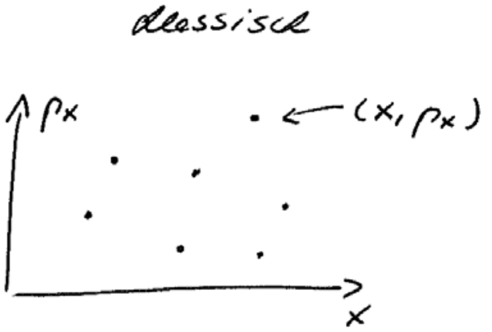
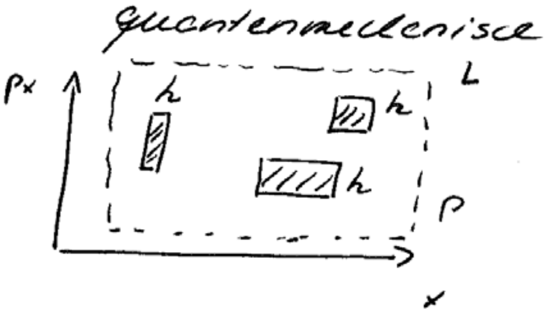
2.2.2) Phasenraum und Zustandsdichten

Um Teilchenzustände zu beschreiben, muss Ort und Impuls (Punkt im Phasenraum) angegeben werden.

Bsp. 1-D





wegen Unschärferelation wird Zustand durch Zelle mit Volumen h beschrieben

Wieviel Zustände passen in Phasenraumvolumen L x p?

1-D: $N = \frac{Lp}{h} = \frac{Lp}{2\pi\hbar}$

3-D: $N = \frac{Vp^3}{h^3} = \frac{V\int dp^3}{(2\pi\hbar)^3}$

V = Normierungsvolumen

<u>Zustandsdichte (3D)</u>

$$\rho = \frac{dN}{dE}$$

1 Teilchen Endzustand $E = E_1$

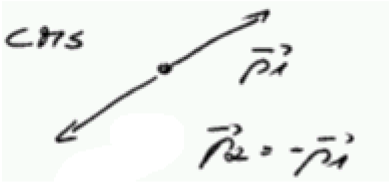
$$\rho_1 = \frac{dN_1}{dE_1} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{d}{dE_1}\int d^3p_1$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{d}{dE_1}\int {p_1}^2\,dp_1 d\Omega_1$$

$$\left(\begin{array}{ll} {E_1}^2 = {p_1}^2 c^2 + m^2 c^4 & \\ 2E_1\, dE_1 = 2p_1\, dp_1\, c^2 & \Rightarrow \frac{d}{dE_1} = \frac{E_1}{p_1 c^2}\frac{d}{dp_1} \end{array}\right)$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{E_1}{p_1 c^2}\,{p_1}^2\int d\Omega_1$$

2 Teilchen Endzustand



dE = $dE_1 + dE_2$

$+ \frac{p_1 c^2}{E_{12}} dp_1$ $\qquad$ $p_1^2 = p_2^2$

$+ \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2$ $\qquad$ $p_1\, dp_1 = p_2\, dp_2$

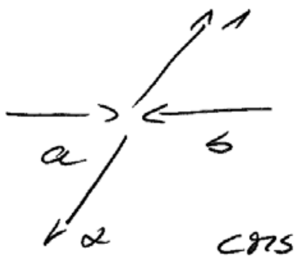
$$dE = p_1 dp_1 \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\right) c^2$$

$$=> \rho_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{1}{c^2}\, p_1 \int d\Omega_1$$

n-Teilchen Endzustand $\rho_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \int d{p_1}^3\, dp_{n-1}^3$

2.2.3) Wirkungsquerschnitt

$$\underbrace{a+b}_{i} \;\to\; \underbrace{1+2}_{f}$$



$\sigma = \frac{w_{fi}}{v_i}$ $\qquad$ (Normierungsvolumen ignoriert)

vi = Geschwindigkeit a → b (b in Ruhe)

$$w_{fi} = \int \frac{2\pi}{\hbar} \left|\mathcal{A}_{fi}\right|^2 \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1 d\Omega_1}_{\text{Phasenraum}}$$

1) $v_i = c$ hochrelativistisch

2) $m_i \ll E_i/c$ => vernachlässige Massen im Endzustand

3) CMS : $\overrightarrow{p_1} = -\overrightarrow{p_2}$ $\qquad$ $E_1 + E_2 = 2 p_1 c$

