot \sigma} = 2.5 \cdot 10^{15}s^{-1} \end{aligned}$$

2.2 Zerfallsgesetz und Zerfallsbreite von Teilchen

Das radioaktive Zerfallsgesetz ist exponentiell:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}, \quad (14)$$

wobei N_0 , die Anzahl der Teilchen zum Zeitpunkt $t=0$ ist und τ die mittlere Lebensdauer des Teilchens. Die mittlere Lebensdauer τ hängt mit der Halbwertszeit $T_{1/2}$ wie folgt zusammen:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 \quad (15)$$

Wie sieht die Wellenfunktion für instabile Teilchen aus? Wir betrachten zunächst die Wellenfunktion $\Psi(t)$ für stabile Teilchen. Wir sind im Eigen-system des Teilchens, d.h. das Teilchen ist in Ruhe, m ist seine Ruhemasse und $E_0 = mc^2$ seine Energie:

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} = \Psi_0 e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \quad (16)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einem Zeitpunkt t irgendwo im Raum zu finden, ist gegeben durch:

$$P(t) \propto |\Psi(t)|^2 = |\Psi_0|^2 \quad (17)$$

D.h. sie ist konstant, das Teilchen zerfällt nicht ⁵.

Um das radioaktive Zerfallsgesetz $P(t) \propto e^{-t/\tau}$ für ein instabiles Teilchen zu erhalten, muss die Wellenfunktion entsprechend modifiziert werden:

$$\Psi(t) = \Psi_0 e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t - \frac{t}{2\tau}} \quad (18)$$

$$= \Psi_0 e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} \text{ mit } E_0 = mc^2 - \frac{i\hbar}{2\tau} = mc^2 - i \frac{\Gamma}{2} \quad (19)$$

$$(20)$$

wobei $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$ die Zerfallsbreite des Teilchens ist.

Die Energieverteilung des Teilchens ist durch die Fouriertransformation der zeitabhängigen Wellenfunktion gegeben.

$$\tilde{\Psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(t) e^{i \frac{E}{\hbar} t} dt \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi_0 e^{i \frac{E}{\hbar} t - i \frac{mc^2}{\hbar} t - \frac{\Gamma}{2\hbar} t} dt \quad (22)$$

$$= \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hbar}{i(E - mc^2) - \Gamma/2} \quad (23)$$

$$\tilde{P}(E) \propto |\tilde{\Psi}(E)|^2 = \frac{\Psi_0^2}{2\pi} \frac{\hbar^2}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \quad (24)$$

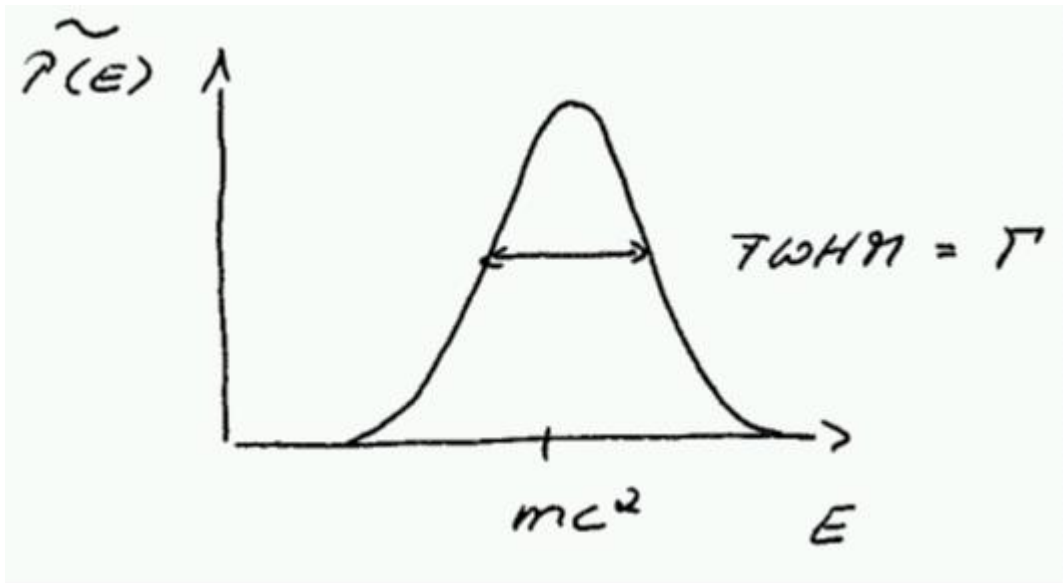
Normierung \Downarrow

$$\tilde{P}(E) = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{\hbar^2}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \quad (25)$$

Dabei ist $\tilde{P}(E)$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Energieraum.

Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt das Teilchen eine Energiebreite $\Delta E = \Gamma \equiv$ "natürliche Linienbreite": Umso größer die Lebensdauer umso schmaler ist die Energiebreite.

⁵Es steht in der Gleichung ein \propto und kein $=$ damit wir uns keine Gedanken über die korrekte Normierung der Wellenfunktion machen müssen



FWHM: full width at half maximum

Hinweis: Wenn eine gemessene Verteilung betrachtet wird, muss man aufpassen, ob die beobachtete Breite ein Effekt der limitierten Detektorauflösung ist oder die natürliche Linienbreite erkennbar ist (siehe auch Folien).

2.3 Theoretische Beschreibung von Streuprozessen

Wir haben den Wirkungsquerschnitt durch eine experimentelle Messvorschrift eingeführt:

$$\sigma = \frac{\dot{N}_s}{\Phi \cdot N_t}, \quad (26)$$

wobei \dot{N}_s die Rate der gestreuten Teilchen, Φ der einlaufende Fluss und N_t die Anzahl der Target-Teilchen ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ω hängt wie folgt mit dem Wirkungs-

querschnitt zusammen:

$$\omega = \frac{\dot{N}_s}{N_i N_t} = \frac{\sigma \cdot \Phi \cdot N_t}{N_i \cdot N_t} = \frac{n_i \cdot v_i \cdot \sigma}{n_i \cdot V} = \frac{v_i \cdot \sigma}{V} \quad (27)$$

v_i ist dabei die Geschwindigkeit der einlaufenden Teilchen ist und n_i die Teilchendichte im einlaufenden Strahl.

Das Normierungsvolumen V fällt wie wir später in der Rechnung sehen werden heraus, so dass wir es gleich an dieser Stelle auf 1 setzen.

Die Theoretische Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit und damit auch des Wirkungsquerschnitts ergibt sich aus Fermis Goldener Regel:

$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (28)$$

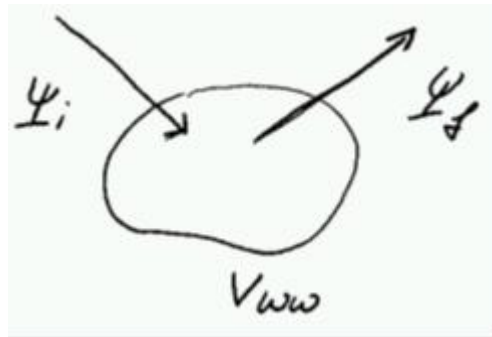
Hierbei ist $\mathcal{A}_{fi} = \mathcal{A}(i \rightarrow f)$ die **Übergangsamplitude** vom Anfangszustand (initial) zum Endzustand (final), die mittels Feynman-Diagrammen berechnet werden und $\rho(E_f)$ die Zustandsdichte im Endzustand. Die Übergangsamplitude beschreibt die “Physik des Prozesses”, die Zustandsdichte die “Kinematik”.

2.4 Feynman-Diagramme

Eine korrekte Einführung von Feynman-Diagrammen ist schwierig und erst in der Quantenfeld-Theorie möglich. Feynman-Graphen veranschaulichen Rechenregeln für die Berechnung von Übergangsamplituden. Auch ohne die Graphen vollständig berechnen zu können, geben sie eine gute Illustration der betrachteten Prozesse und ein Verständnis über die Dynamik eines Prozesses. Sie sind als “Piktogramme” ein wichtiges Werkzeug in der Teilchenphysik.

Betrachten wir z.B. den Streuprozesses $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$. Wie können wir die zugehörige Übergangsamplitude ausrechnen?

Übergangsamplituden sind bereits aus PEP-4 bekannt z.B. zur Beschreibung atomarer Übergänge. Vereinfacht wurde da beschrieben:



Dabei sind Ψ_i, Ψ_f Eigenfunktionen zu $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Die Wellenfunktion für freie Teilchen ist gegeben durch $\Psi = \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\frac{E}{\hbar}t}$ mit $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$. Der Hamiltonian des Systems ist gegeben durch:

$$H = H_0 + H_{WW} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{WW}$$

wobei $H_{WW} \ll H^0$, d.h. das Problem kann störungstechnisch behandelt werden.

In dem Fall gilt (Herleitung siehe z.B. Halzen + Martin):

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \mathcal{A}_{fi} = \langle \Psi_f | V_{WW} | \Psi_i \rangle = \int \int \Psi_f^* V_{WW} \Psi_i dx dt$$

Der Ansatz ist gültig für **nichtrelativistische** Problemstellungen, in denen der **Teilcheninhalt erhalten** bleibt.

Beide Voraussetzungen sind nicht in der Teilchenphysik erfüllt.

(1) Teilchen vernichten sich und neue Teilchen entstehen (z.B. $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$).

(2) Die an den Prozessen beteiligten Teilchen sind in der Regel hoch relativistisch.

Ein Ausweg zu Problem (1) bietet die Quantenfeldtheorie (QFT):

Die skalare Funktion $\Psi(\vec{x})$ wird durch einen Operator ersetzt, der Teilchen

mit Impuls \vec{k} erzeugen und vernichten kann.

Um Problem (2) korrekt zu behandeln muss die relativistische Energie-Impulsbeziehung betrachtet werden:

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ E_+ &= +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \equiv +E \\ E_- &= -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \equiv -E \end{aligned}$$

Zu den beiden Energieeigenwerten, gehören unterschiedliche Wellenfunktionen:

$$\Psi_+ = \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\frac{E}{\hbar}t} \quad (29)$$

$$\Psi_- = \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i(-\frac{E}{\hbar})t} \quad (30)$$

$$= \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x} - i\frac{E}{\hbar}(-t)} \quad (31)$$

Ein Teilchen mit negativer Energie kann interpretiert werden als Teilchen mit positiver Energie, das sich rückwärts in der Zeit bewegt.

Betrachten wir den elektromagnetischen 4-er Strom $j = q \cdot p = q \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

Für Elektronen bzw. Positronen gilt für die Ladung q :

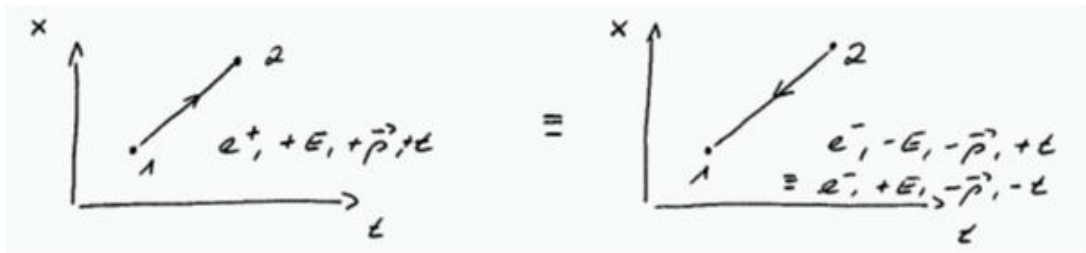
$$q(e^-) = +1 \quad q(e^+) = -1$$

$$j(e^-, E, \vec{p}) = q(e^-) p = +1 \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -\frac{E}{c} \\ -\vec{p} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$= j(e^+, -E, -\vec{p}) \quad (33)$$

(Zur Schreibweise: $j(e^-, E, \vec{p})$ bedeutet, der EM 4er-Strom eines e^- mit Energie E und Impuls \vec{p}).

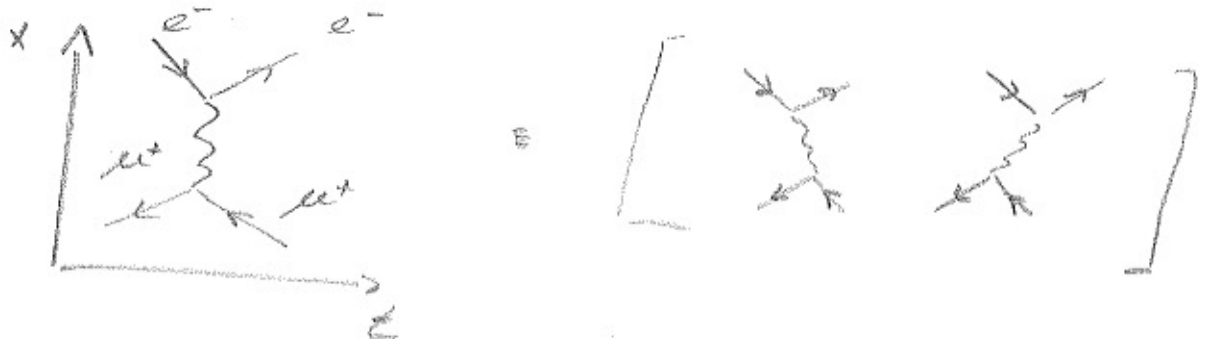
Aus der Gleichung (29,30) und (31,32) folgt dass „mathematisch“ (= in der Behandlung von Feynman-Diagrammen) ein Antiteilchen, das sich in positive x und t Richtung bewegt, identisch zu dem zugehörigen Teilchen ist, das sich in negative x und t Richtung bewegt!



2.4.1 Feynman-Diagramme in der QED (Quantenelektrodynamik)

(QED ist die QFT der EM Wechselwirkung)

Beispiel: $e^- + \mu^+ \rightarrow e^- + \mu^+$



Die Richtung der Orts- und Zeitachse ist eine Frage der Konvention. In dieser Vorlesung geht die Zeitachse von links nach rechts und die Ortsachse von unten nach oben.

Der Prozess in dem zunächst das Elektron ein Photon aussendet, das dann von dem Anti-muon absorbiert wird ist ununterscheidbar von dem Prozess in dem zunächst das Anti-muon ein Photon aussendet, das dann von dem Elektron absorbiert wird. Zur korrekten Berechnung der Übergangsamplitude des gesamten Prozesses müssen beide Diagramme berechnet werden. Das Diagramm mit vertikaler Photon-Linie bedeutet die Summe aus den beiden einzelnen Diagrammen.

Feynman-Regeln:

1) Fermionen (Quarks und Leptonen) werden mit Pfeilen in positive Zeitrichtung, Antifermionen (Anti-Quarks und Anti-Leptonen) mit Pfeilen in negative Zeitrichtung gezeichnet.

2) Das Austauscheteilchen der EM Wechselwirkung ist das Photon.

3) In der QED gibt es nur einen erlaubten Vertex: Ein Photon koppelt an eine Fermionenlinie. Der Vertex kann beliebig gedreht werden.



Die Stärke der Kopplung ist proportional zur elektrischen Ladung des beteiligten Fermions.

Die Feinstrukturkonstante α ist definiert als:

$$\alpha = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot \epsilon_0 \cdot \hbar} \cdot e^2 \sim \frac{1}{137} \quad (34)$$

wobei e die Elementarladung ist. Die Feinstrukturkonstante ist die Kopplungskonstante der EM Wechselwirkung.

4) An jedem Vertex gilt:

- ▶ Impulserhaltung
- ▶ Energieerhaltung
- ▶ Leptonenzahlerhaltung und Erhaltung des Quarkflavours⁶

⁶Es gibt Elektronleptonzahl L_e , Muonleptonzahl L_μ und Tauleptonzahl L_τ . Es gilt $L_e(e^-) = L_e(\nu_e) = 1$; $L_e(e^+) = L_e(\bar{\nu}_e) = -1$ und analog für die beiden anderen Leptonenfamilien. Elektronleptonzahlerhaltung bedeutet, dass die Summe aller Elektronleptonzahlen der Teilchen, die in einen Vertex hineingehen, die gleiche ist wie die, die der Teilchen die aus einem Vertex hinausgehen. Wieder gilt das gleiche analog für die Muonleptonzahlerhaltung und die Tauleptonzahlerhaltung. Der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrien wird in einer späteren Vorlesung diskutiert. Jedes Quark hat einen eigenen Quarkflavour und der Wert der zugehörigen Quarkflavourzahl ist +1. Die zugehörige Antiquark haben entsprechend eine Quarkflavourzahl von -1. Leptonzahl

- ▶ Fermionstromerhaltung
- ▶ Erhaltung der elektrischen Ladung

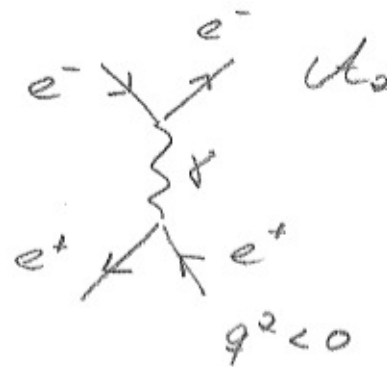
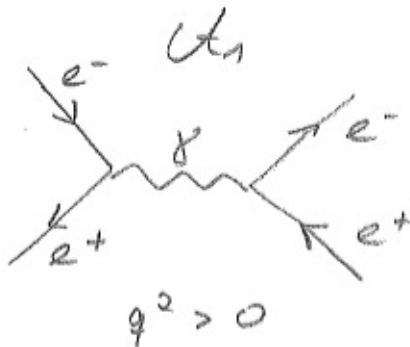
5) Innere Linien (mit Anfangs- und Endvertex) sind virtuelle Teilchen, d.h. es gilt in der Regel nicht die relativistische Energie-Impuls-Beziehung freier Teilchen (freies Photon $m^2 c^4 = 0 = E^2 - p^2 c^2$; virtuelles Photon $E^2 - p^2 c^2 \neq 0$).

6) Äußere Linien (= reale Teilchen) erfüllen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Beispiel: $e^+ + e^+ \rightarrow e^- + e^-$

raumartiges virtuelles Photon

zeitartiges virtuelles Photon

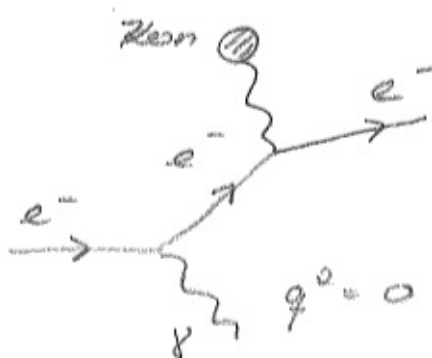


Mit q^2 wird das Quadrat des 4er-Impulsübertrags auf das Photon (allgemein auf das Austauscheteilchen) bezeichnet. Für reale Teilchen ist das Quadrat des 4er-Impulses die invariante Masse $\cdot c^2$, d.h. im Fall des Photons 0.

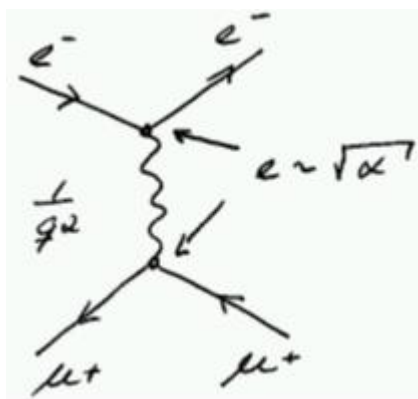
$$q^2 = (E/c, \vec{p})^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 = (\vec{p}^2 + m^2 c^4)/c^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 = 0$$

Ein Beispiel für ein reales Photon ist die Abstrahlung eines Photons (z.B. und Quarkflavourerhaltung bedeutet dass Quarks und Leptonen immer nur in Teilchen-Antiteilchen Paaren erzeugt und vernichtet werden können.

Bremsstrahlung). Dies ist nur in der Nähe eines Kerns möglich, der den Rückstoßimpuls des Elektrons aufnehmen kann, da sonst nicht gleichzeitig Energie und Impuls erhalten bleiben kann (siehe Übungsaufgabe).



2.4.2 Berechnung von Übergangsamplituden aus Feynman-Graphen



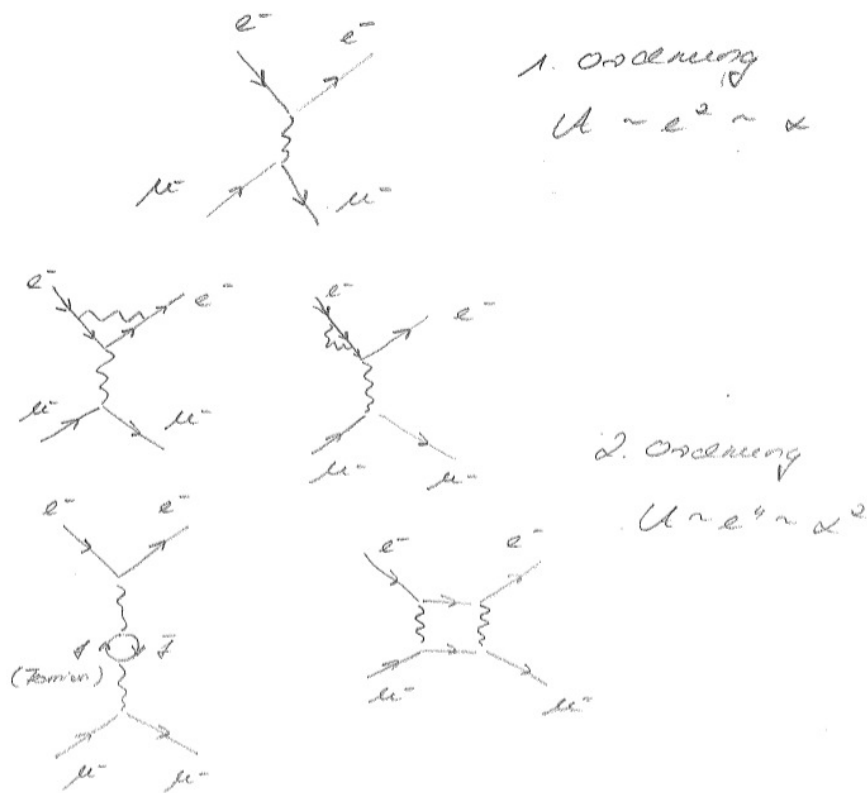
$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e^- + \mu^+ \rightarrow e^- + \mu^+) &\propto \frac{\text{Vertexkopplung} \cdot \text{Vertexkopplung}}{q^2 \text{ des Austauschteilchens}} \\ &= \sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Jedes Feynman-Diagramm, das die Regeln einhält, entspricht einem physikalischen Prozess und muss bei der Berechnung berücksichtigt werden. Die Amplituden aller von außen ununterscheidbaren Prozesse werden aufsummiert.

z.B. gibt es zwei Beiträge zu dem Prozess $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ (siehe oben). Die beobachtete Meßgröße ist $\propto |\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2$. Man erwartet also auch Beiträge von Interferenztermen.

2.4.3 Feynman-Graphen höherer Ordnung

Beispiel: $\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$



Da $\alpha \sim \frac{1}{137}$ signifikant kleiner als 1 ist, haben in der QED Diagramme höherer Ordnung kaum Einfluss.

Zur Sprechweise: Ein Diagramm erster Ordnung ist ein Diagramm mit der kleinst möglichen Anzahl (n) an Vertices. Ein Diagramm zweiter Ordnung hat

(n+1) Vertices etc.

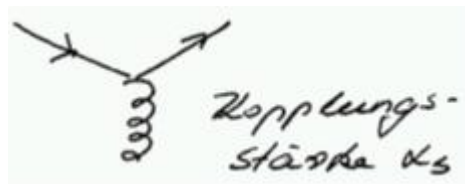
2.4.4 Feynman-Graphen für QCD (Quantenchromodynamik)

QCD ist die QFT der starken Wechselwirkung.

Austauschteilchen: masselose Gluonen

Gluonen koppeln an alle Teilchen die Farbladung tragen, d.h. an Quarks und Antiquarks aber nicht an Leptonen.

Fundamentaler Vertex:



Es gelten die selben Erhaltungssätze an jedem Vertex wie in der QED.

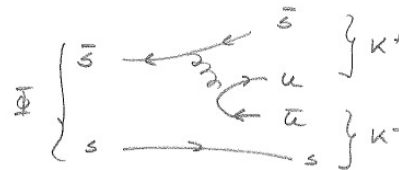
Die Kopplungsstärke α_s der starken WW ist stark energieabhängig!
Für $\alpha_s > 1$ sind höhere Ordnung, Diagramme nicht vernachlässigbar

Der Propagatorterm ist analog zur QED gegeben durch $\frac{1}{q^2}$, wobei q^2 das 4er-Impulsquadrat des Austauschteilchens (Gluons) ist.

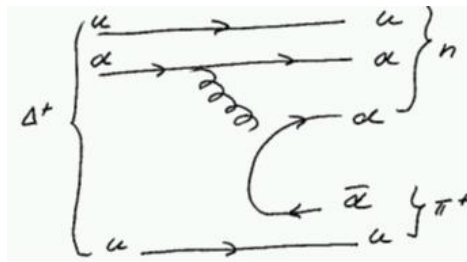
Die Berechnung der Amplitude eines Feynmandiagramms der QCD erfolgt analog zur Berechnung in der QED.

Beispiele für Zerfälle der starken Wechselwirkung:

$$\Phi |s\bar{s}\rangle \rightarrow K^+ |u\bar{s}\rangle + K^- |\bar{u}s\rangle$$



$$\Delta^+ |uud\rangle \rightarrow n |udd\rangle + \pi^+ |u\bar{d}\rangle$$



Eine Besonderheit der starken WW ist, dass die Austauscheteilchen (Gluonen) selbst Farbladung tragen. Das heißt Gluone wechselwirken miteinander. Deshalb gibt es neben dem fundamentalen Vertex noch zwei weitere erlaubte Vertices, die aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht weiter diskutiert werden.



