3) Symmetrien

(siehe auch Diskussion in Frauenfelder + Henley)

Emmy-Noether (1917)

„Zu jeder Symmetrietransformation existiert eine Erhaltungsgröße“

Erhaltungsgröße: Eine Observable ist Erhaltungsgröße, wenn für den zugehörigen Operator Ô gilt: [H, Ô], d. h. H und Ô haben gemeinsame Eigenfunktionen

Symmetrietransformation

- kontinuierliche Symmetrien => additive Erhaltungsgrößen

  a) Raum-Zeit-Symmetrien
     z. B. $x \rightarrow x + \Delta x$ => Impulserhaltung
     $t \rightarrow t + \Delta x$ => Energieerhaltung

  b) Innere Symmetrien
     z. B. Phasentransformation $\Psi \rightarrow e^{i\rho}\,\Psi$

- diskrete Symmetrien => multiplikative Erhaltungsgrößen

Raumspiegelung	$x \rightarrow -x$	=> Paritätserhaltung
Zeitinversion	$t \rightarrow -t$	=> T-Paritätserhaltung
Ladungskonjugation	$q \rightarrow -q$	=> C-Paritätserhaltung

3.1 „Beweis“ EN-Theorem am Beispiel Raum-Zeit-Symmetrien

Annahme: Physikalische Beobachtungen sind invariant unter Transformation

$\Psi \rightarrow \Psi' = U\,\Psi$

Ψ: Wellenfunktion

$\int \Psi^+\,\Psi\,d^4x = 1$ => $\int \Psi^+\,U^+ U \Psi d^4x = 1$

=> $U^+U = 1$ => U ist unitär!

Invarianz unter Transformation

$$\int \Psi^+ H\,\Psi\,d^4x = \int \Psi'^+ H\,\Psi'\,d^4x = \int \Psi^+ U^+ H\,U\,\Psi\,d^4x$$

=> $U = U^+ H U$ => $U H = H U$ => $[H, U] = 0$

Betrachte infinitesimal kleine Transformation

U = 1 + iε G $\qquad$ Ĝ: Generator der Transformation

$U^+U = (1 - i\varepsilon\, \hat{G}^+)(1 + i\varepsilon\, \hat{G}) = 1 + i\varepsilon\, (\hat{G} - \hat{G}^+) + O(\varepsilon^2)$

=> $\hat{G} = \hat{G}^+$ $\qquad$ => Ĝ ist hermitesch

=> Ĝ entspricht einer Observablen g

[H, U] = 0 $\qquad$ => [H, Ĝ] = 0

=> g ist eine Erhaltungsgröße

Eine finite Transformation kann als Serie von infinitesimal kleineren Transformationen dargestellt werden.

$$U = \lim_{n\to\infty}\left(1 + i\frac{1}{n}\hat{G}\right)^n = \exp(i\hat{G})$$

Beispiel: Räumliche Translation

$U\,\Psi\,(x,t) = \Psi\,(x,\Delta x,t)$ $\qquad$ endliche Verschiebung

infinetesimal kleine Verschiebung δx

$$\Psi'(x,t) = \Psi(x,t) + \delta x\frac{d}{dx}\Psi(x,t)$$

Taylor-Entwicklung

$$= \left(1 + \delta x\,\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\right)\Psi(x,t)$$

endliche Verschiebung:

$$\Psi(x,\Delta x,t) = \lim_{n\to\infty}[(1 + \frac{\Delta x}{n}\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x)^n]\ \Psi\,(x,t)$$

$$= \underbrace{\exp(\tfrac{i}{\hbar}\ \Delta x\Delta\hat{p}_x)}_{U}\ \Psi(x,t)$$

Invarianz unter Translation in x-Richtung, Δx
= > [H, $\hat{p}_x$] = 0 $\qquad$ => x-Komponente des Impulses p_x ist erhalten

analog: räumliche Rotation

$U = \exp(\frac{i}{\hbar}\,\Delta\rho\hat{\vec{j}})$ $\hat{\vec{j}}$: Drehimpulsoperator

=> Drehimpulserhaltung

3.2 Warum sind Symmetrien so interessant?

- Teilchenphysik ist auf der Suche nach der „Masterformel“ (z. Z. vielversprechender Ansatz Lagrangien in QFT)

Die Masterformel beschreibt alle Symmetrien und Erhaltungsgrößen

$$\Longleftrightarrow$$

Studium von Symmetrien + Erhaltungsgrößen helfen auf der Suche / beim Test der Masterformel

- Historisch: Viele Teilchen werden beobachtet, Quarks waren noch unbekannt, sortieren von Teilchen nach ähnlichem („symmetrischen“) Verhalten (z. B. ähnliche Massen (p, n) oder (π^+, π^0, π^-))

- Invarianz unter Symmetrietransformationen bzw. Erhaltungsgrößen sind nur so genau gültig, wie sie experimentell getestet werden!

