

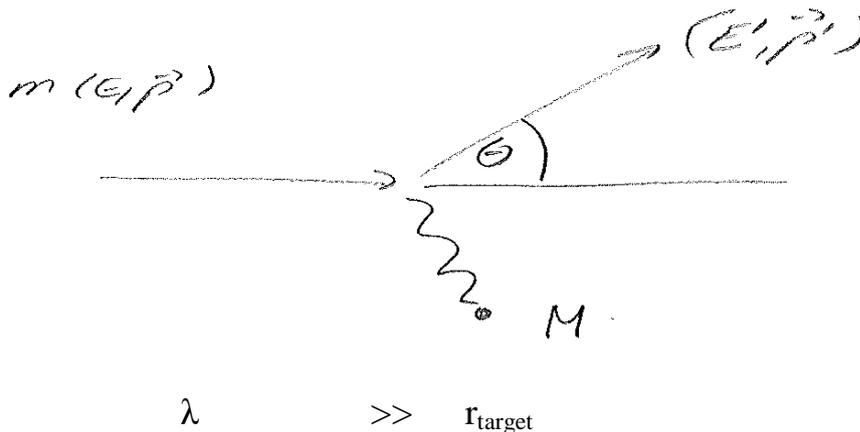
#### 4) Streuung von Elektronen mit Kernen und Nukleonen

Streuexperimente und ihre Interpretation sind Schlüssel zur Struktur von Kernen und Nukleonen (Protonen, Neutronen).

Die Beschreibung der Streuung hängt von der Energie der einlaufenden Elektronen ab.

##### a) Rutherford-Streuung

Stoß zweier (nicht rel.) punktförmiger spinloser Teilchen



de Broglie Wellenlänge des  
einlaufenden Teilchens

Radius des Targeteilchens

$$m \ll M$$

=> Rückstoß kann vernachlässigt werden

$$\Rightarrow |\vec{p}| = |\vec{p}'| \Rightarrow E = E' \quad \frac{v}{c} = \beta = \beta' = \frac{v'}{c}$$

$$\Rightarrow q^2 = \underbrace{(E - E')^2}_{=0} - (\vec{p} - \vec{p}')^2 < 0$$

$$q^2 = -4|\vec{p}|^2 \sin^2 \Theta/2 \quad \Rightarrow \quad |q| = 2|\vec{p}| \sin \Theta/2$$

$$q^2 = \vec{q}^2$$

4er Impuls    3er Impuls

Rutherford-Experiment

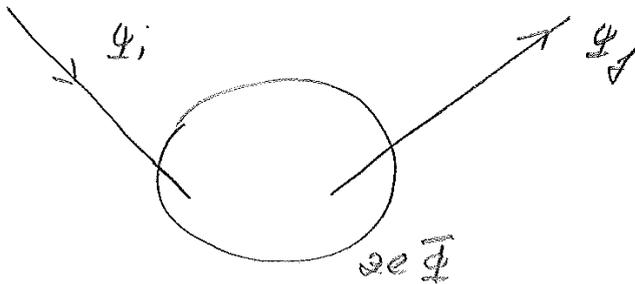
$\alpha$ -Kerne (aus radioaktiven Präparaten auf dünne (einlagige) Goldfolie

$$q = 2e \quad m = 4 \text{ amu} \approx 4 \text{ GeV}/c^2 \quad E_{\text{kin}}(\alpha) \sim 5 \text{ MeV}$$

$$mc^2 \gg E_{\text{kin}} \Rightarrow \text{nicht relativistisch}$$

$$M_{\text{gold}} = 197 \text{ amu} \quad \gg m \quad Z_{\text{gold}} = 79$$

## Born'sche Näherung



$\Phi$ : elektrisches Potential

ze: Ladung des einlaufenden Teilchens

Wenn  $V = ze\Phi$  klein ist, kann  $\Psi_i, \Psi_f$  als ebene Welle angenommen werden (störungstheoretischer Ansatz)

Fermi's goldene Regel

$$\mathcal{A}_{fi} = \langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle$$

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}$$

$$\Psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}'\vec{x}/\hbar}$$

$V$  = Normalisierungsvolumen in folgenden 1 gesetzt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{fi} &= ze \int e^{-i\vec{p}'\vec{x}/\hbar} \Phi(\mathbf{x}) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} d^3x \\ &= ze \int \Phi(\mathbf{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \end{aligned}$$