2.4.5 Feynman-Diagramme der schwachen Wechselwirkung

Die Feynman-Diagramme der schwachen Wechselwirkungen sind komplexer und werden zu einem späteren Zeitpunkt in der Vorlesung diskutiert.

2.5 Phasenraum und Zustandsdichten

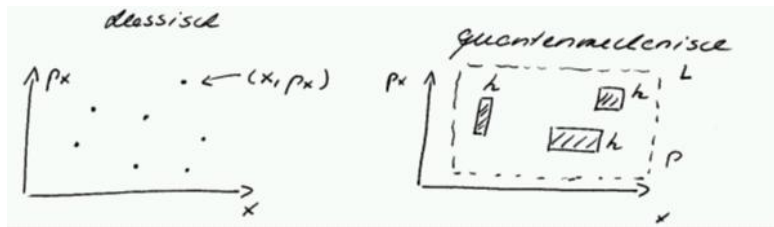
In Gleichung 28 haben wir die Übergangswahrscheinlichkeit, ω_{fi} pro Zeit definiert als

$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \rho(E_f). \quad (35)$$

Die Initialen i , f stehen für initial und final state. Die Übergangsamplitude \mathcal{A}_{fi} wird mittels Feynman-Diagrammen ausgerechnet. In diesem Kapitel geht es um die Zustandsdichte $\rho(E_f) = \frac{dN}{dE_f}$ im Endzustand.

Um Teilchenzustände zu beschreiben, muss Ort und Impuls (Punkt im Phasenraum) angegeben werden.

Beispiel in 1D:



Aufgrund der Unschärferelation wird ein Zustand durch eine Zelle mit Volumen h beschrieben. Wieviel Zustände paßen in ein Phasenraumvolumen $L \times p$? Die Form der Zelle spielt dabei keine Rolle.

$$N = \frac{L \cdot p}{h} = \frac{L \cdot p}{2\pi\hbar}$$

Wenn wir das Problem auf drei Dimensionen erweitern erhalten wir für die Anzahl der Zustände in einer Zelle mit dem Volumen V und Impuls $\int dp_x dp_y dp_z = \int \int p^2 dp d\Omega$, mit $p = |\vec{p}|$:

$$N = \frac{V \int \int p^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}$$

V ist ein Normierungsvolumen. Wir haben in Gleichung 27 bereits ein Normierungsvolumen eingeführt und damals darauf hingewiesen, dass es sich später rauskürzt und es deshalb auf 1 gesetzt. Hier ist nun ein weiteres Volumen; beide kürzen sich mit der Normierung der Wellenfunktion (1 Teilchen pro Volumen), die in der Übergangsamplitude steckt. d.h. wir setzten der

Einfachheit halber auch hier das Volumen auf eins.

2.5.1 Zustandsdichte im 1-Teilchen Endzustand

Für ein 1-Teilchen Endzustand ist die gesammte Energie im Endzustand, die Energie des Teilchens: $E_f = E_1$

$$\rho(E_1) = \frac{dN}{dE_1} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE_1} \int \int p_1^2 dp_1 d\Omega_1 \quad (36)$$

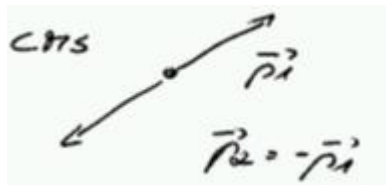
Mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung: $E_1^2 = p_1^2 c^2 + m^2 c^4$ folgt:

$$2 E_1 dE_1 = 2 p_1 dp_1 c^2 \quad (37)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dE_1} = \frac{E_1}{p_1 c^2} \frac{d}{dp_1} \quad (38)$$

$$\rho(E_1) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1}{p_1 c^2} p_1^2 \int d\Omega_1 \quad (39)$$

2.5.2 Zustandsdichte im 2-Teilchen Endzustand



Rechnung im Schwerpunktsystem (CMS):

$$E_f = E_1 + E_2 \quad (40)$$

$$dE_f = dE_1 + dE_2 \quad (41)$$

$$= \frac{p_1 c^2}{E_1} dp_1 + \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2 \quad (42)$$

Im Schwerpunktsystem gilt $p_1^2 = p_2^2 \rightarrow p_1 dp_1 = p_2 dp_2$

$$dE_f = \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right) c^2 p_1 dp_1 \quad (43)$$

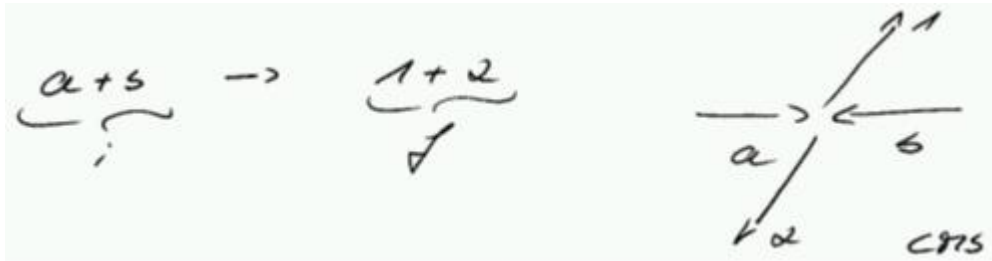
$$\Rightarrow \rho(E_f) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{1}{c^2} p_1 \int d\Omega_1 \quad (44)$$

2.5.3 Zustandsdichte im n-Teilchen Endzustand

Aufgrund von Energie und Impulserhaltung ist wenn die Gesamtenergie des Endzustands E_f gegeben ist, und der Impuls und die Energie von $n - 1$ Teilchen festgelegt ist auch der Impuls des n-ten Teilchens gegeben. Deshalb geht das Integral immer nur über $n - 1$ Impulse.

$$\rho(E_f) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE_f} \int dp_1^3 \cdot \dots \cdot dp_{n-1}^3 \quad (45)$$

2.6 Wirkungsquerschnitt



$$\sigma = \frac{w_{fi}}{v_i}$$

v_i = Geschwindigkeit $a \rightarrow b$ (b in Ruhe)

$$w_{fi} = \int \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1}_{\text{Phasenraum}} d\Omega_1$$

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts werden einige Näherungen eingeführt.

1) $v_i = c$ hochrelativistisch

2) $m_i \ll E_i/c^2 \rightarrow E_i \sim p_i c, \quad i=1,2$

3) CMS: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \rightarrow E_1 + E_2 = 2 p_1 c; \quad E_1 E_2 = p_1^2 c^2$

Die Definition des Wirkungsquerschnitts und insbesondere des einlaufenden Fluss wurde in einer Fix-Target Konfiguration eingeführt, d.h. nicht im Schwerpunktsystem. Hingegen benutzten wir für den Rest der Rechnung die Beschreibung im Schwerpunktsystem. Deshalb muss der Flußfaktor für die Berechnungen im Schwerpunktsystem relativ zur fixed Target Konfiguration korrigiert werden, was einen zusätzlichen Faktor 2 bringt. Dadurch ergibt sich als differentieller Wirkungsquerschnitt eines Stosses ($a + b \rightarrow 1 + 2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \times \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^3} \frac{p_1^2 c^2}{2p_1 c} p_1 |\mathcal{A}_{fi}|^2 \quad (46)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} p_1^2 c^2 |\mathcal{A}_{fi}|^2 \quad (47)$$

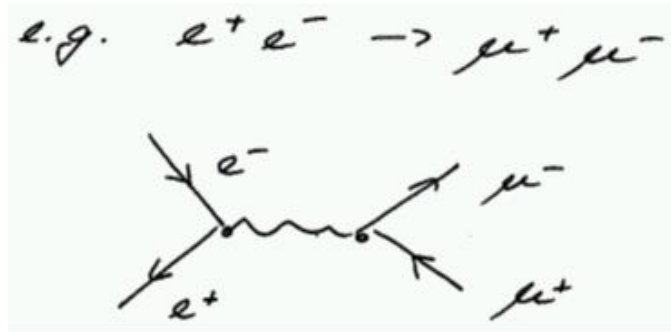
Nebenbemerkung:

Ein Wirkungsquerschnitt ist eine lorentzinvariante Größe. Jedoch sind die beiden einzelnen Komponenten Übergangsamplitude und Phasenraumfaktor, so wie wir sie definiert haben nicht LI. Ein LI Maß für den Phasenraum ist z.B. $\frac{d^3p}{2E}$. Entsprechend wird ein Faktor $\sqrt{2E}$ in der Normierung der Wellenfunktion absorbiert. Die so transformierte LI Übergangsamplitude wird Matricelement M_{fi} genannt.

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{1}{(E_a + E_b)^2} \int |M_{fi}|^2 d\Omega_1 \quad (48)$$

Ein differentieller Wirkungsquerschnitt ist keine LI Grösse, da ein Raumwinkelelement nicht LI ist.

2.7 e^+e^- Annihilation



$$\mathcal{A}_{fi} \sim \sqrt{\alpha} \frac{1}{q^2} \sqrt{\alpha} \quad q^2 = E_{CMS}^2$$

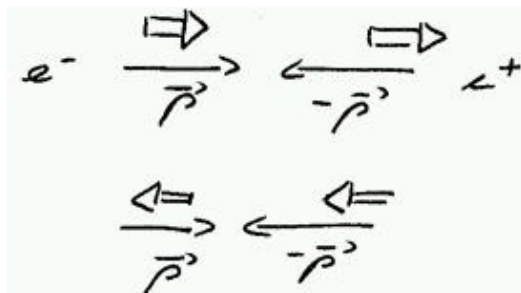
Für das oben gegebene Feynman-Diagramm entspricht q^2 dem Quadrat der Schwerpunktsenergie E_{CMS}^2 .

Es gibt verschiedene mögliche Spineinstellungen der Elektronen und Myonen. Da der Spin der Elektronen und Myonen meßbar ist, sind diese Prozesse unterscheidbar. D.h. es treten keine Interferenzeffekte auf. Wenn wir aber die Übergangsamplitude für $e^- + e^+$ unabhängig der Spineinstellung ausrechnen wollen (z.B. im Experiment mit nicht polarisierten Elektron- und Positron-Strahlen) müssen wir über die Quadrate der Amplituden aller erlaubten Spin-Kombinationen im Anfangs- und Endzustand summieren.

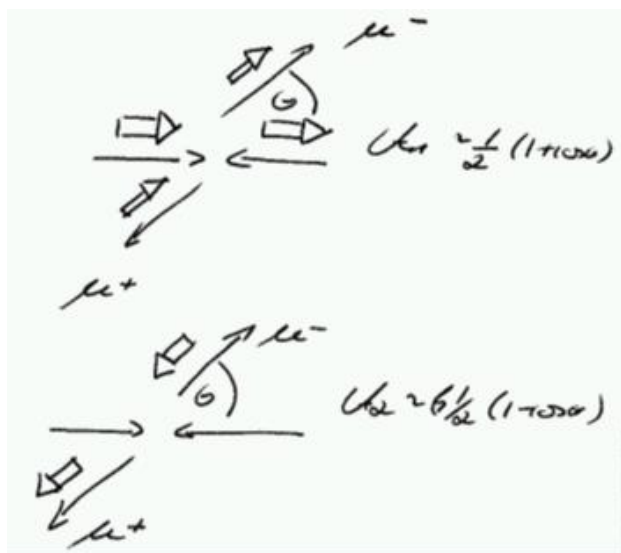
Der Spin eines Fermions ist $1/2$, der des Photons 1 . d.h. nur Konfiguration im Anfangszustand mit Gesamtspin $S = 1$ sind erlaubt⁷.

⁷Wir rechnen an dieser Stelle mit masselosen Teilchen im Endzustand, d.h. $v = c$, d.h. die Orientierung des Spins relativ zum Impuls ist nicht abhängig vom Bezugssystem

Erlaubte Konfigurationen:



Analog im Endzustand



Nur zwei der vier möglichen Spinkonfigurationen im Anfangszustand sind erlaubt, dennoch muss über all vier möglichen Spineinstellungen im Anfangszustand gemittelt werden. Für beide erlaubten Anfangskonfigurationen gibt es zwei mögliche Endkonfigurationen, die ebenfalls nicht interferieren $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 \propto \left(\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)\right)^2$.

$$\overline{|\mathcal{A}_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{spin=1}^4 |\mathcal{A}_{fi}|_{spin}^2 \quad (49)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + \cos^2\theta) \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} (\hbar c)^6 \quad (50)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{E_{CMS}^2}{4} \underbrace{\frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} (\hbar c)^6 \frac{1}{4} (1 + \cos^2\theta)}_{\overline{|\mathcal{A}_{if}|^2}} \quad (51)$$

$$= \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{E_{CMS}^2} (1 + \cos^2\theta) (\hbar c)^2 \quad (52)$$

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \frac{1}{E_{CMS}^2} (\hbar c)^2 \quad (53)$$

$$= \frac{87nb}{E_{CMS}^2 [GeV^2]} \quad (54)$$

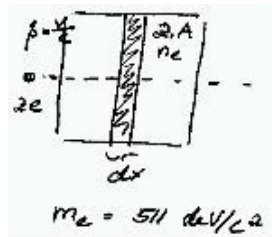
Der berechnete Wirkungsquerschnitt stimmt exakt mit den gemessenen Werten in einem großen $E_{CMS}^2 = q^2$ Bereich überein.

3 Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

3.1 Energieverlust schwerer geladener Teilchen durch Ionisation

Unter "schweren geladenen" Teilchen versteht man hier alle geladenen Teilchen außer Elektronen und Positronen. Elektronen und Positronen verlieren zwar auch über den unten beschriebenen Mechanismus Energie, aber es ist für sie nicht der dominante Mechanismus.

Die Teilchen verlieren über Streuung durch EM Wechselwirkung Energie. Die Elektronen des Mediums werden in höhere Schalen angeregt oder aus den Atomen gelöst (Ionisation). Genaue Berechnung (unter Berücksichtigung aller QM-Effekte) ist sehr schwierig. Der mittlere Energieverlust $-dE$ pro Wegstrecke dx wird durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben.



$$\frac{-dE}{dx} = \left(\rho \cdot N_A \cdot \frac{Z}{A} \right) \frac{4\pi \cdot z^2 \cdot e^4}{m_e \cdot c^2 \cdot \beta^2} \left(\ln \frac{2 \cdot m_e \cdot c^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2}{I} - \beta^2 \right) \quad (55)$$

m_e : Elektronenmasse

z : Elementarladung des einlaufenden Teilchens

Z : Kernladungszahl des Mediums

A : Atommassenzahl des Mediums

ρ : Dichte des Mediums

$\beta \cdot \gamma$: relativistische Faktoren des einlaufenden Teilchens

N_A : Avogadrokonstante

$n_e = \rho \cdot N_A \cdot \frac{Z}{A}$: Elektronendichte im Medium

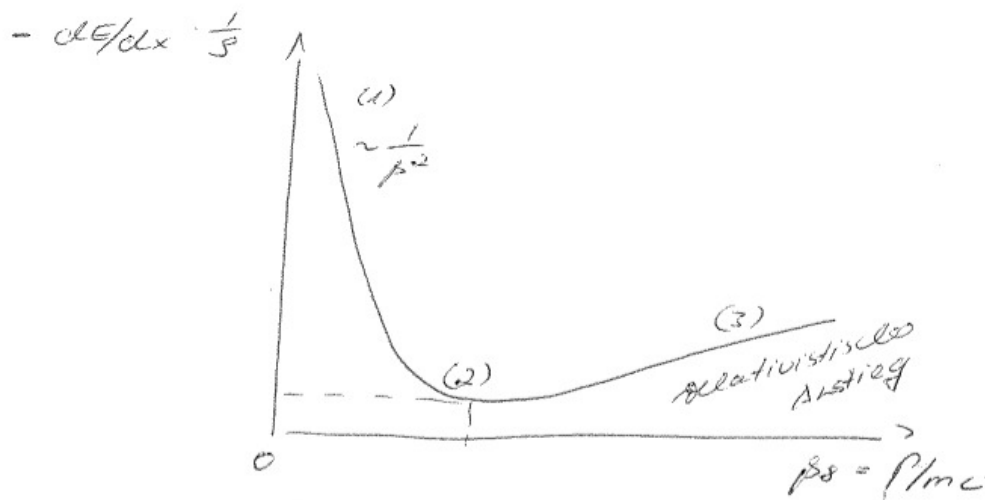
I : mittleres Ionisationspotential des Mediums für Elektronen
(für $Z > 20$: $I \approx Z \cdot 10 \text{ eV}$)

Die Größe $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx}$ hat eine geringere Materialabhängigkeit.

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx} = K \cdot \frac{Z}{A} \cdot z^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \left(\ln \frac{2 \cdot m_e^2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2}{I} - \beta^2 \right) \quad (56)$$

$$K = 0.307 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$$

Charakteristische Kurve:

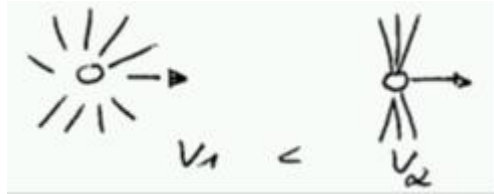


(1) Bei kleinen $(\beta \cdot \gamma)$: $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx} \sim \frac{1}{\beta^2}$
Starke Ionisation durch langsame Teilchen

(2) Minimum für $\beta \cdot \gamma = p/mc \approx 3 - 4$

$$\left(-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx} \right)_{\min} \approx 1 - 2 \frac{\text{MeV cm}^2}{g}$$

(3) Relativistischer Anstieg für große $\beta\gamma$ Werte



Durch Lorentzkontraktion nimmt die transversale E-Feld Komponente der bewegten Ladung zu, d.h. das Medium sieht effektiv eine höhere Ladung. Der relativistische Anstieg ist aber ein sehr kleiner Effekt. In 1. Näherung können Teilchen mit $\beta\gamma > 3$ als MIP (minimal ionising particle) betrachtet werden.

Die empirische Bethe-Bloch Formel beschreibt den mittleren Energieverlust im Bereich $\beta\gamma$ in $[0.1, -\infty]$ auf $\pm 5\%$ genau. Allerdings schwankt insbesondere bei dünnen Absorberschichten der tatsächliche Energieverlust um den Mittelwert. Die Verteilung in dünnen Absorberschichten kann näherungsweise mit einer Landauverteilung beschrieben werden.

Beispielaufgabe:

- Schätzen Sie den Energieverlust eines positive geladenen Pions mit der Masse $m_{\pi^+} = 139,57 \text{ MeV}/c^2$ und einem Impuls von $500 \text{ MeV}/c$ in einem Plexiglasplatte der Dichte $\rho = 1.2 \text{ g}/\text{cm}^3$ und der Dicke 2 cm ab.

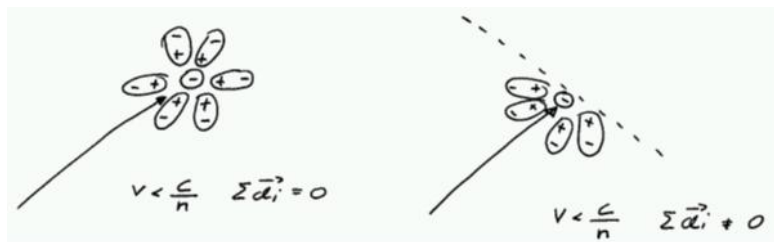
Ein Teilchen gilt als minimal ionisierendes Teilchen (MIP: minimal ionizing particle), wenn $\beta \cdot \gamma = \frac{p}{m \cdot c}$ zwischen 2 und 4 liegt. Das ist für das betrachtete Pion der Fall: $\beta \cdot \gamma = 500 / 139,57 \sim 3,6$. Der mittlere Energieverlust pro Dichte für MIP-Teilchen liegt bei $\frac{-dE}{dx} \cdot \frac{1}{\rho} = 1.4 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}}$. d.h der Energieverlust bei gegebener Dichte und Dicke des Materials ist $-E = 1.4 \cdot 1.2 \cdot 2 \text{ MeV} \sim 3.4 \text{ MeV}$. Das Pion verliert ca. eine Energie von $3,4 \text{ MeV}$ beim Durchgang durch die Plexiglasplatte.

- Deponiert ein Proton mit doppeltem Impuls mehr oder weniger Energie?

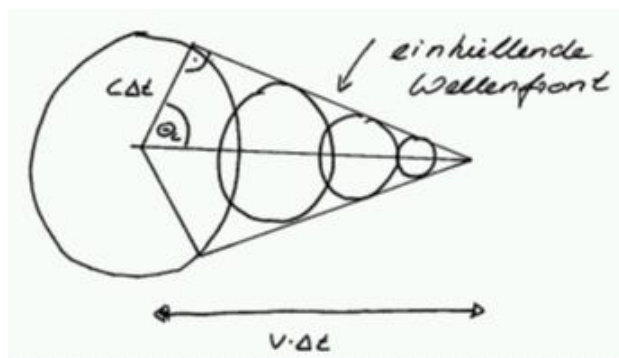
$\beta \cdot \gamma = \frac{p}{m \cdot c} \sim 1000/1000 = 1$. Das Proton ist kein MIP-Teilchen sondern verliert wesentlich mehr Energie als das Pion.

3.2 Cherenkov Strahlung

Geladene Teilchen polarisieren beim Durchgang durch Materie ihre Umgebung. Wenn das Teilchen ruht bzw. sich langsam bewegt, ist die Umgebung vor, hinter, rechts und links des Teilchens vollständig polarisiert. Die Summe aller Dipolmomente hebt sich auf und ergibt null. Für Teilchen mit einer Geschwindigkeit v größer als die Lichtgeschwindigkeit im Medium ($v > \frac{c}{n}$; n : Brechungsindex des Mediums) bewegt sich das Teilchen schneller als seine eigene EM Welle sich ausbreitet. D.h. die Region vor dem Teilchen ist nicht polarisiert. Das Gesamtdipolmoment \vec{d} ist damit ungleich null. Das bedeutet, dass Strahlung ausgesendet wird, sogenannte **Cherenkov-Strahlung**. Das ist kein langsam einsetzender Effekt sondern ein Schwell-Effekte: Erst ab dem Moment wo $v > \frac{c}{n}$ wird Strahlung emittiert.



In einem vereinfachtes Bild nehmen wir an, dass das Teilchen an jedem Punkt entlang seiner Bahn eine Elementarwelle aussendet. Diese Wellen breiten sich kugelförmig mit der Geschwindigkeit $c' = \frac{c}{n}$ aus. Das Teilchen breitet sich mit der Geschwindigkeit v aus. Daraus ergibt sich eine kegelförmige einhüllende Wellenfront.



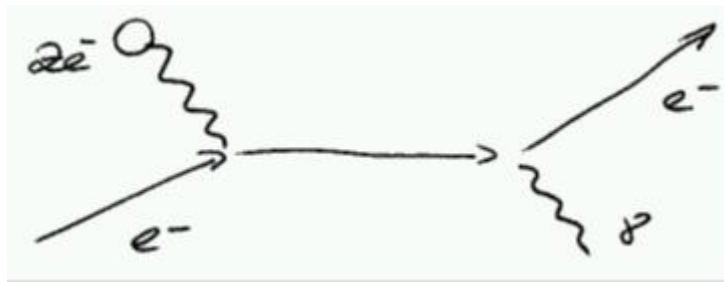
Der Cherenkov-Winkel θ_c ist gegeben durch: $\cos\theta_c = \frac{c}{v} \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{1}{\beta n}$

Die Messung des Cherenkov-Winkels θ_c gibt Aufschluß über die Geschwindigkeit des Teilchens. Zusammen mit einer Messung des Teilchen-Impulses kann so auf die Teilchenmasse und damit auf die Teilchensorte rückgeschlossen werden. Der Cherenkov-Effekt wird oft in Detektoren zur PID (= particle identification) benutzt, d.h. um die Teilchensorte zu bestimmen.

3.3 Energieverlust durch Bremsstrahlung

Neben Energieverlust durch Ionisation gibt es noch einen weiteren Effekt wie geladene Teilchen Energie verlieren.

Die Teilchen werden im Coulombfeld des Kerns beschleunigt und emittieren



Bremsstrahlung. Der Energieverlust wird beschrieben durch die charakteristische Größe X_0 (Strahlungslänge)

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0} \quad (57)$$

$$E(x) = E_0 e^{-x/X_0} \quad (58)$$

Die Strahlungslänge hängt von der Ladung des Kerns Z und der Masse des Teilchens m ab: $\frac{1}{X_0} \sim \frac{Z^2}{m^2}$

Der Energieverlust durch Bremsstrahlung ist für sehr hochenergetische Teilchen ($-dE/dx \propto E$) und für Elektronen relevant ($X_0 \propto m^2$), da Elektronen im Vergleich zu den anderen Teilchen sehr leicht sind ($m_e = 511 \text{keV}/c^2$). Eine Strahlungslänge für Myonen ($m_\mu = 105 \text{MeV}/c^2$), das nächst leichtere

Teilchen, ist einen Faktor 40.000 größer als für Elektronen.

$$\frac{X_0(\mu)}{X_0(e)} = \frac{m_\mu^2}{m_e^2} = \left(\frac{105 \text{ MeV}/c^2}{0.511 \text{ MeV}/c^2} \right)^2 \sim 40.000 \quad (59)$$

Das heißt Myonen müssen eine 40.000 mal so lang Strecke im Medium zurücklegen, um die gleiche Energie abzustrahlen wie ein Elektron. Typische Werte für die Strahlungslänge von Elektronen sind:

$$X_0(C) = 18.8 \text{ cm} \quad (60)$$

$$X_0(Al) = 8.9 \text{ cm} \quad (61)$$

$$X_0(Pb) = 0.6 \text{ cm} \quad (62)$$

Tabellierte Werte für Strahlungslängen beziehen sich immer auf Elektronen⁸. Der gesamte Energieverlust beim Durchgang von Materie ist die Summe aus dem Energieverlust durch Ionisation und durch Bremsstrahlung:

$$-\frac{dE}{dx} = (-dE/dx)_{ion} + (-dE/dx)_{Brems}$$

Als kritische Energie wird die Energie definiert bei der der Energieverlust durch Ionisation und durch Bremsstrahlung für Elektronen gleich groß ist:

$$(-dE/dx)_{ion} = (-dE/dx)_{Brems}$$

Für Materialien mit $Z > 13$ ist die kritische Energie näherungsweise gegeben durch $E_c = 550 \text{ MeV}/Z$ (siehe Folien Abb 5.2).