- Der Formalismus der Raum-Zeit Symmetrien mit Erhaltungsgrößen verknüpft ($\Delta\vec{x} \to \vec{p}$ Erhaltung, $\Delta\vec{t} \to E$ Erhaltung) verknüpft innere Symmetrien mit erhaltenen QZ!

3.3 Innere Symmetrien

Im Folgenden werden für die Teilchenphysik relevante Symmetrien diskutiert

a) 1-Dim. Phasentransformation

$\Psi'(\vec{r},t) = e^{i\rho}\,\Psi(\vec{r},t)$

ρ unabhängig von $\vec{r}$ => globale Phasentransformation
ρ abhängig von $\vec{r}$ => lokale Phasentransformation [U(1) = Eichgruppe der QED]

Invarianz unter einer globalen Phasentransformation ist mit der Erhaltung einer „additiven Ladung“ ≡ Quantenzahl verknüpft

Bsp: elektrische Ladung:

Ladungsoperator $\hat{Q}$ $\qquad$ $\hat{Q}\,\Psi = q\,\Psi$

q = 1 für Elektronenwellenfunktion
q = -1 für Positronwellenfunktion

Analog zu Impuls/Drehimpulsoperator läßt sich auch mit $\hat{Q}$ einer Transformation definieren

$U = \exp(-i\,\alpha\,\hat{Q})$

$U\,\Psi = \exp(-i\,\alpha\,\hat{Q})\Psi = \exp(-i\,\alpha\,q)\Psi$

$$HU\,\Psi = i\hbar\,\frac{d}{dt}\,\exp\left(-i\alpha\hat{Q}\right)\Psi$$

$$= \frac{i\hbar d}{dt}\,\exp(-i\alpha q)\,\Psi$$

$$= \exp(-i\alpha q)\frac{i\hbar d}{dt} = \mathrm{UH}\,\Psi$$

=> $[\hat{Q}, H] = 0$ $\qquad$ d. h. elektrische Ladung ist erhalten

<u>Verallgemeinerte Ladungen</u>

Analog zum Ladungsoperator kann man Leptonenzahloperator $\hat{L}$ und Baryonenzahloperator $\hat{B}$ einführen
→ Erhaltung entsprechender additiver QZ

1) Leptonenzahlerhaltung

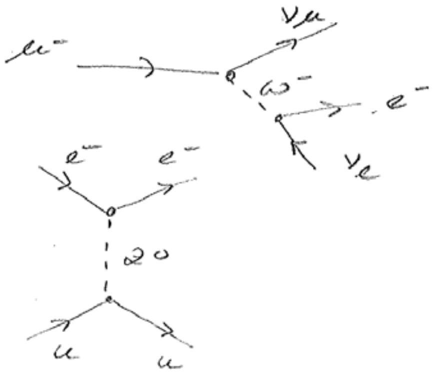
Lepton-Flavour $\qquad$ L_e, L_μ, L_τ
Lepton-Zahl $\qquad$ $L = L_e + L_\mu + L_\tau$

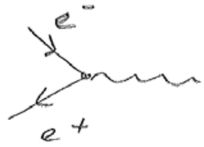
Wenn man von Neutrinomischung ($\nu_i \rightarrow \nu_j$) absieht, so sind experimentelle Befunde konsistent mit Annahme der Leptonflavourerhaltung

Bsp.

	μ^-	$\rightarrow$	e^- +	$\bar{\nu}_e$ +	ν_μ
L_μ	+1		0	0	+1
L_e	0		1	-1	0
L	1			+1	

Die Leptonenzahl ist an allen Vertices aller WW erhalten





Aufgrund der Existenz von Neutrinomischung kann es aber zu leptonenzahlverletzenden Prozessen kommen.

Bsp.

Zerfallsverhältnis (Theorie)
BR ($\mu^- \rightarrow e^- \gamma$) < 10^{-53}

Experiment BR < 10^{-11}

2) Baryonenzahlerhaltung

$$\tilde{B} = \frac{nq - n\bar{q}}{3}$$

Baryonen: $p|uud\rangle$, $n|udd\rangle$, $\Lambda|uds\rangle$, … => $\tilde{B} = +1$

Antibaryonen: $\bar{p}|\bar{u}\bar{u}\bar{d}\rangle$, $\bar{n}|\bar{u}\bar{d}\bar{d}\rangle$, $\bar{\Lambda}|\bar{u}\bar{d}\bar{s}\rangle$ => $\tilde{B} = -1$

Viele Erweiterungen des Standardmodells sagen Baryonenzahlverletzung voraus, das SM selbst läßt keine Baryonenzahlverletzung zu.

ABER: Urknall gleiche Anzahl von Baryonen und Antibaryonen.
Heute Überschuß an Protonen + Neutronen (Materie).

Experimentell wird die Baryonenzahlerhaltung z. B. durch die Suche nach dem Protonzerfall getestet.
$p \rightarrow \pi^0 + e^+$ (verletzt $\tilde{B}$ und $\tilde{L}$)

Derzeitiges Limit $\tau(\mathrm{p}) > 10^{32}$ Jahre

b) Phasentransformation in 2-D Isospin

Wiederholung: Spin für nicht rel. Fermionen (z.B. e^-, Quarks)

2-D Spiner $\quad \Psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Psi_0$

Ohne äußeres B-Feld sind Spin-up und Spin-down Fermionen nicht unterscheidbar.