Green's theorem: u, v Felder die stark abfallen mit Abstand

$$\int (u\Delta v - v\Delta u) d^3x = 0 \quad \text{mit } \Delta = \nabla^2$$

$$e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \Delta e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{ze \hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \Phi(\mathbf{x}) \Delta e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

$$= -\frac{ze \hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \Delta \Phi(\mathbf{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x$$

Green's theorem

$$\Delta\Phi(x) = \rho(x)$$

$\rho(x)$ : Ladungsdichte-Verteilung

$\rho(x)$ : Z e f (x)

f(x): normierte Ladungsdichte Verteilung  $\int f(x) d^3x = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{fi} &= \frac{ze \hbar^2}{|\vec{q}|^2} \int \rho(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x \\ &= \frac{ze Ze \hbar^2}{|\vec{q}|^2} \underbrace{\int f(x) e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} d^3x}_{F(\vec{q}): \text{Formfaktor}} \end{aligned}$$

Formfaktor ist Fouriertransformierte der Ladungsverteilung

Für Rutherford f(x) =  $\delta(x)$

Delta-Funktion

=> punktförmiges Target

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{p_f^2 c^2}{\beta \beta'} |A_{fi}|^2$$

Phasenraum siehe Kapitel 2.2.2 (damals für  $\beta = \beta' = 1$  hochrelativistisch)

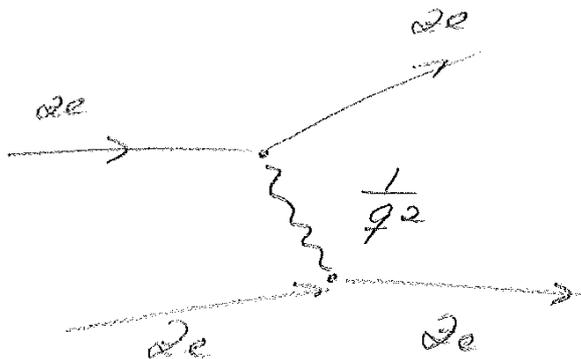
$$= \dots = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4 |\vec{p}|^2 \beta^2} \frac{1}{\sin^4 \Theta/2} \frac{(\hbar c)^2}{c^2}$$

$$[E_{kin} = 1/2 |\vec{p}| v = 1/2 |\vec{p}| \beta \cdot c]$$

$$= \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2} \frac{1}{\sin^4 \Theta/2} (\hbar c)^2$$

Zur Herleitung wurde nur ein elektrostatisches Potential benutzt, reine QED (ohne Berücksichtigung des Spins).

Vergleich mit Amplitude aus Feynman-Diagramm



$$\mathcal{A} \sim \frac{z Z e^2}{q^2}$$

$$\mathcal{A}^2 \sim \frac{z^2 Z^2 e^4}{q^4}$$

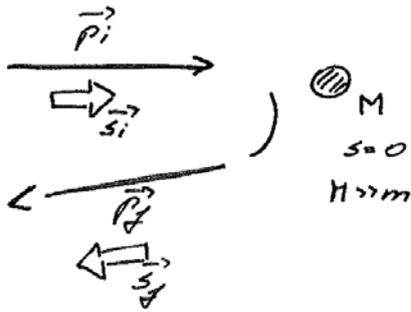
$$\frac{1}{q^4} \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta/2} \quad \text{Abhängigkeit kommt aus Propagator Term}$$

## b) Mott-Streuung

Experimente werden mit Elektronen ( $s = 1/2$ ) durchgeführt.