⁸Oft findet man auch statt der Strahlungslänge, die Strahlungslänge mal der Dichte tabelliert (z.B. $X_0(Pb) = 6.37 \text{ g/cm}^2$), was verwirrender Weise ebenfalls als X_0 bezeichnet wird.

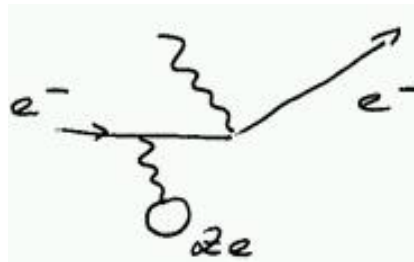
3.4 Wechselwirkung von Photonen mit Materie

(siehe auch Folien Abb. 5.4)

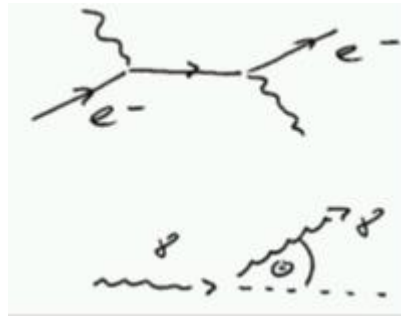
3.4.1 Photoeffekt

Ein Photon schlägt eine Elektron aus dem Atom. Im Atom gebundene Elektronen können die Energie eines Photons vollständig absorbieren, was freie Elektronen aus Impulserhaltungsgründen nicht können. Der Atomkern nimmt dabei den Rückstoß auf. Deshalb ist der Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt für Elektronen in Schalen nahe des Atomkerns besonders groß. Das frei gewordene Photoelektron kann weitere Sekundärelektronen herausschlagen (sogenannte Auger-Elektronen), die in der Regel eine kleiner Energie haben als das primäre Photoelektron. Die leer gewordenen Plätze können durch kann unter Emission von charakteristischer Röntgenstrahlung durch Elektronen aus äußeren Schalen aufgefüllt werden.

Der Photoeffekt dominiert bei niedrigen Photon Energien ($E(\gamma) < 100 \text{ keV}$) die Photon-Wechselwirkungsrate mit Materie.



3.4.2 Compton-Streuung



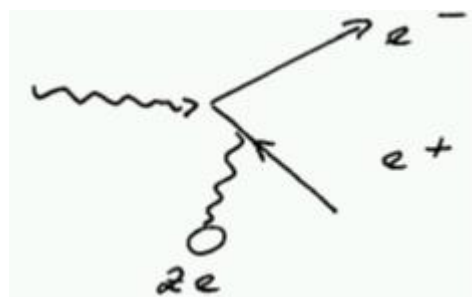
Bei einer Energie von $E(\gamma) \sim 1$ MeV dominiert die Streuung an quasifreien Elektronen, die sogenannte Comptonstreuung. Das Photon mit der Energie E_γ wird absorbiert und ein Photon niedriger Energie E'_γ wird emittiert:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)} \quad (63)$$

Der Winkel θ beschreibt die Richtungsänderung des auslaufenden gegenüber dem einlaufenden Photon. Die Comptonstreuung ist insbesondere in dem Bereich von Photonenergien von 10 keV - 1 MeV relevant.

3.4.3 Paarbildung

Aus ein Photon wird ein Elektron-Positron-Paar gebildet. Aufgrund von



Energie- und Impulserhaltung ist die Elektron-Positron-Paarbildung nur in der Nähe eines Kerns möglich der den Rückstoss aufnimmt. Die kinetische

Schwelle, um ein Elektron-Positron zu erzeugen ist:

$$E_\gamma = 2m_e + \frac{2(m_e c^2)^2}{m_K c^2} \quad (64)$$

$$\geq 1.02 \text{ MeV} \quad (65)$$

Der zweite Term steht für die Energie, die der Kern mit der Masse m_K bei der Rückstreuung aufnimmt.

Es ist auch möglich, dass ein anderes Elektron im Atom den Rückstoß aufnimmt, dann muss entsprechend die Masse des Kerns m_K durch die Elektronenmasse ersetzt werden. Die Feynman-Graphen für Paarbildung und Bremsstrahlung sehen sich ähnlich, im Sinne der Berechnung der Feynman-Regeln sind sie identisch.



Energie- bzw. Intensitätsverlust wird in beiden Fällen durch die material-spezifische Strahlungslänge X_0 beschrieben.

Energieverlust bei Bremsstrahlung: $E(X) = E_0 e^{-x/X_0}$

Intensität der Photonen bei Paarbildung: $I(x) = I_0 e^{-x/X_{Paar}}$

wobei $X_{Paar} = \frac{9}{7} X_0$. Für viele Abschätzungen kann $X_{Paar} = X_0$ angenommen werden. Die Kombination von Bremsstrahlung und Paarbildung führt für hochenergetische Elektronen und Photonen zu elektromagnetische Schauern (siehe Übungsaufgabe).

3.5 Wechselwirkung von Hadronen mit Materie

Neben der Ionisation trägt für hochenergetische Hadronen die starke Wechselwirkung mit den Nukleonen des Absorbermedium (p, n) zum Energieverlust bei. Z.B.:



wobei $n \cdot \pi$ hier für mehrere Pionen steht, die in der Reaktion entstehen können.

Die entstehenden Sekundärteilchen können selbst wieder stark mit dem Medium wechselwirken. Dies führt zur Ausbildung von Teilchen-Schauern. Hadronische Schauer haben größere Fluktuationen in Tiefe, Breite und Teilchenzahl als elektromagnetische Schauer, da es eine größere Bandbreite von möglichen Prozessen gibt die stattfinden können. Hadronische Schauer können z.B. elektromagnetische Schauer beinhalten.

(siehe Folien Abb. 5.5)

Die Hadronische Wechselwirkungslänge λ_{had} setzt sich aus der Wechselwirkungslänge für inelastische (siehe Kapitel 2) und elastische Streuung zusammen und ist in der Regel etwa einen Faktor 10 größer als die elektromagnetische Strahlungslänge X_0 .

3.6 Nachweis von Teilchen in Teilchendetektoren

(siehe Folien)

Detektoren sind in der Regel schalenförmig um den Wechselwirkungspunkt aufgebaut. Jede Detektorlage ist dazu da eine andere Information über die Teilchen zu erhalten. Im Innenbereich sind Detektoren, die die Flugbahn der Teilchen nur minimal stören. Die Teilchen ionisieren das Detektormaterial entlang ihrer Flugbahn. Die Ionen werden z.B. in Nebelkammern sichtbar gemacht oder die entstandenen Ladungsträger (Ionen und Elektronen) werden abgesaugt und ergeben so ein elektrisches Signal (z.B. in Gaskammern). Aus den einzelnen Messpunkten werden dann Spuren rekonstruiert. Liegt zusätzlich ein Magnetfeld an, kann aus der Krümmung der Spur der Impuls bestimmt werden. Detektoren, die den Cherenkov-Effekt ausnützen werden oft zur Teilchenidentifikation eingesetzt. Sie stören ebenfalls nur minimal die Teilchenbahn.

In den äußeren Detektorschalen befinden sich Detektoren die durch Absorption die Energie der Teilchen messen.

Die Energie von Elektronen und Photonen werden in sogenannten elektromagnetischen Kalorimetern nachgewiesen. Aus der Breite und Tiefe des elektromagnetischen Schauers (Kombination aus Bremsstrahlung und Paarbildung) wird auf die Energie des ursprünglichen Photons oder Elektrons geschlossen. Aufgrund der größeren hadronischen Wechselwirkungslänge im Vergleich zur Strahlungslänge benötigt man zur Detektion von Hadronen mittels Hadronischer Schauer massivere Kalorimeter, die befinden sich in den typischen Teilchenphysikexperimenten außerhalb der elektromagnetischen Kalorimeter. Myonen sind zu schwer um signifikant Energie durch Bremsstrahlung zu verlieren, d.h. sie bilden keine elektromagnetischen Schauer. Sie nehmen nicht an der starken Wechselwirkung teil, d.h. erzeugen auch keine hadronischen Schauer. D.h. Myonen werden dadurch indentifiziert, dass sie die einzigen Teilchen sind, die ohne Schauerbildung massive Kalorimeter durchqueren. Sie werden als einzige Teilchen außerhalb der Kalorimeter nachgewiesen.

4 Symmetrien

(siehe auch Diskussion in Mark Thomson, Modern Particle Physics)

Emmy-Noether-Theorem (1917):

Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße

Erinnerung an die quantenmechanische Definition einer Erhaltungsgröße:
Eine Observable ist Erhaltungsgröße, wenn für den zugehörigen Operator \hat{O} gilt: $[\hat{H}, \hat{O}] = 0$, d. h. \hat{H} und \hat{O} haben gemeinsame Eigenfunktionen

Wir werden im folgenden das Emmy-Noether Theorem formal diskutieren. Das sollte bereits aus der QM bekannt sein. Da wir aber später sehr analog argumentieren werden wenn, wir innere Symmetrien z.B. mit erhaltenen Quantenzahlen wie Ladung oder Farbladung verknüpfen, wiederholen wir den Formalismus an dieser Stelle.

Wir nehmen an eine physikalische Beobachtung sei invariant unter der Transformation U , das heißt U ist eine Symmetrietransformation.

Die Wellenfunktion Ψ wird unter U wie folgt transformiert:

$$\Psi(t, \vec{x}) \rightarrow \Psi'(t, \vec{x}) = U\Psi(t, \vec{x}) \quad (67)$$

Die Normierungsbedingung die für Ψ gilt muss auch für Ψ' gelten⁹:

$$\int \Psi^\dagger(t, \vec{x})\Psi(t, \vec{x})d^4x = 1 \quad (68)$$

$$\Rightarrow \int \Psi'^\dagger(t, \vec{x})\Psi'(t, \vec{x})d^4x = \int \Psi^\dagger(t, \vec{x})U^\dagger U\Psi(t, \vec{x})d^4x = 1 \quad (69)$$

$$\Rightarrow U^\dagger U = 1 \quad \Rightarrow U \text{ ist unitär!}$$

$$\int \Psi(t, \vec{x})^\dagger H\Psi(t, \vec{x})d^4x = \int \Psi'^\dagger(t, \vec{x})H\Psi'(t, \vec{x})d^4x \quad (70)$$

$$= \int \Psi^\dagger(t, \vec{x})U^\dagger H U\Psi(t, \vec{x})d^4x \quad (71)$$

⁹Das Integral $\int \dots d^4x$ geht über alle vier Koordinaten des 4er Vektors, d.h. über Zeit und drei Raumkoordinaten.

Beim ersten Gleichheitszeichen wurde die Invarianz unter der Transformation U ausgenutzt.

Daraus folgt $H = U^\dagger H U$ und somit $[H, U] = 0$.

Wir betrachten eine infinitesimal kleine Transformation:

$$U = 1 + i\epsilon\hat{G} \quad (72)$$

Hierbei wir \hat{G} Generator der Transformation genannt.

$$U^\dagger U = (1 - i\epsilon\hat{G}^\dagger)(1 + i\epsilon\hat{G}) = 1 + i\epsilon(\hat{G} - \hat{G}^\dagger) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Da die Gleichung für alle kleinen Werte von ϵ gilt, muss gelten:

$$\hat{G} - \hat{G}^\dagger = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{G} = \hat{G}^\dagger$$

Daraus folgt, dass \hat{G} hermitesch ist. Das bedeutet es gibt eine \hat{G} zugeordnete Observable g .

$$[H, U] = 0 \Rightarrow [H, \hat{G}] = 0 \quad (73)$$

Die Observable g ist eine Erhaltungsgröße

Eine finite Transformation \hat{G} kann als Serie von infinitesimal kleineren Transformationen $\frac{1}{n}\hat{G}$ dargestellt werden.

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{1}{n} \hat{G}\right)^n = e^{i\hat{G}}$$

Wir haben gezeigt, dass wenn eine physikalische Beobachtung invariant unter einer Transformation U ist, dann ist die Observable g die zu dem Generator \hat{G} der Transformation gehört eine Erhaltungsgröße. Das ist genau (etwas formaler dargestellt) die Aussage des Emmy-Noether Theorems!

4.1 Emmy-Noether Theorem am Beispiel von Raum-Zeit Symmetrien

Nun wenden wir den oben eingeführten allgemeinen Formalismus auf das Beispiel einer räumliche Translation an.

$U\Psi(t, \vec{x}) = \Psi(t, \vec{x} + \Delta x)$ ist eine endliche Verschiebung in x Richtung¹⁰. Eine infinitesimal kleine Verschiebung um den Wert δx in x Richtung kann mit Hilfe einer Taylorentwicklung dargestellt werden:

$$\Psi'(t, \vec{x}) \sim \Psi(t, \vec{x}) + \delta x \frac{d}{dx} \Psi(t, \vec{x}) \quad (74)$$

$$= \left(1 + \delta x \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \right) \Psi(x, t) \quad (75)$$

Hierbei wird die Ableitung nach x durch den Impulsoperator $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$ ausgedrückt.

Die endliche Verschiebung, um den Wert Δx kann entsprechend als eine Reihe von infinitesimal kleiner Verschiebungen $\delta x = \frac{1}{n} \Delta x$ dargestellt werden:

$$\Psi'(t, \vec{x}) = \Psi(t, \vec{x} + \Delta x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{n} \frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \right)^n \right] \Psi(x, t) \quad (76)$$

$$= e^{\left(\frac{i}{\hbar} \Delta x \hat{p}_x \right)} \Psi(t, \vec{x}) = U \Psi(t, \vec{x}) \quad (77)$$

Aus der Invarianz unter Translation in x -Richtung und dem Emmy-Noether Theorem bzw. entsprechend der Argumentation in Eq. 67-73 folgt, dass die Observable, die zu dem Generator der Transformation U gehört eine Erhaltungsgröße ist. Das bedeutet die x -Komponente des Impulses p_x ist erhalten. ($[H, \hat{p}_x] = 0$). Aus einer Verschiebung in beliebige Richtung kann die Erhaltung des Impulses, \vec{p} hergeleitet werden.

Analog kann man aus der Invarianz physikalischer Beobachtung unter Rotation des Koordinatensystems herleiten, dass der Drehimpuls erhalten ist. Aus der Invarianz unter der Transformation in der Zeit folgt entsprechend die Erhaltung der Energie.

¹⁰Wir diskutieren hier der Einfachheit halber die Verschiebung in x -Richtung, eine Verschiebung in beliebige Richtung kann analog betrachtet werden.

4.2 Warum sind Symmetrien so interessant?

- Die Teilchenphysik ist auf der Suche nach der "Masterformel". Der zur Zeit vielversprechendste Ansatz des "Models of everything" ist das Standard Model, auch wenn es einige Fragen unbeantwortet läßt. Deshalb gibt es zahlreiche fundamentalere Theorien, die versuchen diese Problem zu lösen. Bisher sind bereits viele experimentell ausgeschlossen aber noch jedoch keine experimentelle bestätigt worden. Die Masterformel beschreibt alle Symmetrien und Erhaltungsgrößen, d.h. entsprechend erhofft man sich aus dem Studium von Symmetrien und Erhaltungsgrößen Hinweise auf die potentielle Masterformel zu bekommen, bzw. kann potentielle Kandidaten einer Masterformel testen.
- Die Beschreibung von Wechselwirkungen in der Quantenfeldtheorie baut auf Symmetriegruppen (sogenannten Eichgruppen auf). Dieses Konzept wird in der Mastervorlesung Particle Physics und in der Standardmodell Vorlesung ausführlich diskutiert werden, geht aber über den Stoff dieser Vorlesung hinaus
- Das Studium von Symmetrien in der Teilchenphysik hat in der Vergangenheit bereits mehrfach entscheidende Hinweise auf physikalische Gesetzmässigkeiten geliefert. Zum Beispiel wurden in den 50 Jahren viele Teilchen beobachtet (Stichwort Teilchen-Zoo). Quarks waren zu dem Zeitpunkt noch unbekannt, so dass die Physiker anfiengen die beobachteten Teilchen nach ähnlichem ("symmetrischen") Verhalten zu sortieren (z. B. ähnliche Massen des Protons und des Neutrons, oder sehr ähnliche Massen der Pionen (π^+ , π^0 , π^-)). Daraus ergaben sich Erhaltungsgrößen wie der Isospin (siehe später).

4.3 Klassen von Symmetrien

Neben den oben diskutierten **Raum-Zeit-Symmetrien**, die zu Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung und Energieerhaltung führen gibt es auch sogenannte **inner Symmetrien**. Z.B eine Phasentransformation ist eine innere Symmetrie:

$$\Psi'(t, \vec{x}) = e^{i\phi} \Psi(t, \vec{x}) \quad (78)$$

Die Raum-Zeit Symmetrien und die Phasentransformation sind so-genannte **kontinuierliche Symmetrien**. D.h. wir können eine beliebig große Verschiebung in der Zeit oder dem Ort oder in der Phase betrachten. Kontinuierliche Symmetrien führen zu **additiven Erhaltungsgrößen**. Betrachten wir z.B. die Reaktion $a + b \rightarrow 1 + 2$ dann gilt Energieerhaltung, d.h.

$$E(a) + E(b) = E(1) + E(2) \quad (79)$$

bzw. Impulserhaltung

$$\vec{p}(a) + \vec{p}(b) = \vec{p}(1) + \vec{p}(2). \quad (80)$$

Die **Summe** der Energien im Anfangs- und Endzustand und die **Summe** der Impulse bleibt erhalten.

Daneben gibt es **diskrete Symmetrien**, die zu **multiplikativen Erhaltungsgrößen** führen. Das sind z.B.

- Raumspiegelung: $\Psi'(t, \vec{x}) = \Psi(t, -\vec{x})$,
- Zeitumkehr: $\Psi'(t, \vec{x}) = \Psi(-t, \vec{x})$ und
- Ladungskonjugation: $q \rightarrow -q$, aus Teilchen werden Antiteilchen und umgekehrt.

4.4 Innere Symmetrien

4.4.1 1-D Phasentransformation

$$\Psi'(t, \vec{x}) = e^{i\rho} \Psi(t, \vec{x}) \quad (81)$$

Beobachtbare Größen sind immer mit dem Betragsquadrat der Wellenfunktion verbunden. D.h. die Physik ist invariant unter einer globalen (\equiv von Raum und Zeit unabhängigen) Phasentransformation. Diese scheinbar sehr triviale Feststellung führt zu einer sehr fundamentalen Beobachtung, nämlich die Erhaltung von Ladung. Hier bedeutet ‐Ladung‐ nicht nur elektrische Ladung sondern generalisierte Ladung. Die elektrische Ladung bildet gemeinsam mit anderen simultan beobachtbaren Eigenschaften (z.B. Spin, Baryonenzahl, Leptonenzahl, ...) einen Satz von Quantenzahlen, die den Teilchenzustand festlegen.

Der elektrische Ladungsoperator \hat{Q} wird wie folgt definiert:

$$\hat{Q}\Psi(t, \vec{x}) = q\Psi(t, \vec{x}) \quad (82)$$

wobei q folgende Werte annimmt:

$q = 1$ für Teilchen mit einer negativen Elementarladung (z.B. Elektron)

$q = -1$ für Teilchen mit einer positiven Elementarladung (z.B. Positronen)

Analog zu Impulsoperator läßt sich auch mit \hat{Q} einer Transformation U definieren

$$U = e^{-i\alpha\hat{Q}} \quad (83)$$

angewandt auf den Zustand $\Psi(t, \vec{x})$:

$$U\Psi(t, \vec{x}) = e^{-i\alpha\hat{Q}}\Psi(t, \vec{x}) = e^{-i\alpha q}\Psi(t, \vec{x}) \quad (84)$$

Kommutiert der Hamiltonoperator mit U :

$$i\hbar\frac{d}{dt}(e^{-i\alpha\hat{Q}}\Psi(t, \vec{x})) = e^{-i\alpha\hat{Q}}i\hbar\frac{d}{dt}\Psi(t, \vec{x}) \quad (85)$$

so ist die elektrische Ladung erhalten.

(Für den Beweis, dass die Erhaltung der elektrischen Ladung aus der Invarianz unter einer globalen Phasentransformation folgt siehe z.B. Mark Thomson, Modern Particle Physics)

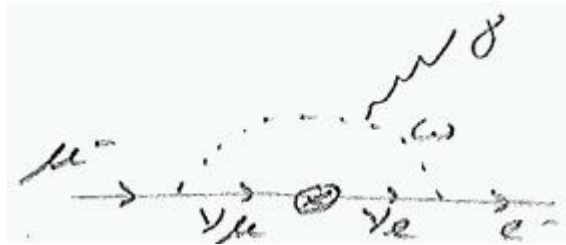
Analog zum Ladungsoperator können weitere verallgemeinerte Ladungen (\equiv Quantenzahlen) eingeführt werden: Z.B. Leptonenzahloperator \hat{L} und Baryonenzahloperator \hat{B} was entsprechend zur Erhaltung der zugehörigen additiven Quantenzahlen führt.

Leptonenzahlerhaltung

Lepton-Flavour L_e, L_μ, L_τ

Lepton-Zahl $L = L_e + L_\mu + L_\tau$

Wenn man von Neutrinomischung ($\nu_i \rightarrow \nu_j$) absieht (die $m(\nu) \neq 0$ voraussetzt und nicht im Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben wird),



so sind experimentelle Befunde konsistent mit Annahme der Leptonflavour-erhaltung.

Beispiel:

	μ^-	\rightarrow	e^-	$+$	$\bar{\nu}_e$	$+$	ν_μ
L_μ	+1		0		0		+1
L_e	0		+1		-1		0
L	+1				+1		

Die Leptonenzahl ist an allen Vertices aller Wechselwirkungen erhalten. Aufgrund der Existenz von Neutrinomischung kann es aber zu leptonenzahlverletzenden Prozessen kommen. Für den Zerfall $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ wird ein Verzweigungsverhältnis von ca. 10^{-53} vorhergesagt. Die experimentellen Schranken liegen derzeit bei 10^{-11} .

Baryonenzahlerhaltung

Die Baryonenzahl B ist definiert als:

$$B = \frac{nq - n\bar{q}}{3} \tag{86}$$

wobei q die Anzahl der Quarks und \bar{q} die Anzahl der Antiquarks sind, die in einem Teilchen enthalten sind.

Baryonen: $p|uud\rangle, n|udd\rangle, \Lambda|uds\rangle, \dots \Rightarrow B = +1$

Antibaryonen: $\bar{p}|\bar{u}\bar{u}\bar{d}\rangle, \bar{n}|\bar{u}\bar{d}\bar{d}\rangle, \bar{\Lambda}|\bar{u}\bar{d}\bar{s}\rangle \Rightarrow B = -1$

Viele Erweiterungen des Standardmodells sagen Baryonenzahlverletzung voraus, das SM selbst läßt keine Baryonenzahlverletzung zu. Jedoch gab es beim Urknall die gleiche Anzahl von Baryonen und Antibary-

onen. In unserem heutigen Materie dominierten Universum beobachten wir aber einen Überschuss an Protonen + Neutronen (Materie). D.h. es muß Baryonenzahlverletzung geben!

Experimentell wird die Baryonenzahlerhaltung z. B. durch die Suche nach dem Protonzerfall getestet. Da das Proton das leichteste Baryon ist kann es nur unter Verletzung der Baryonzahlerhaltung zerfallen. Zum Beispiel:

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+ \quad (\text{verletzt } B \text{ und } L)$$

Das derzeitige Limit auf diesen Zerfall ist $\tau(p) > 10^{32}$ Jahre

4.4.2 2-D Phasentransformation

Wiederholung: Spin für nicht relativistische Fermionen (z.B. e^- , Quarks)

$$\text{2-D Spinor } \Psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Psi_0(t, \vec{x})$$

$$\text{Spin-Up Fermion: } \Psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Psi_0(t, \vec{x})$$

$$\text{Spin-Down Fermion: } \Psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Psi_0(t, \vec{x})$$

Ohne äußeres B-Feld sind Spin-up und Spin-down Fermionen nicht unterscheidbar.

⇒ Invarianz unter Rotation (Phasentransformation) im Spin-Raum

$$\Psi(t, \vec{x}) \rightarrow \Psi'(t, \vec{x}) = U\Psi(t, \vec{x}) = U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Psi_0(t, \vec{x})$$

mit $U = e^{i\vec{\alpha}\vec{\sigma}}$,

wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ die Pauli-Matrizen sind.

Spin für zusammengesetzte Systeme am Beispiel Positronium (gebundener e^+e^- Zustand)

Gesamtspin: $J = 1$ Triplett

$$J_z = 1 : \quad |\uparrow\uparrow\rangle \quad (87)$$

$$J_z = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (88)$$

$$J_z = -1 : \quad |\downarrow\downarrow\rangle \quad (89)$$

Gesamtspin: $J=0$ Singulett

$$J_z = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (90)$$

In der oben gegebenen Schreibweise bezeichnet der erste Pfeil die Spinorientierung (z-Komponente) des ersten Teilchens (Elektrons) und der zweite Pfeil die Spinorientierung des zweiten Teilchens (Positron). Alternativ werden Spinzustände auch mit $|J, J_z\rangle$ bezeichnet. Die Triplettzustände sind symmetrisch gegen Vertauschung von Elektron und Positron ($1 \leftrightarrow 2$).

Der Singulettzustand ist antisymmetrisch gegen Vertauschung.

Starker Iso-Spin

Der Starke Iso-Spin wurde von Heisenberg für Protonen und Neutronen eingeführt. Für die starke Wechselwirkungen erscheinen beide Teilchen als zwei verschiedene Zustände des gleichen Teilchens (Nukleon). Das Konzept macht nur Sinn, wenn die EM Wechselwirkung ignoriert wird und $m(p) \sim m(n)$ (was erfüllt ist).