$E_1 E_2 = p_1^2 c^2$

Flußfaktor in fixed-target
Konfiguration bestimmt (Nachtmann 19,77)

$\downarrow$

$$d\sigma = 2\,x\,\frac{2\pi}{\hbar}\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{1}{c^3}\,\frac{{p_1}^2c^2}{2p_1c}\;p_1\left|\mathcal{A}_{fi}\right|^2\,d\Omega_1$$

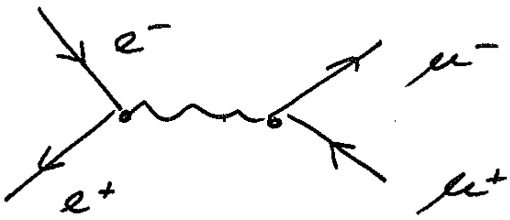
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{(\hbar c)^4}\,{p_1}^2c^2\left|\mathcal{A}_{fi}\right|^2\,d\Omega_1$$

Mit LI Phasenraumfaktor und Matrixelement:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}\,\frac{1}{(\hbar c)^4}\,\frac{1}{(E_a+E_b)^2}\int\left|M_{fi}\right|^2\,d\Omega_1$$

2.2.4) e^+ e^- Annihilation

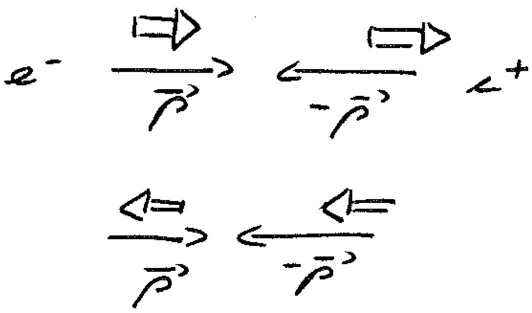
e.g. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$



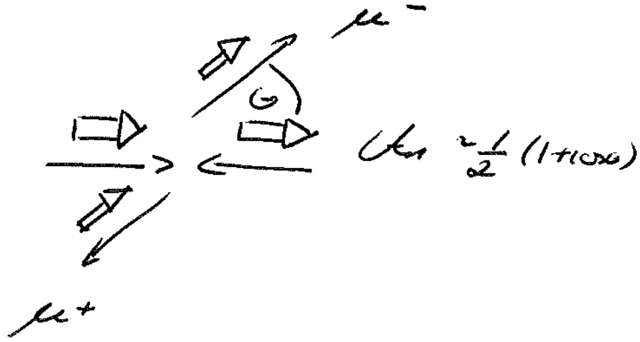
$\mathcal{A}_{fi} \sim \frac{\alpha}{q^2}$ $\qquad\qquad$ $q^2 = E_{CMS}^2$

Die angegebene Amplitude ignoriert Photon-Spin 1 und Fermionenspin 1/2

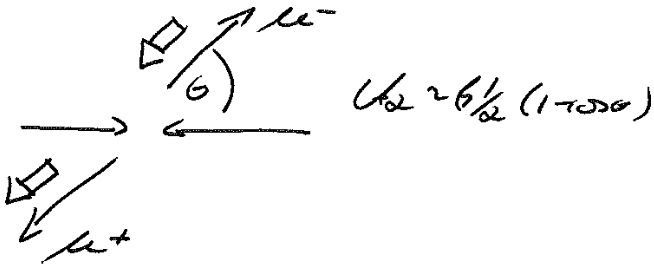
Erlaubte Konfiguration im Anfangszustand



Analog im Endzustand



(siehe Folie 4)



Addition der einzelnen Spin-Amplituden (sind unterscheidbar)

$$|\overline{\mathcal{A}_{if}}|^2 = \frac{I}{4} \sum |\mathcal{A}_{if}|^2_{spin}$$

$$= \frac{I}{4}\ (1 + cos^2\theta)\ \frac{(4\pi\alpha)^2}{{E_{CMS}}^4}\ (\hbar c)^6$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2}\ \frac{1}{(\hbar c)^4}\ \frac{{E_{CMS}}^2}{4}\ \underbrace{\frac{(4\pi\alpha)^2}{{E_{CMS}}^4}\ (\hbar c)^6\ \frac{1}{4}\ (1 + cos\ \theta^2)}_{|\overline{A_{if}}|^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{4}\ \frac{1}{{E_{CMS}}^2}\ (1 + \cos\theta)^2\ \ (\hbar c)^2$$