Für hochrelativistische Teilchen ( $\beta \rightarrow 1$ ) ist Helizität = Chiralität = erhaltene QZ

→ Drehimpuls und Helizitätserhaltung unterdrücken Rückwärtsstreuung



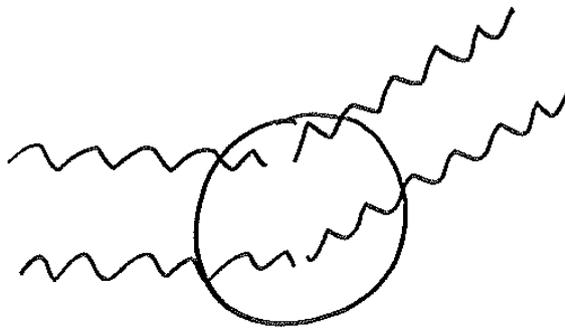
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Spin} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ohne Spin} \cos^2 \Theta / 2$$

für  $\beta = 1$

Für  $\beta < 1$  ist Helizität keine Erhaltungsgröße.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} (1 - \beta^2 \sin^2 \Theta / 2)$$

## c) Streuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen



Korrekturfaktor (Formfaktor) benötigt, der die Phasendifferenz der Streuung an verschiedenen Punkten der Ladungsverteilung beschreibt (nicht relevant wenn  $\lambda \gg r_{target}$  ist)

Für den WQ der Streuung eines Teilchens an einer ausgedehnten Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  erhält man:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{punkt f.} |F(\vec{q}^2)|^2$$

Bemerkung:

- $|F(\vec{q}^2)|^2 < 1$ , d.h. WQ ist immer kleiner als punkt f. WQ
- Für  $q \rightarrow 0$   $|F(q^2)| \rightarrow 1 \equiv$  Grenzfall der Streuung an punktförmigen Teilchen

## 4.1 Elektron Kern-Streuung

Aus  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp}$  läßt sich  $|F(\vec{q})|^2$  bestimmen

Eine einfache Rücktransformation zur Ermittlung der Ladungsverteilung ist aber nicht möglich.

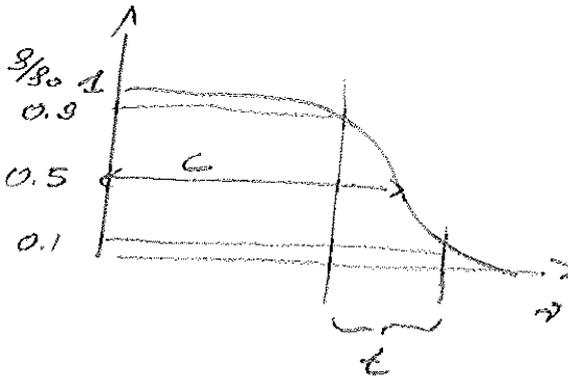
- 1)  $|F(\vec{q}^2)|^2$  nicht für alle  $\vec{q}^2$  gemessen (für ausgedehnte Kerne fällt  $|F(\vec{q}^2)|^2$  für große  $\vec{q}^2$  stark ab  $\rightarrow$  schwer zu messen)
- 2) Man mißt nur  $|F(\vec{q}^2)|^2$  und nicht die Phase

stattdessen: Modellansätze zur Beschreibung der Ladungsverteilung

Fouriertransformierte der Modellansätze wird an Ladungsverteilung angepaßt

## 4.2 Ladungsverteilung von Kernen

Für eine Vielzahl von Kernen wurde die Ladungsverteilung bestimmt:  
Kerne werden gut durch Fermi-Verteilung beschrieben



Radiale Ladungsverteilung

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

$\Rightarrow$  „weicher Rand“

c: Halbdichtenradius  $c \approx (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$

A: Atommassenzahl

t: Oberflächendicke  $= 4 \ln 3 a = 4.4a$

$$a \approx 0.545 \text{ fm}$$

Für mittlere und große A findet man näherungsweise für den mittleren quad. Radius

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.94 A^{1/3} \text{ fm}$$

Oft wird der Kern aber näherungsweise durch Kugel mit hartem Rand beschrieben für die  $\langle r^2 \rangle$  gegeben ist durch

$$\langle r^2 \rangle_{hart} = \int_0^R r^2 \rho(r) dr = 4\pi \underbrace{\frac{3}{4\pi R^3}}_{\text{Dichte}} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} R^2$$

homogene Kugel

$$\text{für } \langle r^2 \rangle_{\text{hart}} \stackrel{!}{=} (0.94 A^{1/3} \text{ fm})^2$$

$$\Rightarrow R_{\text{hart}} = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$$

Erwartungswert der harten Kugel soll gerade  $\langle r^2 \rangle$  für realen Kern mit weichem Rand entsprechen.