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$p = |1/2, 1/2\rangle \quad (91)$$

$$n = |1/2, -1/2\rangle \quad (92)$$

In dieser Schreibweise bezeichnet die erste Komponente den gesamten Isospin I und die dritte Komponente, die z -Komponente des Isospins I_z . Das Proton und Neutron bilden ein Isospindoublett. Die Notation entspricht der des Spins, jedoch wird hier nicht der Spinraum sondern der Isospinraum betrachtet. Auch wenn die beiden Systeme mathematisch gleich behandelt werden, ist Isospin kein Drehimpuls sondern eine unabhängige Quantenzahl der Teilchen.

Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Rotation im Isospin-Raum, d.h. die starke WW erhält den Isospin.

Ähnlich zu dem Doublett (p, n) kann man die drei Pionen $\pi^+ = |u\bar{d}\rangle$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$ und $\pi^- = |d\bar{u}\rangle$ als Isospin-Triplett auffassen.

$$\pi^+ = |1, 1\rangle \quad (93)$$

$$\pi^0 = |1, 0\rangle \quad (94)$$

$$\pi^- = |1, -1\rangle \quad (95)$$

Aus Symmetriegründen muss es auch Singulett-Zustand geben: $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$

Isospin für zusammengesetzte Systeme:

Triplett-Zustand $I = 1$:

$$I_3 = 1 : |pp\rangle \quad (96)$$

$$I_3 = 0 : \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle) \quad (97)$$

$$I_3 = -1 : |nn\rangle \quad (98)$$

Singulett-Zustand $I = 0$:

$$I_3 = 0 : \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle) \quad (99)$$

(Im Gegensatz zum Spin/Drehimpuls redet man von der dritten Komponente I_3 und nicht von der z -Komponente).

Totale Wellenfunktion eines 2-Nukleonensystems:

$$\Psi_{tot} = \Phi_{Raum} \cdot \alpha_{Spin} \cdot \chi_{isospin}$$

Die Gesamtwellenfunktion ist das Produkt aller Wellenfunktionen, der für das Teilchen relevanten Quantenzahlen.
Nukleonen sind Fermionen, d.h. die Gesamtwellenfunktion eines 2-Nukleonensystems muss antisymmetrisch sein.

Deuteron d ist Kombination aus p und n , Spin $J = 1$, rel. Drehimpuls $l = 0$ (Grundzustand)

Φ_{Raum} : sym. wegen $l = 0$

α_{Spin} : sym. wegen $J = 1$

daraus folgt dass χ_{iso} antisymmetrisch sein muss $\rightarrow |I, I_z \rangle = |0, 0 \rangle$

$$\Rightarrow |d \rangle = |I = 0, I_z = 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|np \rangle - |pn \rangle)$$

Isospinerhaltung der starken WW

Isospinerhaltung wird oft benutzt um Wechselwirkungsraten zu vergleichen.
z.B. die beiden Reaktionen $p + p \rightarrow d + \pi^+$ und $p + n \rightarrow d + \pi^0$:

		p	+	p	→	d	+	π ⁺
(1)	I	1/2		1/2		0		1
	I ₃	+1/2		+1/2		0		+1
		p	+	n	→	d	+	π ⁰
SW (2)	I	1/2		1/2		0		1
	I ₃	+1/2		-1/2		0		0

$p + n$ können zu $|I = 1, I_3 = 0 \rangle$ oder zu $|I = 0, I_3 = 0 \rangle$ koppeln.
Jedoch nur für $I = 1$ Zustand ist die Reaktion möglich. D.h. in 50% der Fälle koppeln p und n zu einem Isospinzustand der die Reaktion nicht erlaubt. D.h. die Reaktion (2) ist nur halb so wahrscheinlich wie die Reaktion (1)¹¹.

Bemerkung:

- Isospin Symmetrie ist für EM WW nicht anwendbar $q(p) \neq q(n)$

¹¹Unter der richtigen Annahme, dass alle Isospinzustände gleich wahrscheinlich sind.

- Isospin ist in der schwachen WW verletzt (mehr dazu später in der Vorlesung)
- Das Konzept des starken Isospins stammt aus der Zeit in der Quarks noch nicht bekannt waren. Heute benutzt man statt dessen oft Quarkflavour-Quantenzahlen: U, D, C, S, T, B
Diese QZ sind jeweils 1 für die entsprechend Quarks und -1 für die zugehörigen Antiquarks. Ein u Quark hat den Isospin $|1/2, 1/2\rangle$ ein d Quark den Isospin $|1/2, -1/2\rangle$ alle anderen Quarks haben keinen Isospin. Die starke + EM WW erhalten den Quarkflavour. Die schwache WW verletzt auch diese QZ.

4.5 Diskrete Transformationen (multiplikative QZ)

P: Raumspiegelung $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$
 T: Zeitumkehr $t \rightarrow -t$
 C: Ladungskonjugation $q \rightarrow -q$

4.5.1 Raumspiegelung

Die zweimalige Raumspiegelung führt zur Identität.

$$P^2\Psi(t, \vec{x}) = P\Psi(t, -\vec{x}) = \Psi(t\vec{x}) \quad (100)$$

Wenn $\Psi(t, \vec{x})$ Eigenzustand des Paritätsoperators ist, dann gilt:

$$P^2\Psi(t, \vec{x}) = \eta_p^2\Psi(t, \vec{x}) = \Psi(t, \vec{x}) \quad (101)$$

D.h. die Eigenwert η_p des Paritätsoperators können nur ± 1 sein

Beispiel EM Übergänge:

Das Atom wird beschrieben durch ein rotationssymmetrisches Potential, d.h. die Lösungen haben die Form $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y^{lm}(\theta, \varphi)$

Paritätstransformation:

$$r \rightarrow r$$

$$\theta \rightarrow \theta + \pi$$

$$\varphi \rightarrow \varphi + \pi$$

$$PY^{lm}(\theta, \varphi) = Y^{lm}(\theta + \pi, \varphi + \pi) = (-1)^l Y^{lm}(\theta, \varphi)$$

Der Elektrische Dipolübergang $A^* \rightarrow A + \gamma$ ist mit Emission eines Photons γ verbunden. Der relative Drehimpuls (l_{rel}) zwischen dem Photon und A ist null. Aus Auswahlregeln $\Delta l = 1$ folgt:

$$\eta_p(A^*) = \eta_p(A) \cdot (-1) = \eta_p(A) \cdot \eta_p(\gamma) \cdot (-1)^{l_{rel}=0} \quad (102)$$

$$(103)$$

$$\Rightarrow \eta_p(\gamma) = -1$$

Beispiel Zerfall eines Teilchens $X \rightarrow A + B$:

$$\eta_p(X) = \eta_p(A) \cdot \eta_p(B) \cdot (-1)^l$$

l : relativer Drehimpuls zwischen A und B

$l = 0$ Grundzustand

$l = 1, \dots$ angeregter Zustand

Achtung: Wie wir später sehen werden ist die Parität nur in der EM und der starken Wechselwirkung erhalten. D.h. die obenstehende Gleichung gilt nur für EM und starke Zerfälle!

Elementarteilchen sind Eigenzustände des Paritätsoperators und haben einen Paritätseigenwert, die sogenannte intrinsische Parität. Sie ist erhalten solange die Teilchen nicht an schwach Prozessen teilnehmen. Die Theorie sagt nur das Produkt aus der Parität eines Fermions f und seines Antiteilchens \bar{f} voraus, z.b. bei der Paarproduktion via der starken Wechselwirkung.

$$\eta_P(f) \cdot \eta_P(\bar{f}) = -1 \quad (104)$$

Die Wahl der Parität für Fermionen bzw. Antifermionen ist Konvention und wurde positive für Fermionen (Quarks und negativ geladenen Leptonen)

$\eta_P(q) = \eta_P(\ell^-) = +1$ und negative für Antifermionen (Antiquarks und positiv geladene Leptonen) $\eta_P(\bar{q}) = \eta_P(\ell^+) = -1$ gewählt. Da Neutrinos nur an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen macht es keinen Sinn eine intrinsische Parität für Neutrinos zu definieren.

4.5.2 Ladungskonjugation C

Die Ladungskonjugation C wird auch C -Parität genannt.

$$C|\text{Teilchen}\rangle = \eta_C|\text{Antiteilchen}\rangle$$

η_C ist eine beliebige Phase, wenn Teilchen kein C Eigenzustand ist. Antiteilchen haben die gleiche Masse, die gleiche Lebensdauer und den gleichen Spin wie ihre Partner-Teilchen. Jedoch sind alle Quantenzahlen wie Ladung, Isospin, Baryonenzahl ... invertiert (mit -1 multipliziert).

Wenn Teilchen = Antiteilchen, dann ist $\eta_C = \pm 1$ z. B.:

$$C|\gamma\rangle = (-1)|\gamma\rangle$$

Der C -Parität von einigen Teilchen muss definiert werden, der Rest ergibt sich dann aus der Betrachtung von Zerfällen. Das Photon ist Quant des EM Feldes, das Feld dreht sich unter Ladungsumkehr um, deshalb ist die C -Parität des Photons als $\eta_C = -1$ definiert.

Der Zerfall des π^0 in zwei Photonen wird beobachtet:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

Daraus folgt das die C -Parität des π^0 $\eta_C(\pi^0) = +1$ ist. Der Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ hingegen ist wegen der Verletzung der C -Parität verboten. Beachte genauso wie für die Parität gilt für die C -Parität ebenfalls, dass sie nur in der EM und der starken Wechselwirkung erhalten ist.

4.5.3 Zeitumkehr T

Einige Beispiele wie Observablen unter Zeitumkehr sich verhalten:

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$$

$$\vec{l} = \vec{r} \cdot \vec{p} \rightarrow -\vec{l}$$

4.6 Paritätsverletzung

Bis 1956 galt P , C und T Erhaltung als Dogma, bevor Yang und Lee feststellten, dass die Erhaltungsgrößen nicht getestet wurden und zahlreiche Test zur P-Erhaltung vorschlugen.

θ/τ Puzzle

Zwei Teilchen θ und τ haben die selbe Masse, die selbe Lebensdauer, die selbe Ladung, aber unterschiedliche Parität. Sie wurden in folgenden Zerfällen beobachtet:

$$\theta \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

$$\tau \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

Der Paritätseigenwert eines Quarks ist $\eta_P(q) = +1$ und die Parität eines Antiquarks is $\eta_P(\bar{q}) = -1$. Damit ist der Paritätseigenwert von Mesonen im Grundzustand ($l = 0$) $\eta_P(q\bar{q}) = -1$ und somit auch der Paritätseigenwert von π^0 , π^+ und π^- .

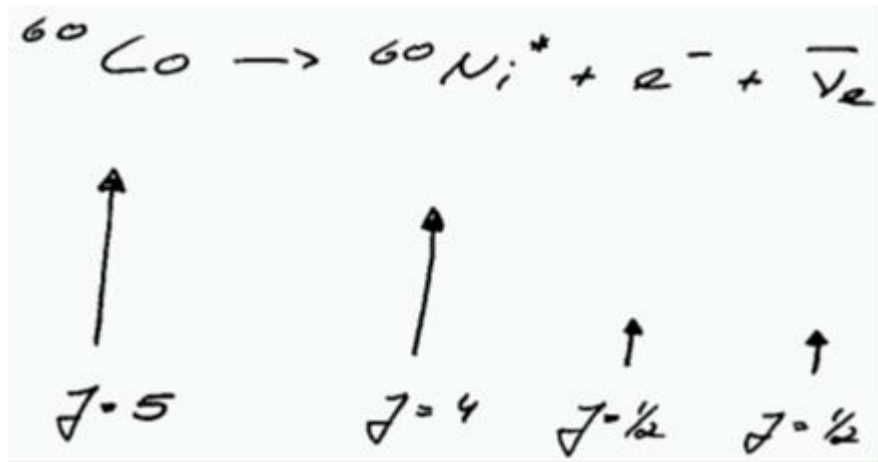
$$\begin{aligned}\eta_P(\theta) &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^0 = +1 \\ \eta_P(\tau) &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^0 = -1\end{aligned}$$

(θ und τ sind im Grundzustand, d.h. der relative Drehimpuls ihrer Quarks ist null, zudem ist der Spin von θ und τ null, d.h. der Gesamtdrehimpuls ist null. Da der Spin der Pionen ebenfalls null ist folgt aus der Gesamtdrehimpulserhaltung, dass der relative Drehimpuls der Pionen im Endzustand ebenfalls null sein muss).

Yang + Lee interpretierten diese Beobachtung als $\theta = \tau$ und folgten daraus, dass die schwache Wechselwirkung Parität verletzt.

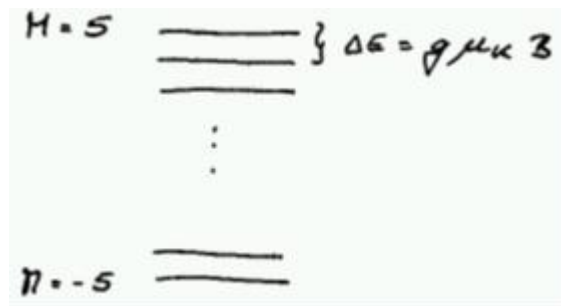
(Die $\theta = \tau$ Teilchen werden heute K^+ genannt).

Das Wu-Experiment

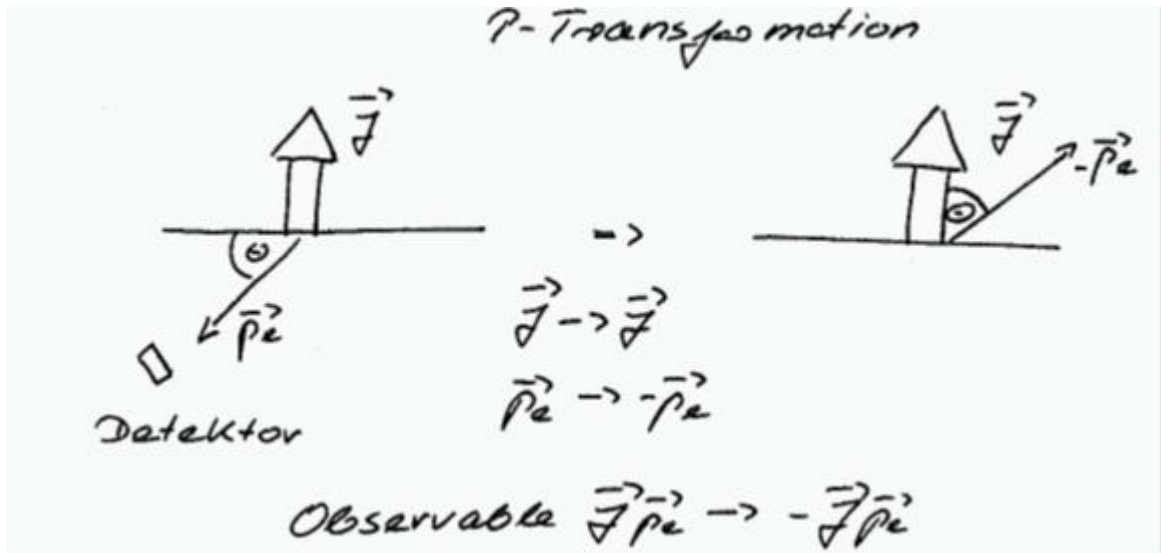


Das Wu-Experiment ist eines der Experimente die von Yang und Lee vorgeschlagen wurden um die Paritätserhaltung zu testen. Sie schlugen die Untersuchung des β -Zerfalls: ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni}^* + e^- + \bar{\nu}_e$ vor.

Spin des ${}^{60}\text{Co}$: $J = 5 \rightarrow$ D.h. die z Komponente M kann die Werte $-5, -4, \dots, 4, 5$ annehmen.



Bei tiefen Temperaturen ist vorwiegend der $M = -5$ Zustand besetzt ($T \approx 10$ mK), d.h. die ${}^{60}\text{Co}$ Probe hat eine wohl definierte Ausrichtung des Spins, d.h. sie ist polarisiert. In dem Experiment werden die Raten der emittierten Elektronen unter einem bestimmten Winkel θ relativ zur Polarisationsachse des Spins gemessen. Unter Paritätstransformation ändert sich der Spin nicht ($P(\vec{J}) = P(\vec{r} \times \vec{p}) = -\vec{c} \times -\vec{x})\vec{J}$, aber der Impuls. D.h. wenn Parität erhalten ist, muss die Rate der gestreuten Elektronen in Richtung des Drehimpulses \vec{J} gleich der Rate der in entgegengesetzte Richtung gestreuten Elektronen sein.



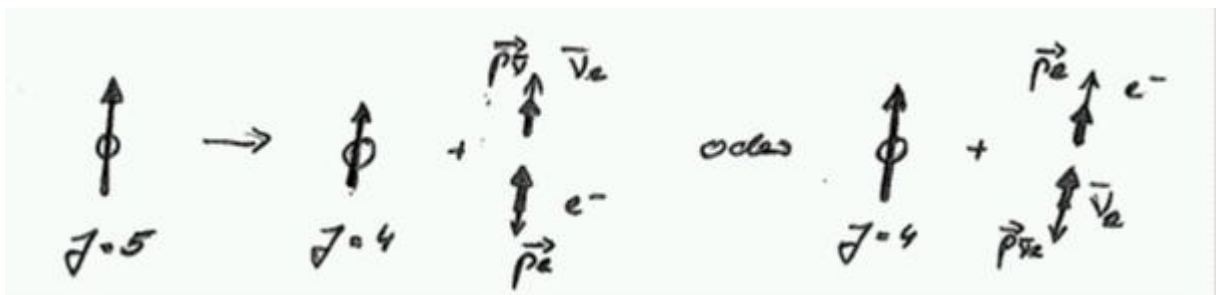
Im Experiment wurde statt den Detektor zu verschieben die Polarisation des B-Feldes gedreht.

Paritätserhaltung bedeutet NICHT, dass das Experiment vor und nach der Paritätstransformation identisch aussieht, sondern es bedeutet dass die gemessenen Raten im Originalexperiment und im paritätstransformierten Experiment gleich sind.

Das Ergebnis dieses Versuches zeigte eindeutig Paritätsverletzung (siehe Folien)

Erklärung:

Das Elektron und das Antineutrino fliegen back-to-back im Ruhesystem des



^{60}Co . Ihr Spin muss parallel zueinanderstehen, damit der Gesamtspin nach

dem Zerfall sich zu dem Gesamtspin vor dem Zerfall ($J=5$) addiert. Aus den beiden Bedingungen ergeben sich zwei mögliche Konfigurationen. Es wird aber nur die erste oben skizzierte Konfiguration beobachtet.

Wir gehen davon aus, dass die Masse des Elektrons in dem Versuch vernachlässigbar ist und betrachten die Helizität der beteiligten Teilchen.

$$\text{Helizität } h = \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p}| |\vec{s}|}$$

$h = -1$ linkshändig (LH)
 $h = +1$ rechthändig (RH)

In der ersten skizzierten Spinorientierung gilt $h(e^-) = -1$ (LH) und $h(\bar{\nu}_e) = +1$ (RH)

In der zweiten skizzierten Spinorientierung gilt $h(e^-) = +1$ (RH) und $h(\bar{\nu}_e) = -1$ (LH)

In weiteren Experimenten konnte ebenfalls bestätigt werden, dass nur LH e^- (oder RH e^+) in schwachen Zerfällen entstehen.

Das bedeutet maximale Paritätsverletzung.

Goldhaber zeigte 1957, dass Neutrinos immer LH und Antineutrinos immer RH sind, was ebenfalls maximaler Paritäts- und C-Paritätsverletzung entspricht.

Nebenbemerkung:

Helizität ist eine Meßgröße, Meßvorschrift $h = \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p}| |\vec{s}|}$. Die Helizität eines Teilchens hängt vom Bezugssystem ab. Wenn das Teilchen $m \neq 0$ hat und damit $v \neq c$, gibt es immer ein "schnelleres" Bezugssystem, indem der Impuls und damit die Helizität das Vorzeichen wechselt.

Es gibt jedoch eine Quantenzahl (Chiralität), die die Werte linkshändig und rechthändig annehmen kann. Für masselose Teilchen ist

linkshändige Helizität = linkshändige Chiralität
 rechthändige Helizität = rechthändige Chiralität

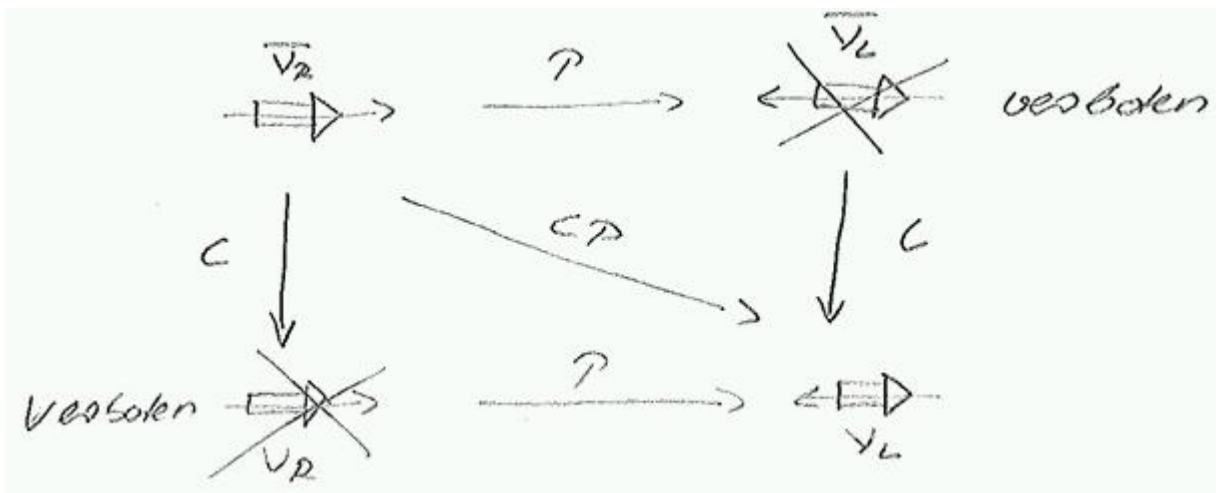
Die W^\pm (Austauschbosonen der schwachen Wechselwirkung) koppeln nur an LH Fermionen und an RH Antifermionen im Sinne von LH und RH Chiralität.

Umso leichter die Teilchen, umso mehr gilt die Gleichheit von Helizität und Chiralität.

Für diese Vorlesung behandeln wir hochenergetische Teilchen als masselos, d.h. nehmen an dass ihre Helizität gleich ihrer Chiralität ist.

4.7 *CP*-Verletzung

Lange Zeit ging man davon aus, dass die schwache Wechselwirkung *P* und *C*, aber nicht die Kombination *CP* verletzt.



Cronin & Fitch zeigte 1964, dass *CP* in K^0 Zerfall verletzt ist. *CP* ist in der EM und der starken Wechselwirkung erhalten aber in der schwachen verletzt.

4.8 *CPT*

Lorenzinvarianz und *CPT* Invarianz ist eine fundamentale Eigenschaft lokaler Feldtheorien. Alle unsere derzeitigen Modelle bauen auf Quantenfeldtheorie auf. Der Nachweis von *CPT* Verletzung hätte gravierende Auswirkungen auf unser Verständnis der Teilchenphysik. Es wird nach *CPT* Verletzung z.B. in Antiwasserstoff-Experimenten am CERN gesucht.

4.9 Zusammenfassung

Die Tabelle zeigt ein Übersicht aller in diesem Kapitel diskutierten Quantenzahlen und in welchen Wechselwirkungen sie erhalten bzw. verletzt sind.

Größe	EM WW	starke WW	schwache WW
Isospin I	-	x	-
Baryonzahl B	x	x	x
Leptonzahl $L_{e/\mu/\tau}^*$	x	x	x
C	x	x	-
P	x	x	-
T	x	x	-
CP	x	x	-
CPT	x	x	x
Ladung Q	x	x	x
Flavourquantenzahlen U, D, C, S, B, T	x	x	-

* Ausnahme Neutrinooszillation

x = ist erhalten - = ist nicht erhalten

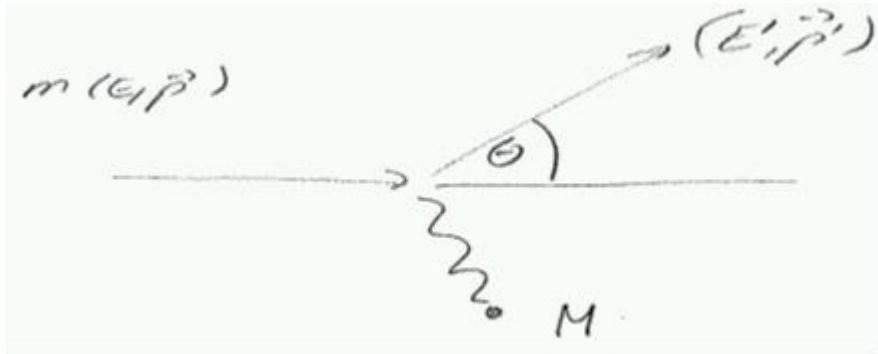
5 Streuung von Elektronen mit Kernen und Nukleonen

Elektron-Proton, Elektron-Neutron und Elektron-Kern Streuexperimente und ihre Interpretation sind der Schlüssel zum Verständnis der Struktur von Kernen und Nukleonen. Die Beschreibung der Streuung hängt von der Energie der einlaufenden Elektronen ab. Jenachdem ob die Energie ausreicht die Ausdehnung des Targets (Kern oder Nukleon) aufzulösen oder ob die Energie sogar ausreicht um das Target anzuregen oder aufzubrechen müssen unterschiedliche Effekte berücksichtigt werden.

5.1 Rutherford-Streuung

Die Rutherfordstreuung beschreibt den Stoss zweier **nicht relativistischer, punktförmiger, spinloser Teilchen**

Das Target kann als punktförmig betrachtet werden, wenn die deBroglie



Wellenlänge des einlaufenden Teilchens größer als der Durchmesser des Targets ist. Zudem wird angenommen, dass die Masse des einlaufenden Teilchens m wesentlich kleiner als die Masse des Targets M ist. D.h. der **Rückstoss des Targets** kann vernachlässigt werden, das Target wird als vor und nach dem Stoss in Ruhe betrachtet.