=> Invarianz unter Rotation (Phasentransformation) im Spin-Raum

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi = U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Psi_0$$

mit $U = \exp(i\vec{\alpha}\vec{\sigma})$ wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Pauli-Matrizen

Spin für zusammengesetzte Systeme

Bsp. Positronium, gebundener $e^+ e^-$ Zustand

Gesamtspin: J = 1 Triplett

$s_z^1 s_z^2 \quad s^1 \quad s_z^1 \quad s^2 \quad s_z^2$

$J_z = 1 \quad |\uparrow\uparrow> = |1/2, 1/2,> + |1/2, 1/2>$

$J_z = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> + |\downarrow\uparrow>)$

$J_z = -1 \quad |\downarrow\downarrow>$

J = 0 Singulett

$J_z = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow> - |\downarrow\uparrow>)$

Triplett: symmetrisch gegen Vertauschung $1 \leftrightarrow 2$
Singulett: antisymmetrisch gegen Vertauschung

<u>Starker Iso-Spin</u>

Historisch: Von Heisenberg eingeführt für Protonen und Neutronen. Für starke WW erscheinen beide Teilchen als zwei verschiedene Zustände des gleichen Teilchens (Nukleon).

(Konzept macht nur Sinn, wenn EM WW ignoriert wird und m(p) ~ m(n) [was erfüllt ist.]

$$\binom{p}{n} \rightarrow U\binom{p}{n} \quad mit \quad \begin{array}{l} \quad\quad\; I \quad\quad I_3 \\ p = |\,{}^1\!/_2\,, \;\; {}^1\!/_2 > \\ n = |\,{}^1\!/_2\,, -{}^1\!/_2 > \end{array}$$

Invarianz unter Rotation im Isospin-Raum => starke WW erhält Isospin

Ähnlich zu dem Doublett (p, n) kann man die 3-Pionen $\pi^+ = |ud>,\ \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}> + |d\bar{d}>)$ und $\pi^- = |\bar{u}\bar{d}>$ als Isospin-Triplett auffassen.

$$\pi = \begin{cases} \pi^+ = |I = 1, & I_3 = 1 > \\ \pi^0 = |I = 1, & I_3 = 0 > \\ \pi^- = |I = 1, & I_3 = -1 > \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen muß es auch Singulett-Zustand geben: $\eta = |I = 0,\ I_3 = 0 >$

Isospin für zusammengesetzte Systeme:

$$I = 1 \begin{cases} |pp> & I_3 = +1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ (|pn> + |np>) & I_3 = 0 \\ |nn> & I_3 = -1 \end{cases} \qquad I = 0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\ (|pn> - |np>) \quad I_3 = 0 \right.$$

Totale Wellenfunktion eines 2-Nukleonensystems:

$\Psi_{tot} = \Phi_{Raum}\ \alpha_{Spin}\ \chi_{isospin}$

(Wellenfunktion ist Produkt aller Wellenfunktionen mit für die Teilchen relevanten QZ)

Deuteron d = |pn>   Spin J = 1, rel. Drehimpuls l = 0 (Grundzustand)

Φ_{Raum}: sym. wegen l = 0
α_{Spin} : sym. wegen J = 1
χ_{iso} : antisymmetrisch

=> $|d> = |I = 0, I_3 = 0>$

<u>Isospinerhaltung der starken WW</u>

(1)

	p	+ p	→ d^+	+ π^-
I	½	½	0	1
I_3	+½	+ ½	0	+1

(2)

	p	+ n	→ d^+	+ π^0
I	½	½	0	1
I_3	+½	- ½	0	0

p + n können zu $|I = 1, I_3 = 0>$ oder zu $|I = 0, I_3 = 0>$ koppeln.
Nur für I = 1 Zustand ist Reaktion möglich.

=> ${}^{\sigma_2}\!/_{\sigma_1} = 0.5$

(Annahme alle Isospinzustände sind gleich wahrscheinlich)

Bemerkung:

- Iso-Spin Symmetrie für EM WW nicht anwendbar $q(p) \neq q(n)$

- Isospin in schwacher WW verletzt

  $$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

	n	p	e^-	$\bar{\nu}_e$	
I	½	½	0	0	I_3 nicht erhalten
I_3	-½	+½	0	0	

- Konzept des starken Isospin aus Zeit in der Quarks noch nicht bekannt waren. Heute benutzt man statt dessen Quarkflavour-Quantenzahlen: U, D, C, S, T, B
  - starke + em WW erhalten Quarkflavour
  - schwache WW verletzt diese QZ

  Bsp: $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$

π^- $(\bar{u}d)$	$\mu^- \bar{\nu}_\mu$
U = -1	U = 0
D = +1	D = 0