Für Nukleonendichte  $A/V = \rho_N$  findet man  $\rho_N = 0.17$  Nukleonen/fm<sup>3</sup>

### 4.3 Struktur der Nukleonen (= Proton/Neutron)

Bei  $e^-$  mit p/n Stößen muß zusätzlich berücksichtigt werden:

- 1) Spin des Nukleon  
bewegte Ladung ( $e^-$ ) erzeugt B-Feld, das an Spin des Nukleons koppelt
- 2)  $M_N \sim E_{\text{kin}}(e^-) \Rightarrow$  Rückstoß nicht vernachlässigbar  
 $\Rightarrow \vec{q}^2 \rightarrow q^2$  (3er Impuls wird durch 4er Impuls ersetzt)

a) Nukleonen Spin und magnetischer Moment

$$\vec{\mu}_N = g \mu_N \vec{s}$$

Nukleon (oder Kern) Magneton  
 ↓  
 Spin des Nukleons  
 ←  
 ↗  
 magn. Moment  
 ↘  
 gyromagnetische Zahl

$$\mu_N = 3.15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$$

[ Zum Vergleich  $\mu_B$  des Elektrons  $\mu_B = 5.79 \cdot 10^{-11} \text{ MeV/T}$  ]

$$|\vec{\mu}_p| = g_p \mu_N |\vec{s}| = 2.79 \mu_N \quad \text{bzw. } g_p = 5.58$$

$$|\vec{\mu}_n| = g_n \mu_N |\vec{s}| = 1.91 \mu_N \quad \text{bzw. } g_n = 3.82$$

Für punktförmige geladene Teilchen (z.B.  $e^-$ ) erwartet man  
 $g = 2 + \text{QED Korrekturen} = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + 0(\alpha^3)$

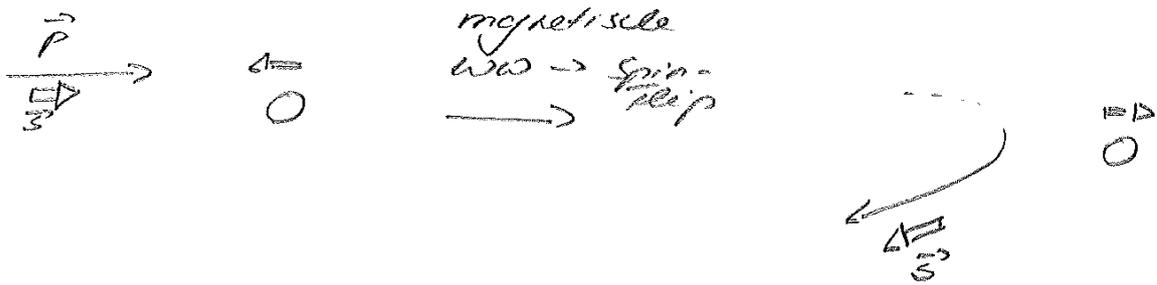
$$+ 0(\alpha^3)$$

Für punktförmige neutrale Teilchen wird  $g = 0$  erwartet.

$g_p \neq 2$  und  $g_n \neq 0$  ist eindeutiger Hinweis auf Substruktur des Protons/Neutrons.

b) Elektron-Streuung an „punktförmigen“ Spin  $\frac{1}{2}$  Protonen

( $g_p = 2 \Rightarrow$  „akademische Übung“)



Durch Spin-Flip des Protons Helizität und Drehimpuls bei Rückwärtsstreuung gleichzeitig erhalten!  $\Rightarrow$  Rückwärtsstreuung bevorzugt, Vorwärtsstreuung unterdrückt.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \left( \underbrace{\cos^2 \Theta/2}_{\substack{\text{Mott} \\ (\beta \rightarrow 1) \\ \text{el. WW}}} + \underbrace{\frac{Q^2}{2M_p^2 c^2} \sin^2 \Theta/2}_{\text{magn. WW}} \right)$$

Bem. 1: Für elastische Streuung ist  $q^2 = (p_e - p_e')^2 < 0$   
deshalb führt man die Variable  $Q^2 = -q^2$  ein

Bem. 2: Spin-Spin WW

$$1) \mathcal{A} \sim \mu \sim \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \mathcal{A}^2 \sim \frac{1}{M^2}$$

2)  $\sim Q^2 \rightarrow$  Spin-Spin WW fällt stark mit Abstand ab