Die gestrichelten Größen \vec{p}' und E' bezeichnen die Größen des auslaufenden Teilchens nach dem Stoss. Wenn der Rückstoss vernachlässigt werden kann bedeutet das:

$$|\vec{p}| = |\vec{p}'| \Rightarrow E = E' \Rightarrow \frac{v}{c} = \beta = \beta' = \frac{v'}{c}$$

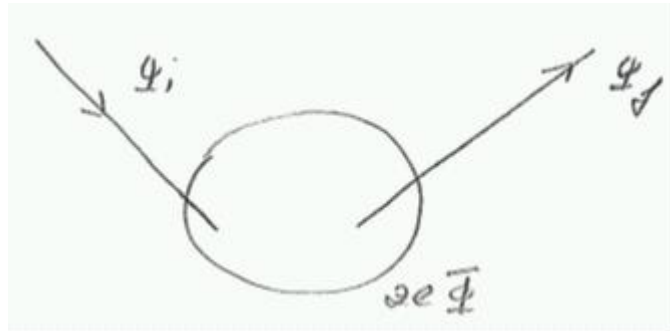
$$\Rightarrow q^2 = \underbrace{(E - E')^2}_{=0} - (\vec{p} - \vec{p}')^2 < 0$$

Man kann zeigen, dass für das Quadrat des 4er Impulsübertrags gilt:

$$q^2 = -4 |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta/2 \quad \Rightarrow \quad |q| = 2 |\vec{p}| \sin \theta/2$$

In diesem Fall (Vernachlässigung des Rückstoss) ist der 4er-Impulsübertrag gleich dem 3er-Impulsübertrag.

$$q^2 = \vec{q}^2$$



Φ : elektrisches Potential des Kerns
 ze : Ladung des einlaufenden Teilchens

Wenn das elektromagnetische Potential des Kerns $V = ze\Phi$ lokalisiert ist (d.h. $V(r) \rightarrow 0$ for $r \rightarrow \infty$), was der Fall für die Coulomb Wechselwirkung ist, können die einlaufenden und auslaufenden Teilchen als freie Teilchen beschrieben werden. Bei der Behandlung nichtrelativistischer Probleme können die Teilchen durch die Wellenfunktion Ψ_i, Ψ_f (ebene Wellen) beschrieben werden und das Problem kann durch einen störungstheoretischer Ansatz (Born'sch Näherung) behandelt werden.

Fermi's goldene Regel:

$$\mathcal{A}_{fi} = \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle$$

$$\Psi_i = e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} \quad \Psi_f = e^{i\vec{p}'\vec{x}/\hbar}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = ze \int e^{-i\vec{p}'\vec{x}/\hbar} \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (105)$$

$$= ze \int \Phi(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (106)$$

Einschub: Green's theorem: u, v sind skalare Felder die hinreichend stark abfallen zu den Rändern des Integrationsvolumens:

$$\int (u\Delta v - v\Delta u) d^3x = 0 \quad \text{mit } \Delta = \nabla^2$$

$$e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \Delta e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{ze\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \Phi(x) \Delta e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (107)$$

$$= -\frac{ze\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \Delta\Phi(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (108)$$

$$(109)$$

$$\Delta\Phi(x) = -\rho(x)^{12}$$

$\rho(x)$: Ladungsverteilung im Target-Kern

$\rho(x) : Zef(x)$

$f(x)$: normierte Ladungsverteilung $\int f(x)d^3x = 1$,

Z Ladung eines Target-Kerns

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{ze\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \rho(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \quad (110)$$

$$= \frac{zeZe\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \underbrace{\int f(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x}_{F(\vec{q}): \text{Formfaktor}} \quad (111)$$

Der Formfaktor $F(\vec{q})$ ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung.

Für Rutherford-Streuung wird das Target als punktförmig angenommen, d.h. die normierte Ladungsverteilung ist eine Delta-Funktion $f(x) = \delta(x)$ und daher $|F(\vec{q})| = 1$.

Mit Gleichung 47, die den Phasenraumfaktor der Reaktion $a + b \rightarrow 1 + 2$ behandelt ¹³ folgt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

¹² $E = -\nabla\Phi$; $\nabla E = -\Delta\Phi$; Maxwell: $\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon}$; $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ in HEP units $\epsilon_0 = 1$: im Vakuum $\epsilon_r = 1 \rightarrow \Delta\Phi = -\rho$

¹³damals wurde der Stoss hochrelativistisch betrachtet, d.h. $\beta = \beta' = 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{\vec{p}^2 c^2}{\beta^2} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \quad (112)$$

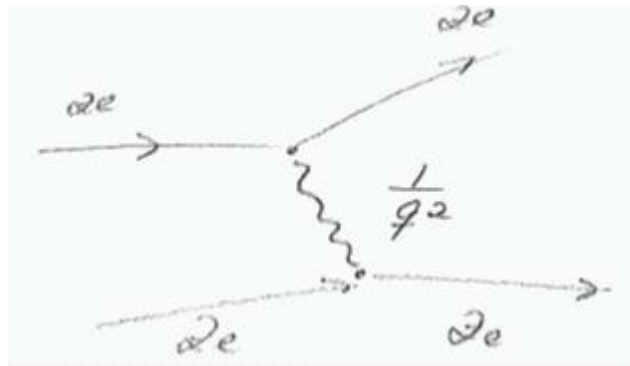
$$= \dots \quad (113)$$

$$= \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4 |\vec{p}^2| \beta^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \frac{(\hbar c)^2}{c^2} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} (E_{kin} &= 1/2 |\vec{p}| v = 1/2 |\vec{p}| \beta \cdot c) \\ &= \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} (\hbar c)^2 \end{aligned} \quad (115)$$

Zur Herleitung wurde nur ein elektrostatisches Potential benutzt, reine QED (ohne Berücksichtigung des Spins).

Vergleich mit der Amplitude aus dem Feynman-Diagramm



$$\mathcal{A} \sim \frac{zZe^2}{q^2} \rightarrow \mathcal{A}^2 \sim \frac{z^2 Z^2 e^4}{q^4}$$

$$\frac{1}{q^4} \sim \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad \text{Abhängigkeit kommt aus dem Propagator Term.}$$

Nebenbemerkung: Das Rutherford-Experiment

Das Rutherford-Experiment war das erste Experiment in dem Rutherfordstreuung untersucht wurde. α -Kerne (aus radioaktiven Präparaten) wurden

auf eine dünne (einlagige) Goldfolie geschossen.

$$\begin{aligned}
 q &= 2e & m &= 4 \text{ amu} \approx 4 \text{ GeV}/c^2 & E_{kin}(\alpha) &\sim 5 \text{ MeV} \\
 M_{Gold} &= 197 \text{ amu} \\
 v &= \sqrt{\frac{2\dot{E}_{kin}}{m}} = 0.05c & p &= 0.05c * 4\text{GeV}/c^2 = 200\text{MeV}/c \\
 \lambda &= \frac{197\text{MeV} \cdot \text{fm}/c \cdot 2\pi}{200\text{MeV}/c} \sim 7\text{fm}
 \end{aligned}$$

d.h. die Bedingungen, dass der Stoss nichtrelativistisch beschrieben ($E_{kin} \ll mc^2$) und der Rückstoss vernachlässigt werden kann ($m \ll M$) trifft zu. Die deBroglie Wellenlänge ist gerade an der Grenze um eine Substruktur des Gold-Kerns aufzulösen. Zudem trägt das α Teilchen keinen Spin.

Oft wird Rutherford-Streuung mit dem Rutherford-Experiment verwechselt, das ist aber nur ein Experiment, dass mit der Rutherford Streuung beschrieben werden kann.

Rutherford entdeckte dabei, dass das Atom nahezu leer ist (die meisten Teilchen gingen ungehindert durch) und nur wenige wurden hart an dem Kern gestreut.

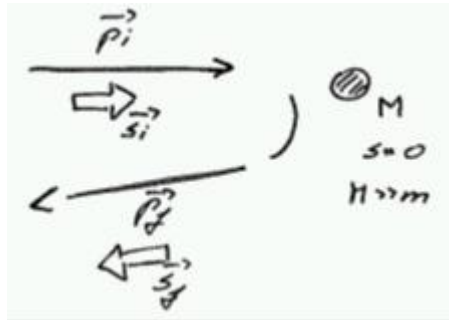
5.2 Mott-Streuung

Viele Streuexperimente werden mit Elektronen durchgeführt. Elektronen tragen Spin $S=1/2$.

Für hochrelativistische Teilchen ($\beta \rightarrow 1$) ist Helizität = Chiralität. Chiralität ist in der schwachen, der EM und der starken Wechselwirkung erhalten¹⁴.

Da es nicht gleichzeitig möglich ist Drehimpuls und Helizität zu erhalten ist die Streuung in Rückwärtsrichtung unterdrückt.

¹⁴Der Higgs Mechanismus bricht jedoch Chiralität



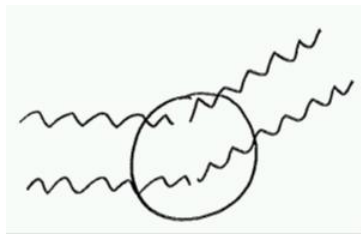
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Spin}} \cos^2 \theta/2 \quad \text{für } \beta = 1$$

Für $\beta < 1$ ist die Helizität jedoch keine Erhaltungsgröße.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Spin}} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2)$$

Der Wirkungsquerschnitt ohne Spin $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Spin}}$ kann, wenn alle anderen Bedingungen erfüllt sind z.B. der Rutherford Wirkungsquerschnitt sein.

5.3 Streuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen



Es wird ein Korrekturfaktor (Formfaktor) benötigt, der die Phasendifferenz der Streuung an verschiedenen Punkten der Ladungsverteilung beschreibt (nicht relevant wenn $\lambda \gg r_{\text{target}}$ ist)

Für den WQ der Streuung eines Teilchens an einer ausgedehnten Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ erhält man (siehe Gleichung 111):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ausgedehnt}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punktf.}} |F(\vec{q}^2)|^2$$

Bemerkung:

$|F(\vec{q}^2)| < 1$, d.h. der Wirkungsquerschnitt an ausgedehnten Ladungsverteilungen ist immer kleiner als der punktförmige Wirkungsquerschnitt.

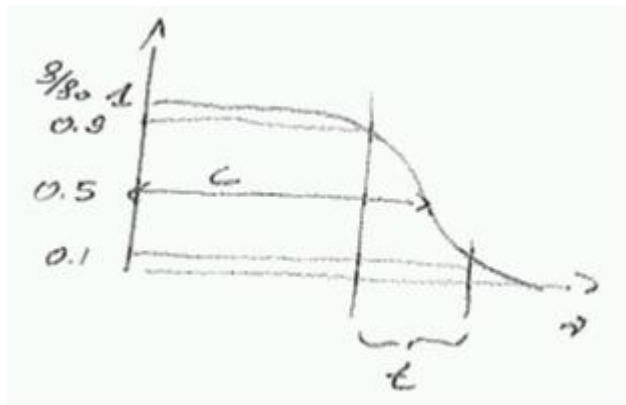
Für $|\vec{q}| \rightarrow 0$ geht der Betrag des Formfaktors gegen 1. Das ist der Grenzfall der Streuung an punktförmigen Teilchen. Der Impuls \vec{q} ist zu klein, um die Struktur aufzulösen.

Aus $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}$ lässt sich $|F(\vec{q}^2)|^2$ bestimmen. Eine einfache Rücktransformation zur Ermittlung der Ladungsverteilung ist jedoch nicht möglich. Zum einen ist $|F(\vec{q}^2)|^2$ nicht für alle \vec{q}^2 gemessen. Für ausgedehnte Kerne fällt $|F(\vec{q}^2)|^2$ für große \vec{q}^2 stark ab, d.h. es bleibt sehr wenig Statistik um diesen Bereich zu vermessen. Zusätzlich wird im Experiment nur $|F(\vec{q}^2)|^2$ gemessen und es fehlt die Information über die Phase.

Stattdessen werden Modellansätze zur Beschreibung der Ladungsverteilung entwickelt und die Fouriertransformierte der Modellansätze wird an Ladungsverteilung angepasst.

5.4 Ladungsverteilung von Kernen

Für eine Vielzahl von Kernen wurde die Ladungsverteilung bestimmt. Kerne werden gut durch Fermi-Verteilung beschrieben



Die radiale Ladungsverteilung ist beschrieben durch $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+e^{r-c/a}}$, mit
 c: Halbdichtenradius $c \approx (1.18A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$
 A: Atommassenzahl
 t: Oberflächendicke $= 4 \ln 3 a = 4.4a$
 $a \approx 0.545 \text{ fm}$

Für mittlere und große A findet man näherungsweise für den mittleren quadratischen Radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.94 A^{1/3} \text{ fm}$

Oft wird der Kern aber näherungsweise durch Kugel mit hartem Rand beschrieben für die $\langle r^2 \rangle$ gegeben ist durch

$$\langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = \int_0^R r^2 \rho(r) dr = 4\pi \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3}}_{\text{Dichte homogene Kugel}} \int_0^R r^4 dr = 3/5 R^2$$

$$\text{für } \langle r^2 \rangle_{\text{hart}} \stackrel{!}{=} (0.94 A^{1/3} \text{ fm})^2$$

$$\Rightarrow R_{\text{hart}} = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$$

Erwartungswert der harten Kugel soll gerade $\langle r^2 \rangle$ für realen Kern mit weichem Rand entsprechen, daraus folgt die Definition für R_{hart} .

Für Nukleonendichte $A/V = \rho_N$ findet man $\rho_N = 0.17 \text{ Nukleonen/fm}^3$
 d.h. die Dichte ist konstant und in erster Ordnung nicht abhängig von A oder anderen Eigenschaften des Kerns.

5.5 Struktur der Nukleonen

Bei e^- -Nukleon Streuexperimenten zur Untersuchung der Struktur der Nukleonen muss zusätzlich der Spin des Nukleon berücksichtigt werden. Die bewegte Ladung (einlaufendes e^-) erzeugt ein B-Feld, das an den Spin des Nukleon koppelt.

Ausserdem ist die Ruheenergie (Masse) des Nukleons nicht mehr wesentlich größer als die kinetische Energie des Elektrons, d.h. der Rückstoss ist nicht vernachlässigbar.

5.5.1 Nukleonen Spin und magnetischer Moment

$$\vec{\mu} = g \cdot \mu_N \cdot \frac{\vec{s}}{\hbar}$$

$\vec{\mu}$: magnetisches Moment

μ_N : Nukleon (oder Kern) Magneton $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$

(Das Bohr'sche Magneton des Elektrons ist $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.79 \cdot 10^{-11} \text{ MeV/T}$)

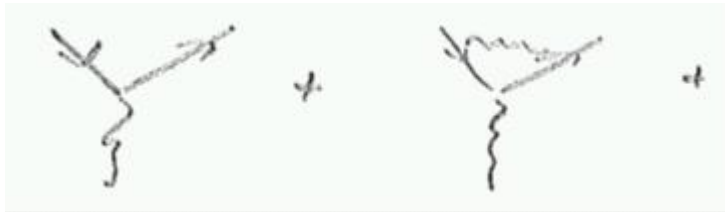
\vec{s} : Spin des Nukleons

g : anomaler Lande-Faktor oder g -Faktor (gyromagnetischer Faktor)

$$\vec{\mu}_p = g_p \cdot \mu_N \cdot \frac{\vec{s}}{\hbar} = 2.79 \mu_N \text{ bzw. } g_p = 5.58$$

$$\vec{\mu}_n = g_n \cdot \mu_N \cdot \frac{\vec{s}}{\hbar} = -1.91 \mu_N \text{ bzw. } g_n = -3.82$$

Für punktförmige geladene Teilchen (z.B. e^-) erwartet man $g = 2 + \text{QED}$
Korrekturen $= 2 + \frac{\alpha}{\pi} + 0(\alpha^3)$



Für punktförmige neutrale Teilchen wird $g = 0$ erwartet.

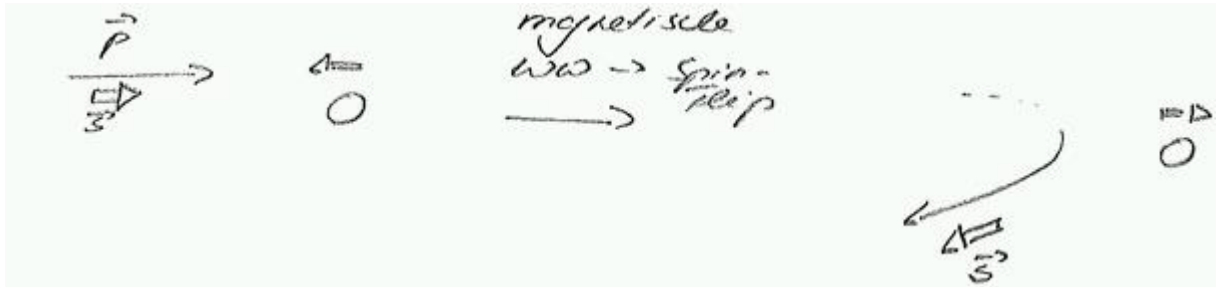
Nebenbemerkung:

$g_p \neq 2$ und $g_n \neq 0$ ist bereits ein eindeutiger Hinweis auf Substruktur des Protons bzw. des Neutrons.

5.5.2 Elektron-Streuung an schweren "punktförmigen" Proton (Dirac-Teilchen)

Die Annahme punktförmige (d.h. unter anderem $g_p = 2$) ist eine akademische Übung da ein reales Proton eine ausgedehnte Ladungsverteilung und wie oben diskutiert $g_p \neq 2$ hat. Wir werden später alle Effekte zusammenbringen

um ein reales Proton zu beschreiben.



Durch Spin-Flip des Protons bleiben Helizität und Drehimpuls bei Rückwärtsstreuung gleichzeitig erhalten!

Für den Fall eines Spin-Flips des Protons ist die Rückwärtsstreuung bevorzugt und die Vorwärtsstreuung unterdrückt.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth}} \left(\underbrace{\cos^2 \theta/2}_{\text{Mott}(\beta \rightarrow 1)\text{el. WW}} + \underbrace{\frac{Q^2}{2m_p^2 c^2} \sin^2 \theta/2}_{\text{magn. WW}} \right)$$

Für elastische Streuung in der der Rückstoss vernachlässigt werden kann ist $q^2 = -(\vec{p}_e - \vec{p}'_e)^2 < 0$, deshalb führt man die Variable $Q^2 = -q^2$ ein.

Da wir Dirac-Protonen behandeln, die das normale magnetische Moment $\mu = \frac{e}{2m_p}$ haben, wobei m_p die Protonenmasse ist, ist die Amplitude $\mathcal{A} \propto \frac{1}{m_p}$ und entsprechend der Wirkungsquerschnitt proportional zu $\frac{1}{m_p^2}$. Wir sehen auch dass der Spin-Spin Wechselwirkungsterm mit Q^2 steigt, d.h. entsprechend mit dem Abstand stark abfällt.

5.5.3 Streuquerschnitt mit Rückstoss

In Fällen in denen der Rückstoss nicht vernachlässigt werden kann wird der Wirkungsquerschnitt wie folgt modifiziert:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rückstoss}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ohne Rückstoss}} \left(\frac{E'}{E}\right) \quad (116)$$

Da in diesem Fall $E \neq E'$ ist entsprechend auch $q^2 \neq \bar{q}^2$. Das heisst es muss überall in dem Wirkungsquerschnitt der 3er-Impuls durch den 4er-Impuls ersetzt werden.

Entsprechend wird der Zusammenhang zwischen q und θ modifiziert:

$$q^2 = 4 E E' \sin^2(\theta/2) \quad (117)$$

5.5.4 Rosenbluth-Streuung

Jetzt werden alle Effekt zusammen gebracht um die Elektron-Streuung an ausgedehnten Spin=1/2 Nukleonen zu beschreiben. Das bedeutet es müssen zwei Formfaktoren $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ eingeführt werden, die die Verteilung der elektrischen Ladung und des magnetischen Moments berücksichtigen.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosenbluth}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(\frac{E'}{E}\right) \left[\underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}}_{A(Q^2)} + \underbrace{2\tau G_M^2(Q^2)}_{B(Q^2)} \tan^2 \theta/2 \right] \quad (118)$$

$$\tau = \frac{Q^2}{4m_p^2 c^2}$$

Da q ($Q^2 = -q^2$) in diesem Fall der 4er Impuls ist, können die Formfaktoren G_E, G_M nicht mehr bzw. nur für kleine Q^2 Werte als Fouriertransformierte der Verteilung der elektrischen Ladung bzw. des magnetischen Moments betrachtet werden.

Verhalten für $|Q| \rightarrow 0$

$$G_E^p(Q^2 = 0) = 1 \quad G_E^n(Q^2 = 0) = 0$$

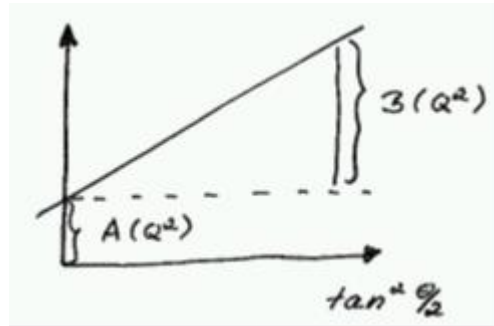
$$\underbrace{G_M^p(Q^2 = 0) = 2,79}_{\text{aus e-p-Streuung}} \quad \underbrace{G_M^n(Q^2 = 0) = -1,91}_{\text{aus e-n-Streuung}}$$

Verhalten für $|Q| \rightarrow 0$ (dann auch $\tau \rightarrow 0$) entspricht Streuung an punktförmigen Protonen und Neutronen mit anomalem magnetischen Moment.

Um $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ getrennt zu messen, muss der WQ bei festem Q^2 für verschiedene Streuwinkel, d. h. verschiedenen Elektronenenergien gemessen

werden.

$$R = \frac{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Rosenbluth}}}{(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Mott}}(\frac{E'}{E})} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \theta/2$$



Aus $A(Q^2)$ und $B(Q^2)$ folgt $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ bei einem festen Q^2 .

Die Messung von G_E und G_M bei mehreren Q^2 Werten ergibt folgende Ergebnisse:

$$1) G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2.79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{-1.91}$$

d. h. *elektrische* und *magnetische Ausdehnung* sind gleich; G_E^n ist vernachlässigbar

2) Die Form der Verteilung wird durch die Dipolform beschrieben:

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71^2(\text{GeV}/c)^2}\right)^{-2}$$

Die Dipolform entspricht einer Ladungsverteilung, die exponentiell abfällt

$$\rho(r) = \rho(0)e^{-ar} \text{ mit } a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$$

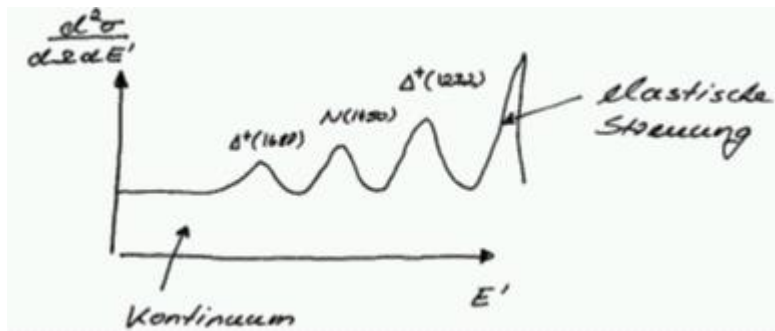
3) Mittlerer quadratischer Radius aus Protonen/Neutronen:

Aus der Ladungsverteilung lässt sich dann der mittlere quadratische Protonenradius bestimmen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_{Dipol}} = 0.97 \text{ fm}$$

6 Tiefinelastische Streuung

Steigert man den Energieübertrag der e^- auf die Protonen, kommt es zur Anregung von inneren Freiheitsgraden, da Protonen zusammengesetzte Teilchen sind.



Die oben skizzierte Verteilung wurde in einem Experiment beobachtet in dem Elektronen mit einer Energie $E = 4.9 \text{ GeV}$ auf ein Protontarget geschossen wurden. Unter dem Winkel von $\Theta = 10^\circ$ wurde die Energie E' der gestreuten Elektronen gemessen. Der große Peak bei $E' = 4.5 \text{ GeV}$ entspricht der elastischen Streuung. Das $\Delta^+(1232)$ Teilchens (Quarkkontent $|uud\rangle$) hat Spin = 1 und ist der erste Anregungszustand des Protons; $m(\Delta^+) = 1232 \text{ MeV}/c^2$. Die zugehörige Resonanz ist klar im E' Spektrum erkennbar, ebenso weitere Resonanzen höherer Massen. Bei kleinen E' Werten wird soviel Energie auf das Proton übertragen, dass es aufbricht und neue Teilchen bildet.

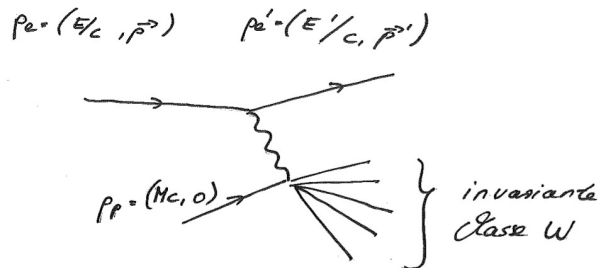
Streuungen in dem angeregte $|uud\rangle$ Resonanzen erzeugt werden, heißen inelastische Streuungen, Streuungen in denen das Proton aufgebrochen wird, heißen tiefinelastische Streuungen.

6.1 Kinematik inelastischer Streuung

Ein elastischer Streuprozess an einem ruhenden Target mit vorgegebener Energie E des einlaufenden Teilchens ist mit einem Parameter beschrieben

(z. B. θ, Q^2, E', \dots). Diese Parameter lassen sich eindeutig ineinander umrechnen.