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\ d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \frac{I}{{E_{CMS}}^2}\ (\hbar c)$$

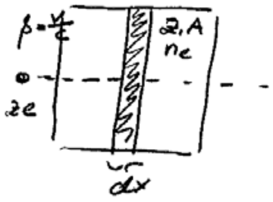
$$= \frac{87\ nb}{{E_{CMS}}^2 [GeV^2]}$$

(siehe Folie 5)

2.3 WW von Teilchen mit Materie

a) Energieverlust schwerer geladener Teilchen durch Ionisation (keine e^-)

Teilchen verlieren über Streuung durch EM WW Energie. Die Elektronen des Mediums werden in höhere Schalen angeregt oder aus den Atomen gelöst (Ionisation). Genaue Berechnung (unter Berücksichtigung aller QM-Effekte) schwierig. Mittlerer Energieverlust -dE pro Wegstrecke dx wird durch Bethe-Bloch-Formel beschrieben.



$m_e = 511$ keV/c^2

$$\frac{-dE}{dx} = \underbrace{\left(\rho N_A \frac{z}{A}\right)}_{n_e} \frac{4\pi\, z^2\, e^4}{m_e\, c^2\, \beta^2} \left(\ln \frac{2m_e\, c^2\, \beta^2\, 8^2}{I} - \beta^2\right)$$

Elektronendichte im Medium

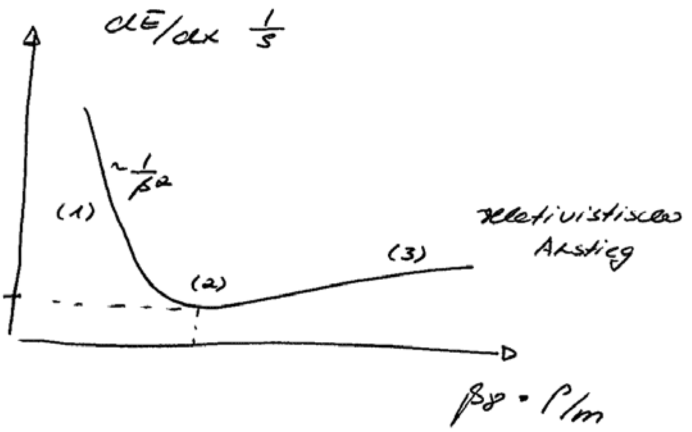
I: mittleres Ionisationspotential für Elektronen (für $z > 20$: $I \approx 10z$ eV)

Die Große $-dE/_{ax}\ \frac{I}{\rho}$ hat eine geringere Materialabhängigkeit.

$$-\frac{I}{\rho}\frac{dE}{dx} = K\frac{z}{A}\, z^2\, \frac{I}{\beta^2}\ (\ln\frac{2{m_e}^2\, \beta^2\, 8^2}{I} - \ \beta^2$$

K = 0.307 MeV cm^2/g

Charakteristische Kurve:

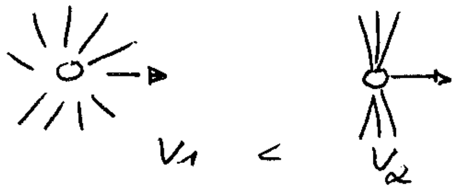


(1) Bei kleinen (βγ) : $-{}^{dE}/_{dx}\ \frac{I}{\rho} \sim \frac{I}{\beta^2}$
Starke Ionisation durch langsame Teilchen (langsame Teilchen bleiben „stehen“)

(2) Minimum für $\beta\gamma = p/m \approx$ 3-4

$$\left(\frac{-dE}{dx}\ \frac{I}{\rho}\right) \min \approx 1 \ldots 2\ {}^{MeV}/_{g}\ cm^2$$

(3) Relativistischer Anstieg für große βγ
Bewegte Ladung



Transversale E-Feld Komponente nimmt zu (effektiv eine höhere Ladung)

kleiner Effekt: in 1. Näherung können Teilchen mit $\beta\gamma > 3$ als MIP (minimal ionising particle) betrachtet werden.

empirische Bethe-Block Formel beschreibt Energieverlust im Bereich βγ in [0.1, -∞] auf ± 5% genau.