Für die inelastische Streuung werden zwei Parameter benötigt um die Streuung zu beschreiben.



Im Ruhesystem des Protons sind folgende Variablen definiert:

Energieübertrag: $\nu = E - E'$

Invariante Masse der Protonzerfallsprodukte, W : $W^2 c^2 = (P + q)^2 = M^2 c^2 + 2P_p q + q^2$

mit $2P_p q = 2Mc^2 \nu$, wobei P_p der 4er-Impuls vor dem Stoss des Protons und M die Masse des Protons ist.

4er-Impulsübertrag: $q^2 = W^2 c^2 - M^2 c^2 - 2M\nu = -Q^2$

Für die elastische Streuung gilt: $W = M \Rightarrow \frac{Q^2}{2M\nu} = 1$

Für inelastische Streuung gilt: $W > M \Rightarrow 2M\nu - Q^2 > 0$

Es wird die Bjorken-Skalenvariable x_B eingeführt.

$$x_B := \frac{Q^2}{2M\nu} < 1$$

Es gilt: $0 < x_B < 1$. Die Bjorken-Skalenvariable ist ein Mass für die Elastizität der Streuung. Je kleiner x_B ist, desto inelastischer ist die Streuung.

Die oben eingeführten Variablen können ineinander umgerechnet werden. Es werden genau zwei davon benötigt, um eine inelastische Streuung zu

beschreiben, z.B. (θ, E') , (Q^2, ν) , (Q^2, x_B) ,

6.2 WQ für tiefinelastische Streuung

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \underbrace{\frac{E'}{E}}_{\text{Rückstoss}} [W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \theta/2] \quad (119)$$

Vergleich zu Dirac-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} (1 + 2\tau \tan^2 \theta/2) \quad (120)$$

mit $\tau = \frac{Q^2}{4M_p^2 c^2}$

$W_2(Q^2, \nu)$, $W_1(Q^2, \nu)$ heißen Strukturfunktionen, sie hängen jeweils von zwei Variablen ab.

Nebenbemerkung:

Heute werden statt den dimensionsbehafteten Strukturfunktionen W_1 , W_2 die dimensionslosen Strukturfunktionen F_1 , F_2 benutzt

$$F_1(x_B, Q^2) = Mc^2 W_1(Q^2, \nu) \quad (121)$$

$$F_2(x_B, Q^2) = \nu W_2(Q^2, \nu) \quad (122)$$

benutzt.

6.3 Experimentelle Vermessung der Strukturfunktionen am MIT + SLAC, 1969

⇒ Nobelpreis 1996: Friedmann, Kendall, Taylor (Ergebnisse siehe Folien)

Man beobachtet nur eine sehr schwache Abhängigkeit der Strukturfunktion

von Q^2 im Gegensatz zu dem starken (Q^{-8}) Abfall, den man bei elastischer Streuung erwartet.

Dipolformfaktor:

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71^2(\text{GeV}/c^2)}\right)^{-2} \Rightarrow O(Q^{-4}) \quad (123)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \propto G^2(Q^2) \Rightarrow O(Q^{-8}) \quad (124)$$

$$(125)$$

Wenn die Strukturfunktion nicht von Q^2 abhängt, dann sollte man aufgrund obiger Diskussion des Formfaktors annehmen, dass man an punktförmigen Teilchen streut. Da das Proton ein ausgedehntes Objekt ist, heißt das, dass es eine Substruktur aus punktförmigen Teilchen (\rightarrow sogenannte Partonen) besitzt.

Heute identifiziert man die Partonen mit Quarks und Gluonen.

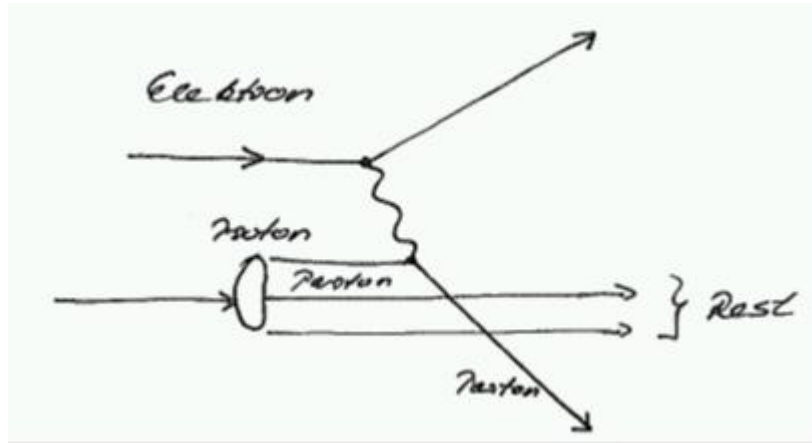
Interpretation der Ergebnisse im Parton Modell:

- Nukleonen bestehen aus punktförmigen quasifreien Konstituenten (mit Spin $1/2 \rightarrow$ siehe später)
- Elektronen streuen elastisch an den Konstituenten
- Gestreute Protonen verlassen das Proton und bilden Hadronen, die beobachtbar sind.

6.4 Infinite Momentum Frame (IMF)

IMF \equiv Bezugssystem, in dem Proton unendlich großen Impuls \vec{P} entlang der z-Achse hat. $P = (E/c, 0, 0, \vec{P})$

Das heißt das Proton kann als Strom freier parallel fliegender Partonen beschrieben werden. Parton-Parton Wechselwirkungen und transversale Impulskomponenten werden vernachlässigt



Parton Kinematik im IMF

$$P_p = x_p \cdot P \quad (126)$$

$$= x_p \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{P} \end{pmatrix} \quad (127)$$

$$(128)$$

x_p : Anteil des Partonimpulses am Protonimpuls

Elastische Streuung im IMF

$$(P_p + q)^2 = P_p'^2 = m_p^2 c^2 \approx 0 \quad (129)$$

$$(P_p + q)^2 = (x_p P + q)^2 \quad (130)$$

$$= x_p^2 P^2 + 2x_p Pq + q^2 \approx 0 \quad (131)$$

$$(132)$$

Die Partonmasse m_p ist vernachlässigbar für große q^2

$$P^2 = M^2 c^2 \quad (133)$$

$$Pq = \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu/c \\ \vec{p} - \vec{p}' \end{pmatrix} = M\nu \quad (134)$$

$$0 \approx \underbrace{x_p^2 M^2 c^2}_{\ll |q^2|} + 2x_p M\nu + q^2 \quad (135)$$

$$\Rightarrow x_p = -\frac{q^2}{2M\nu} = \frac{Q^2}{2M\nu} \stackrel{!}{=} x_B \quad (136)$$

$$(137)$$

Interpretation

Inelastische Streuung am Proton mit einem Bjorken $x_B = \frac{Q^2}{2M\nu} =: x$ kann als elastische Streuung an einen Parton, das den Impulsanteil $x_p = x$ des Protonimpulses trägt, beschrieben werden.

Unter der Annahme, dass e^- elastisch mit dem Parton streut, kann man von außen den Impulsanteil x und damit die Impulsverteilung $f(x)$ der Partonen i messen:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx} \sim f_i(x) \quad (138)$$

Der Wirkungsquerschnitt für elastische e^- -Parton Streuung mit Anteil x des Protonimpulses wird für Stosspartner mit Spin=1/2 durch die Dirac-Formel beschrieben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Parton} = z_i^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + \frac{Q^2}{2m_p^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (139)$$

$$= z_i^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + \frac{Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (140)$$

dabei ist z_i die Ladung des Partons i .

Der Wirkungsquerschnitt für tiefinelastische Streuung ist die Summe über alle Partonen

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx}\right)_{Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \sum_i z_i^2 f_i(x) \left(1 + \frac{Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (141)$$

mit $f_i(x)dx =$ Wahrscheinlichkeit Parton i mit $x \in [x, x + dx]$ zu finden. Das kann mit der Gleichung 119, 121, 122 der inelastischen Streuung verglichen werden:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE' Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x, Q^2)}{\nu} + \frac{2F_1(x, Q^2)}{Mc^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \nu &= E - E' \\ d\nu &= -dE' \\ x &= \frac{Q^2}{2M\nu} \Rightarrow \nu = \frac{Q^2}{2Mx} \\ \frac{d}{d\nu} &= \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\nu} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{Q^2}{2M\nu^2}\right) = -\frac{x}{\nu} \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} &= \frac{\nu}{x} \frac{d}{dE'} \end{aligned}$$

Zusätzlich benutzen wir das im Experiment gesehen wurde dass $F_2(x, Q^2) = F_2(x)$ bzw. $F_1(x, Q^2) = F_1(x)$.

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\Omega dx}\right)_{Proton} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x)}{x} + \frac{2F_1(x)\nu}{xMc^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (143)$$

$$= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(\frac{F_2(x)}{x} + \frac{2F_1(x)Q^2}{2x^2 M^2 c^2} \tan^2 \theta/2\right) \quad (144)$$

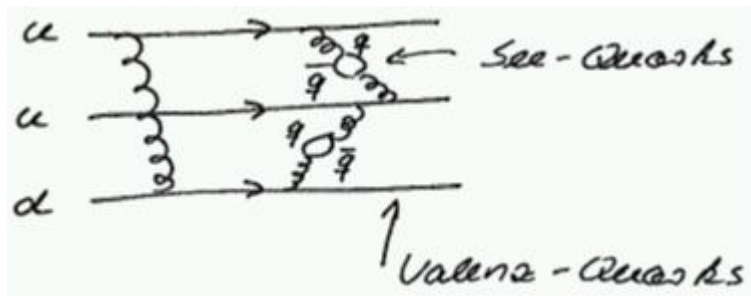
Wenn Partonen Spin 1/2 Teilchen sind, muss die inelastische Streuung an Protonen mit der Dirac-Streuung an den Partonen identisch sein, d.h.:

$$2F_1(x) = \frac{F_2(x)}{x} = \sum_i z_i^2 f_i(x) \quad (145)$$

$$\Rightarrow 2xF_1(x) = F_2(x)$$

Diese Beziehung ist die Callen-Cross Beziehung. Sie wurde im Experiment getestet (siehe Folie). Daraus folgt, dass der Spin der Partonen 1/2 ist!

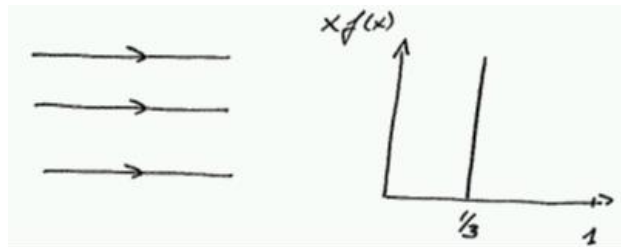
Bisher haben wir das Proton als aus 3 Quarks aufgebaut angenommen. Jedoch aufgrund von Vakuumfluktuationen gibt es Quark-Antiquark Paare, sogenannte See-Quarks.



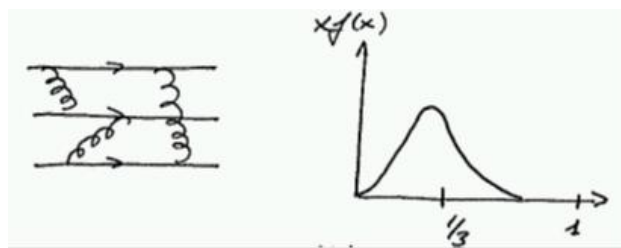
$$\Rightarrow F_2(x) = x \sum_i z_i^2 (f_i^q(x) + f_i^{\bar{q}}(x))$$

6.5 Was erwarten wir für die Impulsverteilung $xf(x)$ der Partonen im Proton?

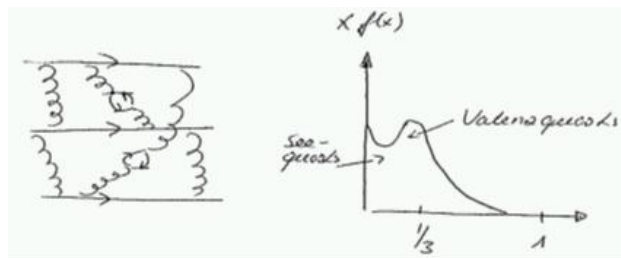
Wir fangen mit einem sehr vereinfachten Fall an, das Proton besteht aus drei Quarks gleicher Masse, die nicht miteinander wechselwirken. D.h. die drei Quarks teilen sich den Impuls untereinander auf, jedes Quark bekommt genau ein Drittel des Protonimpulses. D.h. die Momentumverteilung peaked by $x = 1/3$.



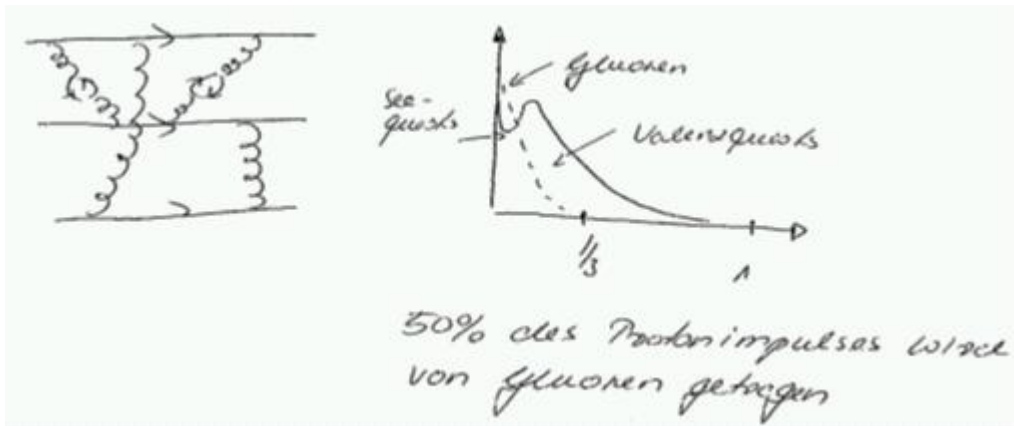
Wenn die 3 Quarks miteinander wechselwirken, geben sie in Stossprozessen Impuls aneinander ab. D.h. die oben diskutierte Verteilung wird verschmiert.



Zusätzlich berücksichtigen wir, dass sich Quark-Antiquark-Paare kurzzeitig im Rahmen der Heisenbergschen Unschärferelation bilden können. Diese zusätzlichen See-Quarks tragen im Mittel ein kleineren Impuls als die Valenzquarks. Der Peak in der Impulsverteilung der die Valenzquarks beschreibt verschiebt sich dadurch leicht zu niedrigeren Impulsen.



Zuletzt berücksichtigen wir noch, dass die Gluonen ca. 50% des Protonimpulses tragen. Ihr Impuls ist wie für die See-Quarks klein. Jedoch da die Summe aus den Impulsen der Gluonen, der Seequarks und der Valenzquarks den Impuls des Protons gibt, verschiebt sich die Verteilung der Impulse der Valenzquarks nochmals Richtung kleinere x -Werte. Der Peak liegt bei ca. $x = 0.15 - 0.2$.



Die Partonverteilung des Protons und Neutrons wurden durch eine Vielzahl von Streuexperimenten bestimmt: ep , μp , νp Streuung, woraus sich die Valenzquark, die Seequark wie auch die Gluonverteilung extrahieren lässt. (siehe Folie)

6.6 Zusammenfassung der Information über den Aufbau von Protonen aus Streuexperimenten

- Der mittlere Quadratische Radius des Protons is 0.97 fm.
- Das Proton besteht aus punktförmigen Teilchen, drei Valenzquarks und zusätzliche Seequarks und Gluonen
- Seequarks tragen in der Regel sehr kleines x
- Das Maximum der Valenzquarkverteilung liegt bei $x = 0.15, \dots, 0.2$
- Der Impulsanteil des Protons $\int x f(x) dx$ der von Quarks getragen wird entspricht 50% des Protonimpulses. Die übrigen 50% des Protonimpulses werden von Gluonen getragen.

7 Starke Wechselwirkung

7.1 Farbladung und Gluonen

Analog zur EM WW, die auf elektrisch geladene Teilchen wirkt, wirkt die starke WW auf Teilchen mit Farbladung. In der EM WW wird die WW durch das Photon als Austauscheteilchen übertragen, in der starken WW sind die Austauscheteilchen Gluonen. Ein signifikanter Unterschied ist, dass Gluonen **selbst Farbladung** tragen, das Photon jedoch elektrisch neutral ist.

Quarks (und Antiquarks) kommen in 3 Farben vor r, g, b (bzw. \bar{r} , \bar{g} , \bar{b}). Gluonen tragen die Kombination aus einer Farbe und einer Antifarbe ($3 \otimes \bar{3}$)

Es gibt neun mögliche Farb-Antifarbe-Kombinationen, die sich in ein Colour-Oktett und ein Colour-Singlett aufteilen.

Colour-Oktett: $r\bar{g}$, $r\bar{b}$, $g\bar{b}$, $g\bar{r}$, $b\bar{r}$, $b\bar{g}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g})$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$

Colour-Singlett : $\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$

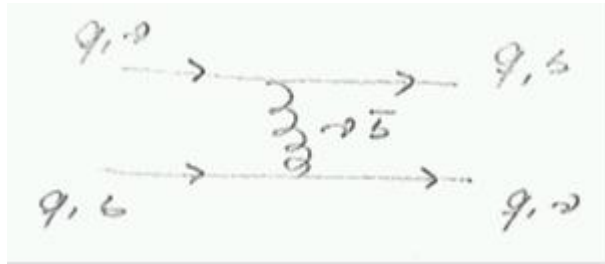
Das Colour-Singlett ist farbneutral $\hat{=}$ d.h. es ist invariant unter Rotation im Farbraum

Die Zustände $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g})$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$ haben in dieser Darstellung zwar auch keine netto-Farbe, sie sind jedoch nicht invariant unter Rotation im Farbraum. Das ist analog zu der Addition von zwei Spin=1/2 Teilchen. Der Gesamt-Spin kann 1 oder 0 sein. Auch im Triplet mit Gesamtspin 1 gibt es ein Element mit der z-Komponente null. Die Projektion des Spins des Teilchens auf die z-Achse ist 0, aber der Gesamtspin nicht. Wohingegen das Spin=0 Teilchen invariant unter Rotation im Spinraum ist, da sein Spin in keiner Projektion ungleich 0 ist.

Die Wahl der Zustände im Colour-Oktett sind Konvention, sie werden so gewählt dass sie eine orthonormal Basis bilden (all senkrecht aufeinander stehen).

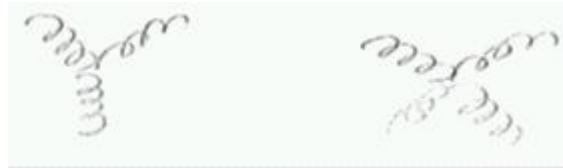
7.2 Quark-Quark Wechselwirkung

Die Farbladung wird an jedem Vertex eines Feynmandiagramms erhalten. Die starke Wechselwirkung ist insensitiv zu Quarkflavour (u, d, s, c, t, b) und



zur elektrischen Ladung ($2/3$, $-1/3$). Ein u und ein d Quarks sind für die starke Wechselwirkung ununterscheidbar (siehe Erhaltung des Isospins in der starken Wechselwirkung). Analog sind rote, grüne, blaue Quarks in der elektromagnetischen Wechselwirkung nicht unterscheidbar.)

Durch die Farbladung der Quarks sind auch 3-Gluon und 4-Gluon Vertices erlaubt. Analoge Vertices existieren in der elektromagnetischen Wech-



selwirkung nicht, da das Photon selbst keine elektrische Ladung trägt.

7.3 Evidenz für Farbe

Wie kamen die Physiker auf die Idee eine Farbladung einzuführen?

7.3.1 Statistisches Problem für $J = 3/2$ Baryonen

Ein Δ^{++} Teilchen besteht aus drei u quarks, hat Spin= $3/2$ und befindet sich im Grundzustand ($L=0$).

Die Wellenfunktion jedes Teilchens setzt sich aus dem Produkt der einzelnen Wellenfunktionen zusammen. Bevor man die Quantzahl Farbe einführte waren nur die Ortswellenfunktionen Ψ_{Raum} , die Spinwellenfunktion χ_{Spin} und die Flavourwellenfunktion $\Phi_{Flavour}$ bekannt. Die Gesamtwellenfunktion des Δ^{++} Teilchens ist dann:

$$\Psi_{\Delta^{++}} = \Psi_{Ort} \cdot \chi_{Spin} \cdot \Phi_{Flavour} \quad (146)$$

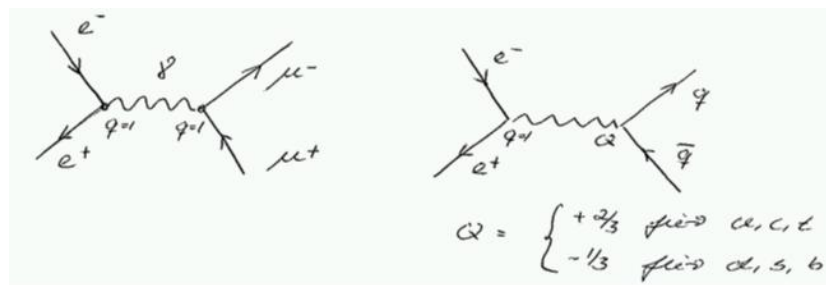
Die Symmetry der Ortswellenfunktion ist gegeben durch $(-1)^L$. Da L in diesem Fall 0 ist, ist die Ortswellenfunktion symmetrisch. Die Spinwellenfunktion ist ebenfalls symmetrisch unter vertauschen zweier Quarks, da alle drei Quarks die gleiche Spinrichtung haben. Da das Δ^{++} aus drei u Quarks besteht ist ebenfalls die Flavourwellenfunktion symmetrisch unter vertauschen zweier Quarks. D.h. die Gesamtwellenfunktion ist symmetrisch unter Vertauschen zweier Quarks. Das widerspricht aber der Tatsache, dass die gemeinsame Wellenfunktion von Fermionen asymmetrisch unter Vertauschung zweier Fermion sein muss. Der Ausweg dazu war einen weiteren Freiheitsgrad, d.h. eine weitere Quantenzahl, die Farbe einzuführen, deren Wellenfunktion ξ_{Farbe} vollständig asymmetrisch (d.h. asymmetrisch unter Vertauschung von jeder Kombination aus zwei Quarks) ist:

$$\xi_{Farbe} = \frac{1}{\sqrt{6}}(|rgb\rangle - |grb\rangle - |rbg\rangle + |gbr\rangle + |brg\rangle - |bgr\rangle) \quad (147)$$

Sie können überprüfen, dass unter Austausch von jeweils zwei Quarks die Farbwellenfunktion ξ_{Farbe} ihr Vorzeichen ändert. Die Gesamtwellenfunktion $\Rightarrow \Psi_{\Delta^{++}} = \Psi_{Raum} \cdot \chi_{Spin} \cdot \Phi_{Flavour} \cdot \xi_{Farbe}$ ist nun antisymmetrisch.

7.3.2 Hadronischer WQ für $e + e^-$ Annihilation

Ein weiterer experimenteller Hinweis auf den Freiheitsgrad "Farbe" kam aus dem Vergleich der Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$ und $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$.



Ohne Berücksichtigung der Farbe ist das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte der beiden oben skizzierten Reaktion $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \cdot Q^2$. Wobei Q die elektrische Ladung der Quarks im Endzustand sind.

Wenn man zusätzlich die Farbe berücksichtigt gibt es für die Reaktion $\sigma(e^+ + e^- \rightarrow q\bar{q})$ drei mögliche Feynmandiagramme, nämlich einmal mit einem $r\bar{r}$, $g\bar{g}$ und einem $b\bar{b}$ Quark-Antiquark-Paar im Endzustand. D.h. der Gesamtwirkungsquerschnitt der Reaktion ist drei mal so groß¹⁵. Die entstehenden Quarkpaare hadronisieren zu 2 Teilchen Jets, die im Detektor beobachtbar sind. Die unterschiedlichen Quarkflavour sind nicht mehr zu unterscheiden.

$$\sigma_{had}(e^+e^- \rightarrow 2 \text{ Jets}) = \sum_{\text{Farben}} \sum_i \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) Q^2(q_i), \quad (148)$$

dabei läuft die zweite Summe über alle Quarks für die $q\bar{q}$ -Paare bei gegebener Schwerpunktsenergie produziert werden können. Im Experiment wird das Verhältnis

$$R_{had} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow 2 \text{ Jets})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_F \sum_i Q^2(q_i) \quad (149)$$

bestimmt. Für unterschiedliche Schwerpunktsenergien (center-of-mass energies: CME) misst man unterschiedliche Verhältnisse R_{had} .

$E_{CME} < 2m_c c^2 \approx 3 \text{ GeV}$; es können u, d, s Paare erzeugt werden
 $\rightarrow R_{had} = 3 \cdot (2/3^2 + 1/3^2 + 1/3^2) = \frac{18}{9} = 2$

$E_{CME} < 2m_b c^2 \approx 10 \text{ GeV}$; es können u, d, s, c Paare erzeugt werden
 $\rightarrow R_{had} = 10/3$

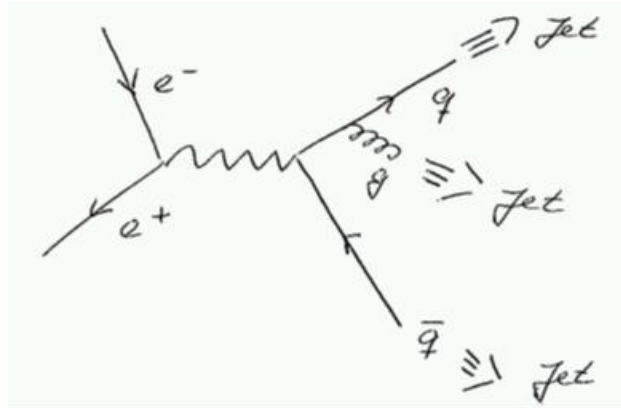
$E_{CME} < 2m_t c^2 \approx 300 \text{ GeV}$; es können u, d, s, c, b Paare erzeugt werden
 $\rightarrow R_{had} = 11/3$

Die gemessenen R_{had} Verhältnisse bestätigen die aufgrund der Kinematik vorhergesagten Sprünge und den Farbfaktor 3! (siehe Folie).

¹⁵Auch wenn die elektromagnetische Wechselwirkung insensitiv gegenüber der Farbladung ist, sind die drei Diagramme im Prinzip unterscheidbar, d.h. sie interferieren nicht. Deshalb werden die Amplitudenquadrate und nicht die Amplituden addiert.

7.4 Evidenz für Gluonen

Analog der Bremsstrahlung erwartet man auch die Abstrahlung "reeller Gluonen".

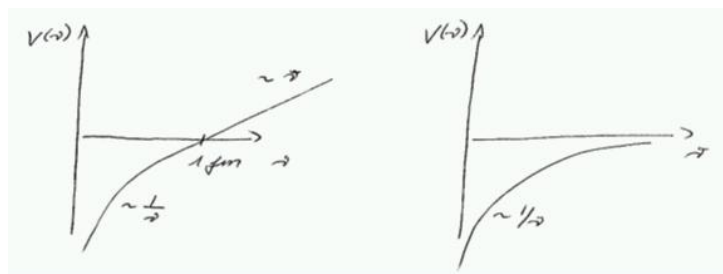


3 Jet Ereignisse bei Tasso am PETRA Beschleuniger (DESY) 1977 gelten als Nachweis für Gluonen. Aus dem Verhältnis von 3-Jet zu 2-Jet Ereignissen bekommt man eine Abschätzung der starken Kopplungskonstante α_s .

7.5 Quark-Antiquark Potential

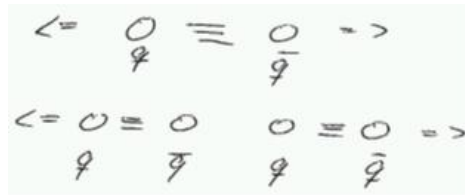
Starke WW (QCD)

Coulomb WW (QED)



$$V(r) = -\frac{4}{3}(\hbar c) \frac{\alpha_s}{r} + kr$$

Der Unterschied zwischen dem Potential der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung kommt von der Gluon selbstwechselwirkung. Für kleine r -Werte sind Quarks quasi frei, das nennt man asymptotische Freiheit. Für große Abstände braucht man immer mehr Energie die $q\bar{q}$ -Paare zu trennen. Die Quarks sind also im Farbpotential eingesperrt \Rightarrow Confinment. Aufgrund des Confinments ist die Produktion freier Quarks (oder allgemein farbgeladener Objekte) nicht möglich. Der Produktion des $q\bar{q}$ -Paares in der e^+e^- -Annihilation schliesst sich deshalb der Prozess der Hadronisierung an. Ab gewissem Abstand ist es energetisch vorteilhafter, neue Quark-Antiquark-Paare aus dem Vakuum zu bilden.



Am Ende der Hadronisierung steht der beobachtete Teilchen-Jet. Der genaue Prozess der Hadronisierung ist nur schlecht verstanden. Es gibt jedoch viele Modelle (oft mit vielen freien Parametern), die eine gute Beschreibung der experimentellen Daten ergeben. Diese Modelle sind wohlmotiviert, dennoch weit entfernt von einer first principel Beschreibung.

7.6 Laufende Kopplungskonstante α_s und asymptotische Freiheit

Die asymptotische Freiheit bei kleinen Abständen (großen Q^2 ¹⁶) wird durch die in diesem Limit immer kleiner werdende Kopplungskonstante $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$ beschrieben.

$$\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0 \text{ für } Q^2 \rightarrow \infty$$

Dieses Verhalten wurde von Wilczek, Politzer und Gross 1975 im Rahmen der Quantumchromodynamik (QCD) vorhergesagt und experimentell

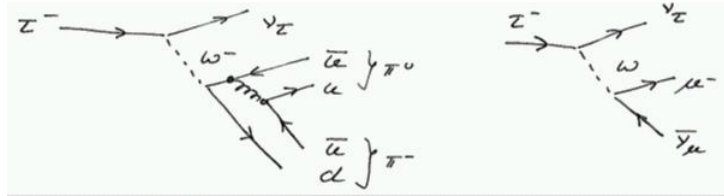
¹⁶Abstand und Impulsübertrag sind für virtuelle Teilchen über die Unschärferelation miteinander verknüpft.

bestätigt.

Wilczek, Politzer und Gross erhielten für diese Vorhersage und deren experimentelle Bestätigung den Physiknobelpreis 2004. Für kleine Q^2 ($Q^2 \rightarrow 0$) steigt $\alpha_s(Q^2)$ sehr stark an und erreicht bei etwa $Q^2 \approx (200 \text{ MeV}/c)^2$ die Grösse $O(1)$. Eine störungstheoretische Behandlung der starken Wechselwirkung ist in dem Bereich deshalb nicht möglich. Höherer Ordnung Feynman-Diagramme können nicht vernachlässigt werden. Die Bindung von Quarks in Hadronen kann nicht perturbativ behandelt werden. Gleiches gilt für die Bindung von Nukleonen im Kern. Hier kommen effektive Theorien zur Anwendung.

7.7 Nebenbemerkung: Messung von α_s bei $q^2 = m_\tau^2 c^4$

Die starke Kopplungskonstante bei $Q = 90 \text{ GeV}$ wurde in $e^+e^- \rightarrow \text{multi-Jet}$ Ereignissen bei LEP (e^+e^- Kollider bei einer Schwerpunktsenergie von $E_{CMS} = 90 \text{ GeV}$ gemessen. Wobei multi-Jet für 2,3, und mehr Jet Ereignisse steht.



Der Vergleich der Verzweigungsverhältnisse der Zerfälle $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \pi^0 \pi^-$ mit $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu$ erlaubt Rückschlüsse über $\alpha_s(m_\tau^2 c^4)$

7.8 Nebenbemerkung: Bestimmung des $q\bar{q}$ Potentials

Analog zum gebundenen e^+e^- Zustand (Positronium) eignen sich gebundene Zustände schwerer Quarks ($c\bar{c}$ und $b\bar{b}$), um mehr über das $q\bar{q}$ Potential zu lernen.

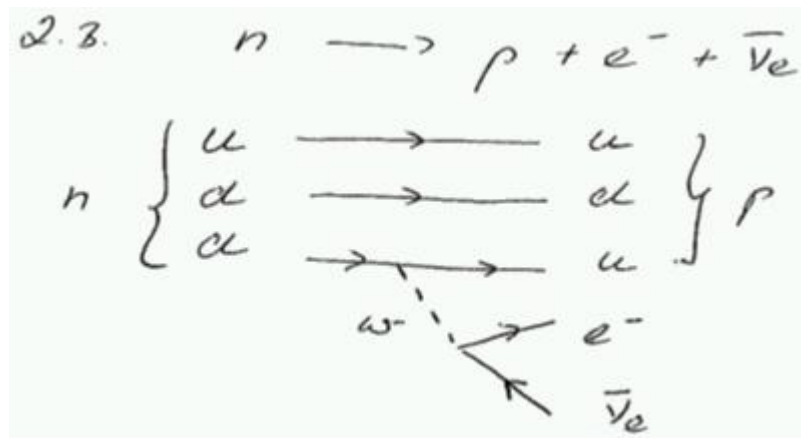
Die Auswertung der Charmoniumzustände unter der Annahme eines Potentials der Form $V(r) = -4/3(\hbar c) \frac{\alpha_s}{r} + kr$ hat die folgenden Parameter ergeben. $\alpha_s = 0.3$, $k = 1 \text{ GeV}/\text{fm}$. Diese Anpassungsrechnungen basieren aber nur auf

einem kleinen Bereich (die Grösse des Charmoniums): $r \sim 0.2 - 0.3 \text{ fm}$. Der Vergleich der Unterschiede der Energieniveaus des Charmoniums und des Bottoniums zeigt, dass die starke WW flavour-blind ist, d. h. ΔE ist in beiden Systemen gleich. (siehe Folien).

8 Schwache WW

Prozesse der schwache Wechselwirkung haben aufgrund der kleinen Kopplungskonstanten und der zusätzlichen Unterdrückung durch die schweren Austauscheteilchen sehr kleine Wirkungsquerschnitte. Deshalb wurde diese Wechselwirkung und die von ihr verursachten Phänomene später als Effekte der starken oder elektromagnetischen Wechselwirkung entdeckt. Das Studium der schwachen Wechselwirkung hat in der Vergangenheit zu einer Vielzahl von Entdeckungen geführt. Z.B. die Entdeckung des Postulation und die Entdeckung des Neutrinos (siehe unten), die Entdeckung der W und Z Bosonen und die Entdeckung der Paritätsverletzung (Wu-Experiment) die Entdeckung von C und CP Verletzung in $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ Zerfällen bei Cronin und Fitch 1964 (Nobelpreis 1980). Die Erklärung der CP Verletzung sprängt leider den Rahmen dieser Vorlesung wird aber in der "Particle Physics" diskutiert.

8.1 β -Zerfall



Kernzerfall (β^-) ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$

Kernzerfall (β^+) ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$

Der β^+ Übergang (\equiv Protonzerfall) ist nur im Kern möglich, wo die Energiebilanz durch den Rückstoss am Kern ausgeglichen wird. Ein freies Proton kann nicht in ein Neutron zerfallen, da es leicht schwerer ist als ein Neutron.

Ohne das Neutrinos sieht der β -Zerfall wie ein Zweikörperzerfall aus. Unter der Annahme eines Zweikörperzerfalls wird ein fester Elektron-Impuls erwartet, den man wie folgt berechnen kann.

Im Schwerpunktsystem des Neutrons gilt $\vec{p}_e = -\vec{p}_p$. Zusätzlich gilt Erhaltung des 4er-Impulses. Zur Vereinfachung wählen wir die x -Achse in der Richtung des Impulses des emittierten Elektrons:

$$\left[\begin{pmatrix} E_e/c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p/c \\ -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} M_n c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^2 \quad (150)$$

Nach einigen Rechnungen und unter Ausnutzung der relativistischen Energie-Impulsbeziehung findet man:

$$p^2 = \frac{(M_n^2 - m_e^2 - m_p^2)^2 - 4m_e^2 m_p^2}{4M_n^2} c^2$$

und damit kann man dann die Energie des Elektrons berechnen ($E(e^-) = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$).

Die Beobachtung eines kontinuierlichen β -Spektrums (siehe Folien) wurde von Pauli (1930) durch das Postulat des Neutrinos gelöst.

D.h. zur Beschreibung des β Zerfalls und der zugehörigen Wirkungsquerschnitte muss der 3 Teilchenphasenraum betrachtet werden.

8.2 Lebensdauer von β -Zerfällen

Wir berechnen im folgenden die Lebensdauer des β -Zerfalls und starten dafür mit Fermi's goldene Regel:

Übergangsrate $\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \rho(E_f)$

$$\mathcal{A}_{fi} = \langle \Psi_f | H | \Psi_i \rangle$$

E_f : = Energie, die in dem Zerfall frei wird

$$E_f = E_e + E_\nu + \underbrace{E_{\text{Rückstoss}}}_{\text{vernachlässigbar}}$$

Der Rückstoss des Kerns ist vernachlässigbar, da das Elektron und das Neutrino wesentlich leichter sind.

Der 3-Teilchen Phasenraum wurde in Gleichung 45 bereits gegeben:

$$\rho(E_f) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE_f} \int p_e^2 dp_e d\Omega_e p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu \quad (151)$$

Da es sich um einen 3-Körperzerfall handelt sind die Impulse des Neutrinos und des Elektrons unkorreliert und die Integration über die Winkel kann direkt ausgeführt werden was zweimal den Faktor 4π ergibt.

$$\rho(E_f) = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE_f} \int p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu \quad (152)$$

Bei gegebenen E_f und p_e ist der Impuls des Neutrinos festgelegt:

$$p_\nu = \frac{E_f - E_e}{c} \quad \text{und} \quad dp_\nu = \frac{dE_f}{c}$$

Damit erhält man die Zustandsdichte $\rho(E_f) = \frac{1}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} \int p_e^2 (E_f - E_e)^2 dp_e$ und mit Fermi's goldener Regel:

$$d\Gamma := d\omega = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} |\mathcal{A}_{fi}|^2 p_e^2 (E_f - E_e)^2 dp_e \quad (153)$$

Sobald das e^- den Kern verläßt, spürt es das Coulombpotential des Kerns. Um das Spektrum auch quantitativ zu verstehen, muss man deshalb einen Korrekturfaktor $F(\pm, Z, E_e)$ anbringen, der die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Coulomb-Feld berücksichtigt. Die Korrektur ist unterschiedlich je nach Vorzeichen der Ladung des emittierten Elektrons bzw. Positrons. Für einen punktförmigen Kern und ein nicht relativistisches Elektron ergibt sich

eine analytische Funktion (Fermifunktion). Für alle realistischen Fälle muß der Korrekturfaktor numerisch berechnet werden. Für kleine Z Werte ist $F(Z, E_e) \sim 1$

$$\omega = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \int F(\pm, Z, E_e) p_e^2 (E_f - E_e)^2 dp_e \quad (154)$$

$$= \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} |\mathcal{A}_{fi}|^2 f(\pm, Z, E_f) m_e^5 c^7 \quad (155)$$

$$= \frac{1}{\tau} \quad (156)$$

τ ist dabei die Lebensdauer des Zustands. Die Funktion f ist tabelliert. d.h. die Messung der Lebensdauer erlaubt direkt die Messung des Matrixelements.

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 = \frac{2\pi^3}{f(\pm, Z, E_f) \tau} \frac{\hbar^7}{m_e^5 c^4} \quad (157)$$

Für große Energien und kleine Z -Werte erhält man für das Integral $f(Z, E_f) m_e^2 c^7 \sim \frac{1}{30c^3} E_f^5$ und damit gilt

$$\tau \propto \frac{1}{E_f^5} \quad (158)$$

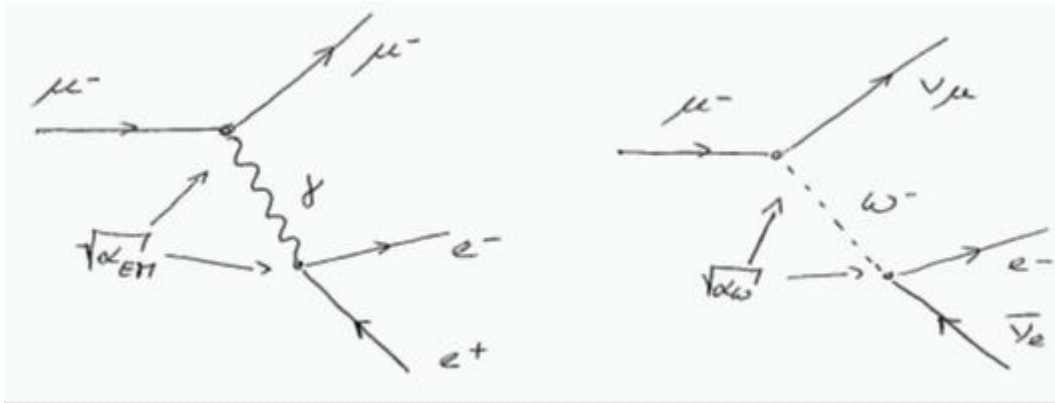
Dieser Zusammenhang wird auch als Sargent Regel bezeichnet.

8.3 Kurie-Plot

Aus Formel 153 erhält man (siehe Folie):

$$\left(\frac{d\Gamma}{p_e^2 dp_e} \right)^{1/2} = C \cdot \sqrt{|\mathcal{A}_{fi}|^2 (E_f - E_e)} \quad (159)$$

Diese linear Abhängigkeit von $E_f - E_e$ wird als Kurie-Plot bezeichnet. Für Neutrino-Massen $\neq 0$ ändert sich in der Nähe des Endpunktes ($E_e \sim E_f$) das gemessene Elektronenspektrum, was eine Bestimmung der Neutrinomasse ermöglicht. Diese Technik wird z.B. am KATRIN-Experiment (am KIT, Karlsruhe) ausgenutzt. (siehe Folie).



8.4 Austauschteilchen der schwachen WW

Der Propagator des geladenen Stroms (W -Austausch) der schwachen Wechselwirkung ist $\frac{1}{q^2 - M_W^2 c^2}$ ¹⁷. Bei niedrigen Energien ($q^2 \ll M_W^2 c^2$) kann der Propagatorterm mit $\frac{1}{M_W^2 c^2}$ genähert werden. Die Masse des W Bosons ist $M_W \sim 81 \text{ GeV}/c^2$. Die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung ist $\alpha_W \sim \frac{1}{40}$, d.h. größer als die Kopplungskonstante der EM Wechselwirkung $\alpha_{EM} \sim \frac{1}{137}$.

Amplituden von Prozessen der schwache Wechselwirkung sind aufgrund der zusätzlichen Unterdrückung durch die Masse des Austauschteilchens so klein, nicht aufgrund einer kleinen Kopplungskonstanten!

Der Propagator der beiden oben skizzierten Prozesse ist gegeben durch

$$\mathcal{A}_{EM} \propto \sqrt{\alpha_{EM}} \frac{1}{q^2} \sqrt{\alpha_{EM}} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}_W \propto \sqrt{\alpha_W} \frac{1}{q^2 - M_W^2 c^2} \sqrt{\alpha_W}.$$

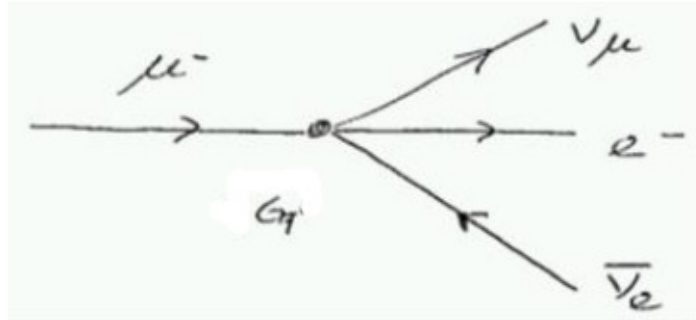
Für kleine q^2 Werte ist der Propagator und damit die Amplitude unabhängig von q^2 :

$$\frac{1}{q^2 - M_W^2 c^2} \Rightarrow \frac{1}{M_W^2 c^2} \quad (160)$$

In den 1930er Jahren (als nur Experimente bei kleinen q^2 durchgeführt wur-

¹⁷Der Propagator Term des neutralen Stroms (Z -Austausch) ist $\frac{1}{q^2 - M_Z^2 c^2}$, mit $M_Z \sim 91 \text{ GeV}/c^2$.

den) dachte man, die Amplitude sei für alle q^2 unabhängig von q^2 und interpretierte den μ -Zerfall als 4-Punkt WW, die es so im SM aber nicht gibt.



Daraus entstand die sogenannte Fermitheorie, die bei kleinen q^2 eine gute Näherung an die schwache Wechselwirkung des Standardmodells ist.

$$G_F \sim \frac{\alpha_W}{M_W^2 c^2}$$

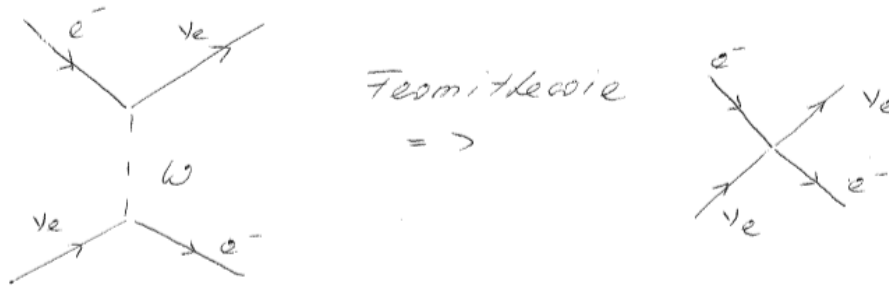
Die Annahme, dass der Propagator Term auch für große q^2 durch eine 4-Punktwechselwirkung mit der Kopplungskonstante G_F interpretiert kann führte aber z.B. für die Neutrino-Streuung an Nukleonen (siehe Abbildung) zu einem Wirkungsquerschnitt der mit dem Quadrat der Schwerpunktsenergie ansteigt.

$$\sigma(\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-) = \frac{G_F^2 \cdot E_{CMS}^2}{\pi} \quad (161)$$

D. h. für beliebig hohe Energien können beliebig hohe Übergangswahrscheinlichkeiten erreicht werden. Übergangswahrscheinlichkeiten größer als eins sind aber unphysikalisch, das heißt in einer vollständigen Theorie nicht erlaubt.

Dieses Problem führte zur Vorhersage massiver Austauschteilchen W^\pm, Z^0 von Glashow, Salam & Weinberg, bevor diese experimentell nachgewiesen wurden.

Die massiven W und Z -Bosonen wurden 1983 am CERN SPS (Super Proton Synchrotron) in $p\bar{p}$ Kollisionen bei einer Schwerpunktsenergie von $E_{CMS} = 540$ GeV nachgewiesen (siehe Folien). Die Vorhersage und der Nachweis dieser schweren Bosonen ist einer der größten Erfolge des Standardmodells.

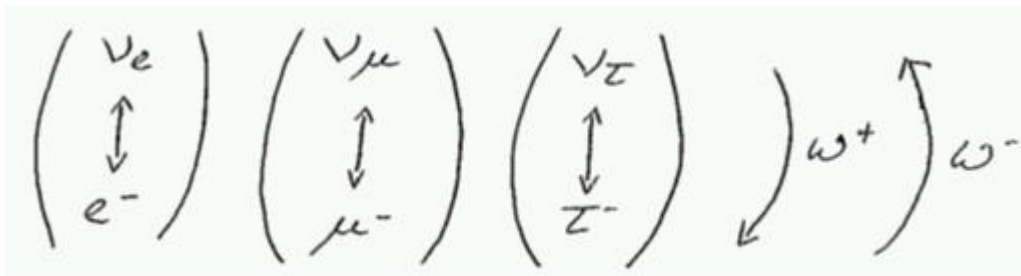


8.5 Kopplung der W und Z Bosonen an Quarks und Leptonen

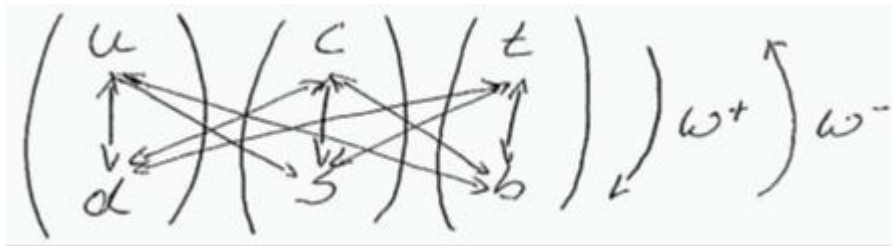
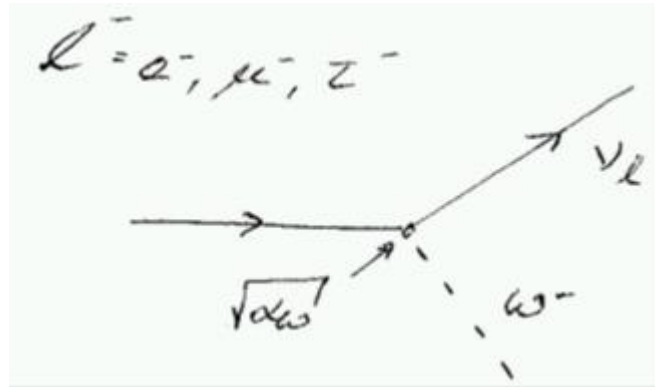
W Bosonen koppeln nur an links chirale Teilchen bzw. rechts chirale Antiteilchen. Dies führt zur Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung (siehe Wu-Experiment). Z Bosonen koppeln an links chirale und rechts chirale Teilchen, allerdings mit unterschiedlichen Wechselwirkungsstärken.

8.5.1 Geladener Strom - W^\pm Austausch

Für Leptonen koppelt das W Boson mit gleicher Stärke an die Teilchen jeder Familie. Aufgrund von Leptonzahlerhaltung im Standardmodell führt der geladene Strom nur zu Übergängen innerhalb einer Lepton-Familie.



Für Quarks sind auch Übergänge ausserhalb der selben Familie erlaubt, jedoch unterdrückt.

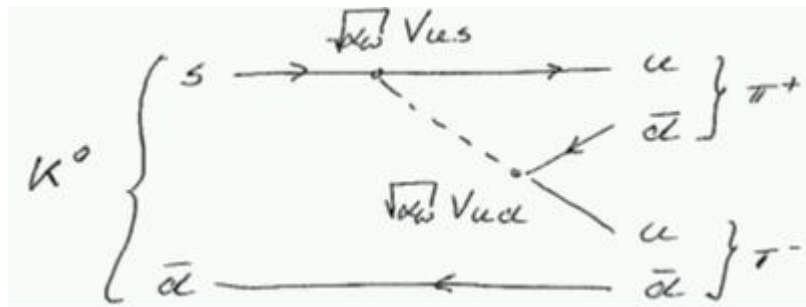


Die Stärke der Übergänge werden durch die Elemente der sogenannten Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix gegeben.

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

V_{CKM} ist eine unitäre Matrix.

z.B. $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$



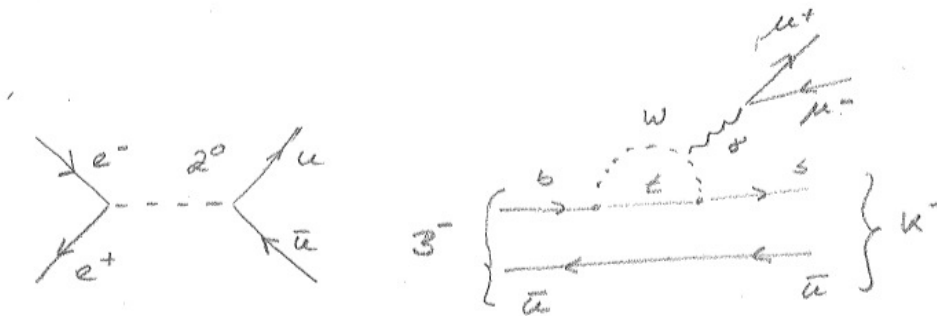
$$\mathcal{A} \sim \sqrt{\alpha_W} V_{us} \frac{1}{q^2 + M_W^2 c^2} \sqrt{\alpha_W} V_{ud}$$

$$\rightarrow \sigma \propto |V_{us}|^2 |V_{ud}|^2$$
 Mit Hilfe der CKM Matrixelemente kann das relative Verzweungsverhältnis von Zerfällen mit ähnlichen Phasenraum (gleiche Anzahl Teilchen ähnlicher Masse im Endzustand) abgeschätzt werden.

Nebenbemerkung: Die komplexen Parameter der CKM Matrix sind die einzige Ursache für CP-Verletzung im Standardmodell.

8.5.2 Neutraler Strom - Z^0 Austausch

Es gibt keine flavour changing neutral currents FCNCs (auf tree-level). Das heißt das Z^0 boson koppelt immer an Quark-Antiquark oder Lepton-Antilepton-Paare der gleichen Familie (siehe Bild unten links). Neutrale Übergänge z.B. von einem b zu einem s Quark sind nur in Diagrammen höherer Ordnung möglich (siehe Bild unten rechts).



Nebenbemerkung: Die schwache Wechselwirkung ist die einzige Wechselwirkung an der Neutrinos teilnehmen. Die Neutrinooszillation ist im Standardmodell NICHT beschrieben. Die schwache Wechselwirkung ist die einzige Wechselwirkung die Parität (P) und Teilchen-Antiteilchenasymmetrie (CP) verletzt. Wir wissen dass wir um unser Materie-dominiertes Universum erklären zu können im Bereich der CP-Verletzung einiges NICHT verstehen. Die schwache Wechselwirkung ist deshalb meiner Meinung nach am interessantesten da sie eine potentielle Brücke zur sogenannten Neuen Physik, Physikphänomenen jenseits des Standardmodells darstellt.

9 Kerne, Kernzerfälle und Kernmodelle

Atomkerne werden durch effektive Restwechselwirkung der starken Kraft gebunden. Eine Beschreibung der Kernkraft durch fundamentale QCD ist aber sehr schwierig. Deshalb werden Kerne meist durch effektive Modelle beschrieben.

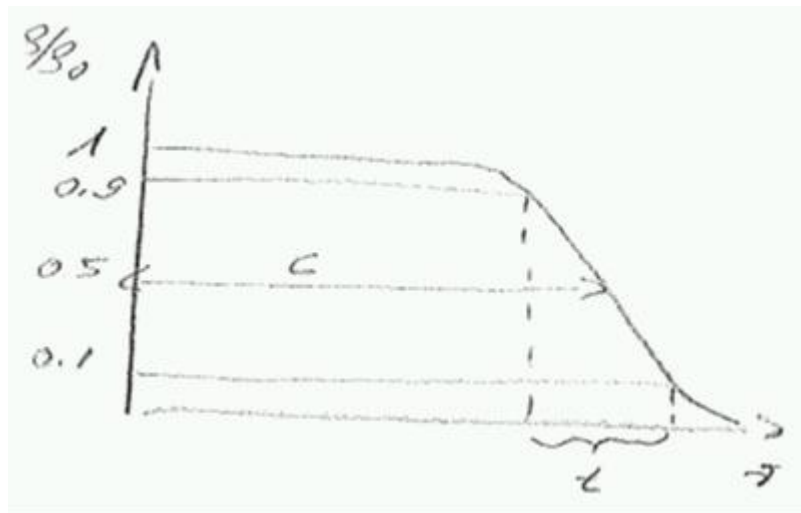
9.1 Tröpfchenmodell

Erinnerung: Was wissen wir über Atom-Kerne aus der Elektron-Kernstreuung? (s. Kapitel 5)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = |F(q^2)|^2$$

F: Formfaktor $q^2 = \text{Quadrat des 3er-Impulsübertrags}$

Der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung. Durch Vergleich der Fouriertransformierten Verteilung verschiedener Kernmodelle wurde gefunden, dass eine Fermiverteilung die meisten Kerne (insbesondere für große A) gut beschreibt.



Radiale Ladungsverteilung: $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+e^{(r-c)/a}}$

c: Halbdichtenradius $c \approx (1.18A^{1/3} - 0.48)fm$

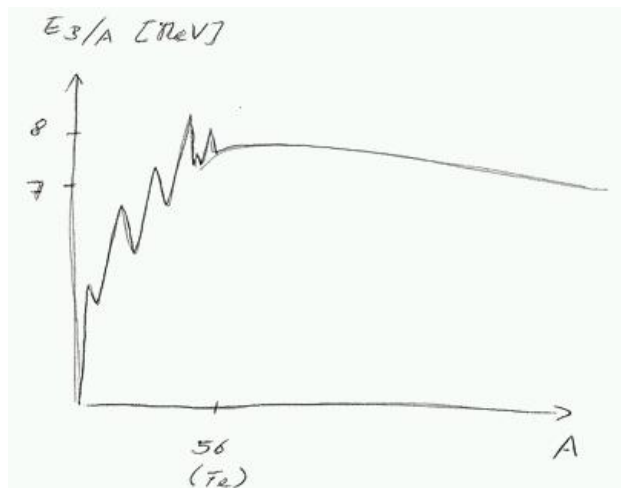
t: Oberflächendichte $4\ln 3a = 4.4a$ $a \approx 0.545fm$

9.1.1 Bindungsenergie von Kernen

$$M(Z, A)c^2 = Zm_p c^2 + \underbrace{(A - Z)}_N m_n c^2 - E_B(Z, A)$$

In dieser Definition ist die Bindungsenergie $E_B(Z, A) > 0$.

Die Bindungsenergie pro Nukleon (E_B/A) hat ein Maximum bei $A = 56$ von



8.7 MeV und fällt dann nur leicht ab (z. B. $E_B(U^{235})/A \sim 7.6MeV$)

(Nahezu) konstante Bindungsenergie pro Atom modulo Oberflächeneffekten und konstante Dichte im Inneren des Kerns sind sehr ähnlich zu den Eigenschaften einer nicht kompressibaren Flüssigkeit. Dies führte zur Einführung des Tröpfchenmodells in dem ein Atomkern durch einen Flüssigkeitstropfen beschrieben wird.

Aus diesem Modell kann eine semi-empirische Massenformel (Bethe-Weizsäcker-Formel) hergeleitet werden, die viele Eigenschaften sehr gut beschreibt und

die Bindungsenergie pro Nukleon auf E_B/A auf $\pm 1.5\%$ genau angibt.

9.1.2 Bethe-Weizsäcker-Massenformel

$$E_B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2/A^{1/3} - a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta/A^{1/2} \quad (162)$$

Volumenbeitrag $a_v A$:

Jedes Nukleon ist nur mit seinen Nachbarn gebunden (Abstand zu Nachbarn 1-2 fm). Das ist das Ergebnis der kurzen Reichweite der starken Wechselwirkung und spiegelt sich auch in der konstanten Dichte im Kern wieder. Das Volumen des Kerns ist proportional zu der Anzahl der Nukleonen im Kern.

Oberflächeneffekte $-a_s A^{2/3}$:

Nukleonen an der Oberfläche haben weniger Nachbarn und sind entsprechend weniger stark gebunden.

Die Größe der Oberfläche geht mit $V^{2/3}$ und damit mit $A^{2/3}$.

Coulombabstoßung $-a_c Z^2/A^{1/3}$:

Jedes Proton wechselwirkt mit jedem anderen Proton im Kern. Der Effekt hängt vom mittleren Abstand der Protonen ab $\sim A^{1/3}$

Asymmetrie-Term $-a_{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$:

Bei leichten Kernen sind Isobare (gleiches A, unterschiedliches Z) mit $N \approx Z$ stabiler, bei schweren Kernen solche mit $N > Z$.

Paarungs-Term: $\delta/A^{1/2}$

Gerade Anzahl von p und n erhöhen Kernstabilität

$$\delta = \begin{cases} + 11.2 \text{ MeV} & \text{Z, N gerade: gg-Kerne} \\ 0 & \text{Z oder N ungerade: gu oder ug-Kerne} \\ - 11.2 \text{ MeV} & \text{Z und N ungerade: uu-Kerne} \end{cases}$$

Man findet empirisch

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}$$

$$a_s = 17.2 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0.7 \text{ MeV}$$

$$a_{sym} = 22.5 \text{ MeV}$$

Das Tröpfchenmodell ist sehr vereinfacht und hat einige Schwächen. Es beschreibt z.B. nicht die Spinausrichtung der Nukleonen. Es beschreibt keine mögliche Deformation von der Kugelform, die zu dem in der Natur beobachteten Quadrupolmoment (und zu Kernspaltung) führt. Alle Quantenmechanischen Effekte (z. B. Anregungszustände) werden in dem Modell nicht beschrieben. Trotz einiger Mängel ist die Massenformel aber eine sehr nützliche (und sehr genaue) Beschreibung der frei werdenden Energie bei Kernprozessen (α , β -Zerfall, Kernspaltung, Kernfusion). Das Tröpfchenmodell ist die Basis für unser Verständnis der Kernsynthese in der Sternentstehung.

9.1.3 β -Zerfall

$$\beta^- \text{-Zerfall: } X(Z, A) \rightarrow Y(Z + 1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\beta^+ \text{-Zerfall: } X(Z, A) \rightarrow Y(Z - 1, A) + e^+ + \nu_e$$

9.1.4 Elektronen-Einfang (Electron Capture EC)

Ein Elektron aus der Elektronhülle wird eingefangen:
 $e^- + X(Z, A) \rightarrow Y(Z - 1, A) + \nu_e$

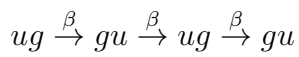
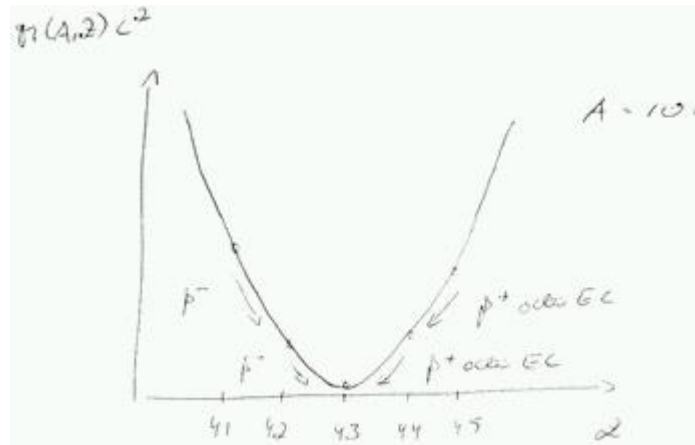
β -Zerfall bzw. EC ändern die Atommassenzahl A nicht, d. h. das sind Übergänge zwischen Isobaren.

Für konstantes A läßt sich die Massenformel als Funktion von Z schreiben.

$$M(A, Z)c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - E_B(Z, A) = \alpha + \beta Z + \gamma Z^2 + \delta/A^{1/2} \quad (163)$$

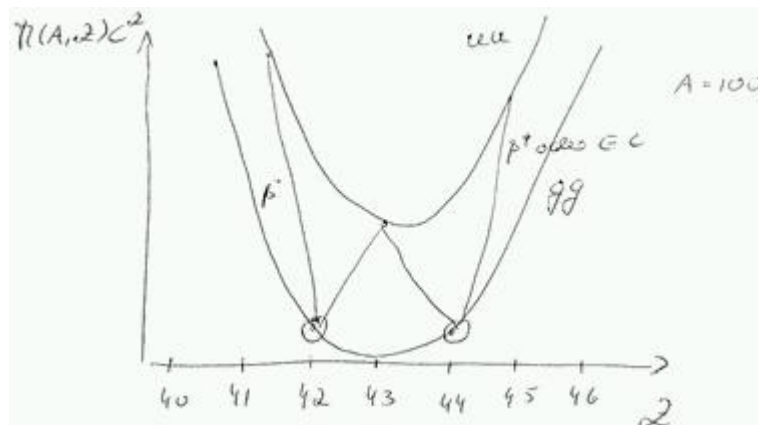
Die Koeffizienten α, β, γ kommen aus Bethe-Weizäcker-Formel.

1) Bsp. für β -Zerfall für ug-Kerne



Ruthenium ist der einzig gegen β -Zerfälle stabile Iso-bar für $A = 101$.

2) Bsp. für β -Zerfall für gg/uu Kerne



Aufgrund des Paarungsterms gibt es 2 Parabeln.

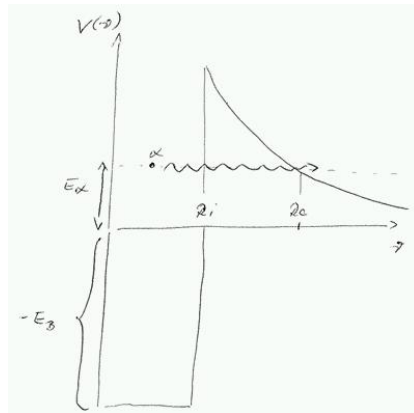
In diesem Beispiel gibt es zwei gegen β -Zerfall stabile gg-Kerne und keinen stabilen uu-Kern. Je nach Steilheit der Parabeln kann es aber auch stabile uu-Kerne geben

9.1.5 α -Zerfall

Protonen und Neutronen sind mit 8-9 MeV/A gebunden und können nicht aus dem Kern entweichen. Oft ist allerdings die Emission eines ${}^4\text{He}$ -Kerns ($2n, 2p$) möglich, was an der starken Bindung des ${}^4\text{He}$ liegt. Sobald das α -Teilchen den Kern verläßt, erfährt es Coulomb-Abstoßung.

$$V_{Coulomb}(r) = \underbrace{2}_{\text{He}} \underbrace{(Z-2)}_{\text{Rest}} \frac{\alpha \hbar c}{r} \quad (164)$$

Im Inneren des Kerns herrscht ein stark anziehendes Kernpotential, das näherungsweise durch einen Potentialtopf beschrieben wird. Durch die Bildung des α -Teilchens wird Bindungsenergie frei, die dazu führt, dass das α -Teilchen auf ein Energie-Niveau E_α angehoben wird (das durch die Massenformel berechnet werden kann). Auf diesem Energie-Niveau ist tunneln durch die Coulombbarriere möglich. Nach der Emission entspricht E_α der kinetischen Energie des α -Teilchens.



Für das Coulombpotential findet man die Tunnelwahrscheinlichkeit T (Transmissionskoeffizient) $T = e^{-2G}$ mit

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_{R_i}^{R_a} \sqrt{2m_\alpha c^2 (V(r) - E_\alpha)} dr \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} \quad (165)$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines α -Teilchens ist: $\Gamma \sim \frac{1}{\tau} = \lambda_0 T$, wobei λ_0 die Wahrscheinlichkeit ist, ein α -Teilchen zu bilden mal der Wahrscheinlichkeit, dass es gegen die Potentialwand läuft

$$\Rightarrow \ln \tau \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Durch α -Zerfälle werden vier Zerfallsreihen festgelegt: $A = 4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ (siehe Folie)

9.2 Kern-Spaltung

Da die Bindungsenergie pro Nukleon für ${}^{56}\text{Fe}$ maximal ist, können sich schwere Kerne mit $A > 56$ prinzipiell in zwei mittelschwere Kerne spalten. Das passiert durch zwei Mechanismen, die spontane und die stoßinduzierte Spaltung.

i) spontane Spaltung

Die Nukleonverteilung verformt sich zu Ellipsoiden, die Bindungsenergie verringert sich wegen der vergrößerten Oberfläche und gleichzeitig sinkt die Coulombabstoßung. Die Situation ist ähnlich zu dem α -Zerfall, jedoch die freiwerdende Energie der Spaltprodukte E_Q ist größer, aber auch der Potentialtopf V_c ist tiefer wegen der größerer Ladung der beiden Tochterkerne im Vergleich zum α -Zerfall.

$E_f = V_c - E_Q$ ist die benötigte Aktivierungsenergie der Spaltung (Höhe der Tunnelbarriere). Diese ist kleiner als beim α -Zerfall, jedoch ist die Tunnelwahrscheinlichkeit bei schweren Teilchen ebenso kleiner, d. h. spontane Spaltung ist sehr selten.

ii) Stoßinduzierte Spaltung

Von außen wird Aktivierungsenergie hinzugefügt. Das geht am besten durch Beschuß von Neutronen, da diese keine Coulombbarriere überwinden müssen.

In manchen Fällen sind thermische Neutronen ausreichend. Zum Beispiel:

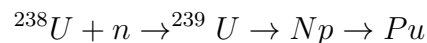
$$n(\text{therm}) + {}^{235}\text{U} \rightarrow ({}^{236}\text{U})^* \rightarrow Y_1 + Y_2 + \nu n$$

$$\Delta E = m({}^{235}\text{U})c^2 + m_n c^2 - m({}^{236}\text{U})c^2 = 6.4\text{MeV} > \Delta E_{f=fission} \sim 5.8\text{MeV}$$
(166)

$$n(\text{therm}) + {}^{238}\text{U} \rightarrow ({}^{239}\text{U})^* \rightarrow Y_1 + Y_2 + \nu n$$

$$\Delta E = m({}^{238}\text{U})c^2 + m_n c^2 - m({}^{239}\text{U})c^2 = 4.8\text{MeV} < \Delta E_{f=fission} \sim 6.4\text{MeV}$$

Unterschied zwischen beiden Fällen ist die Paarungsenergie. Im ersten Fall findet der Übergang von einem *ug* in einen *gg* Kern statt, d.h. es wird zusätzlich Energie frei. Im zweiten Fall ist es ein Übergang von einem *gg* in einen *ug* Kern, das heisst es muss die Paarungsenergie zusätzlich aufgebracht werden. E_f ist die Höhe der Coulomb-Barriere, der beiden Spaltprodukte Y_1 , Y_2 . In der Regel erfolgt die spontane Spaltung asymmetrisch, d.h. die beiden Spaltfragmente Y_1 und Y_2 sind verschieden. Sie liegen meist bei Massenzahlen um 90 und um 140. Es ist im zweiten Fall aber das Einfangen des Neutrons gefolgt von einem β Zerfall möglich:

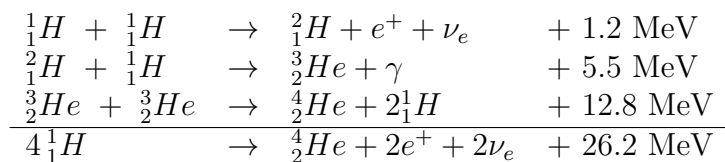


Eine Kettenreaktion ist nur mit thermischen Neutronen und ${}^{235}\text{U}$ möglich. Im Mittel wird ~ 200 MeV/Spaltung frei. Bei Spaltung von ${}^{235}\text{U}$ werden etwa 2,5 schnelle Neutronen freigesetzt, die um eine Kettenreaktion auszulösen dann moderiert werden müssen.

Falls die Masse des Urans hoch genug ist, werden die freigesetzten schnellen Neutronen durch Stöße im Uran moderiert und dann wieder absorbiert und es kommt zu einer unkontrollierten Kettenreaktion. Die kritische Masse hierfür ist $m_{krit}({}^{235}\text{U}) = 49$ kg. Wenn das Uranium sich in einem Wassertank befindet der die Neutronen reflektiert, reichen 23 kg.

9.3 Fusionsreaktionen

Für Kerne mit $A < 56$ wird bei Fusion von 2 Kernen Energie frei. Ein Beispiel für Kernfusion ist die Wasserstoff-Fusion in der Sonne (*pp* Zyklus):



Die ersten beiden Reaktionen müssen dabei zweimal statt finden damit die dritte Reaktion stattfinden kann. Die Wechselwirkung, die der ersten Reaktion zu grunde liegt ist der schwache Prozess $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ und hat einen sehr kleinen Wirkungsquerschnitt. Die zweite Reaktion ist ein Prozess der elektromagnetischen Wechselwirkung und die dritte ein Prozess der starken Wechselwirkung. Die Brenndauer unsere Sonne wird durch die erste Reaktion festgelegt.

Die Leistungsdichte im Inneren der Sonne beträgt 300 W/m^3 . Die solare Leistung an der Erdoberfläche beträgt ca. 1400 W/m^2 .

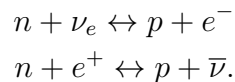
9.4 Elementsynthese

Der Urknall fand vor ca. 13.7×10^{-9} Jahren statt.

9.4.1 Primordiale Elementsynthese

In den ersten μs bestand die Materie aus freien Quarks, Gluonen, Leptonen sowie allen Austauschbosonen. Durch Ausdehnung des Universums fand eine Abkühlung statt.

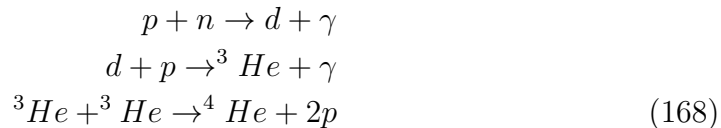
Etwa $t = 10 \mu\text{s}$ nach dem Urknall war das Universum auf $T = 10^{12}\text{K}$ abgekühlt ($k_B T \sim 150 \text{ MeV}$) und die Quarks und Gluonen kondensierten zu Hadronen. [Das Forschungsziel des ALICE Experiments am LHC ist, die Eigenschaften dieses so-genannten Quark-Gluon-Plasmas genauer zu untersuchen.] Die Hadronen zerfallen und es bleiben am Ende nur noch Protonen und Neutronen bzw. ihre Antiteilchen übrig. Aufgrund eines winzig kleinen Materieüberschusses $[(\text{Materie} - \text{Antimaterie})/(\text{Materie} + \text{Antimaterie}) \sim 10^{-9}]$ dominieren Protonen und Neutronen das heutige Universum. Solange die Temperatur T und damit die Energie- & die Teilchendichte hoch genug ist, stehen Protonen und Neutronen im thermischen Gleichgewicht:



Nach $t \sim 1\text{s}$ ($kT \sim 1 \text{ MeV}$) entkoppeln die Neutrinos und diese Reaktionen sind nicht mehr möglich. Zu dieser Zeit gilt:

$$\frac{N_n}{N_p} \Big|_{t \sim 1\text{s}} = \exp\left(-\frac{m_n - m_p}{kT}\right) \sim 0.2 \quad (167)$$

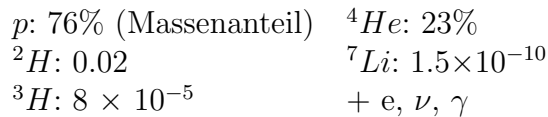
Sobald $kT < 1\text{MeV}$ ist bilden sich die ersten Kerne:



(169)

Da es keine $A = 5$ und $A = 8$ Kerne gibt, bricht die Reaktion hier ab. Es gibt nur sehr wenig ${}^7\text{Li}$: ${}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^7\text{Li}$ da die Reaktion konkurriert mit $p + {}^7\text{Li} \rightarrow 2{}^4\text{He}$. Sobald alle Nukleonen aufgebraucht sind, ca. 300 s nach dem Urknall, stoppt die Nukleosynthese. Dann beträgt das Verhältnis von Neutronen zu Protonen ca. 13.5%.

Die so entstandene Elementhäufigkeit lässt sich noch heute nachweisen und wird als primordiale Elementhäufigkeit bezeichnet:

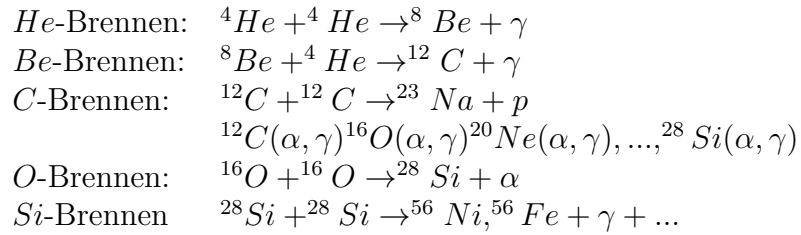


Das Universum expandierte und kühlte sich weiter ab. Bei $T \sim 3000\text{K}$ ($\sim \text{eV}$) werden nach $t=4 \times 10^5$ Jahren durch Einfang von Elektronen die neutralen Atome gebildet. Zu diesem Zeitpunkt *entkoppeln* die Photonen. Sie sind heute als kosmische Hintergrund-Strahlung (“3K”) noch vorhanden. (\rightarrow “rot-Verschiebung” durch Expansion). Die gleichmäßige Verteilung der Hintergrundstrahlung (keine Quellen) gilt als einer der überzeugendsten Beweise der Urknall-Theorie.

9.5 Elementsynthese in Sternen

Nach etwa 10^8 Jahren ist der Gasdruck gering genug, dass Gravitation Protonen und He Gas zu einem prästellaren Nebel einfangen und verdichten kann. Durch Gravitation erwärmt sich Nebel im Inneren bis Temperatur und Dichte ausreicht bei $T \sim 10^7\text{K}$ den pp -Fusionszyklus zu zünden. Der Strahlungsdruck im Inneren des Sterns wirkt dem Gravitations-Kollaps entgegen. Der Stern befindet sich in einer stabilen Brennphase, das sogenannte Wasserstoff-Brennen.

Nach der pp -Phase können sich weiter Brennphasen anschließen:



Durch Fusionsprozesse in Sternen können alle Elemente bis Fe/Ni gebildet werden. Alle anderen Elemente werden durch Neutroneneinfang und β -Zerfall gebildet. In Super-Nova-Explosionen gibt es sogenannte *rapid-neutron capture* (r-Prozesse) und *slow-neutron capture* (s-Prozesse), je nachdem ob die Neutroneneinfangzeit schneller oder langsamer als die β -Zerfallszeit ist. Diese Prozesse sind allerdings noch Gegenstand aktueller Forschung.