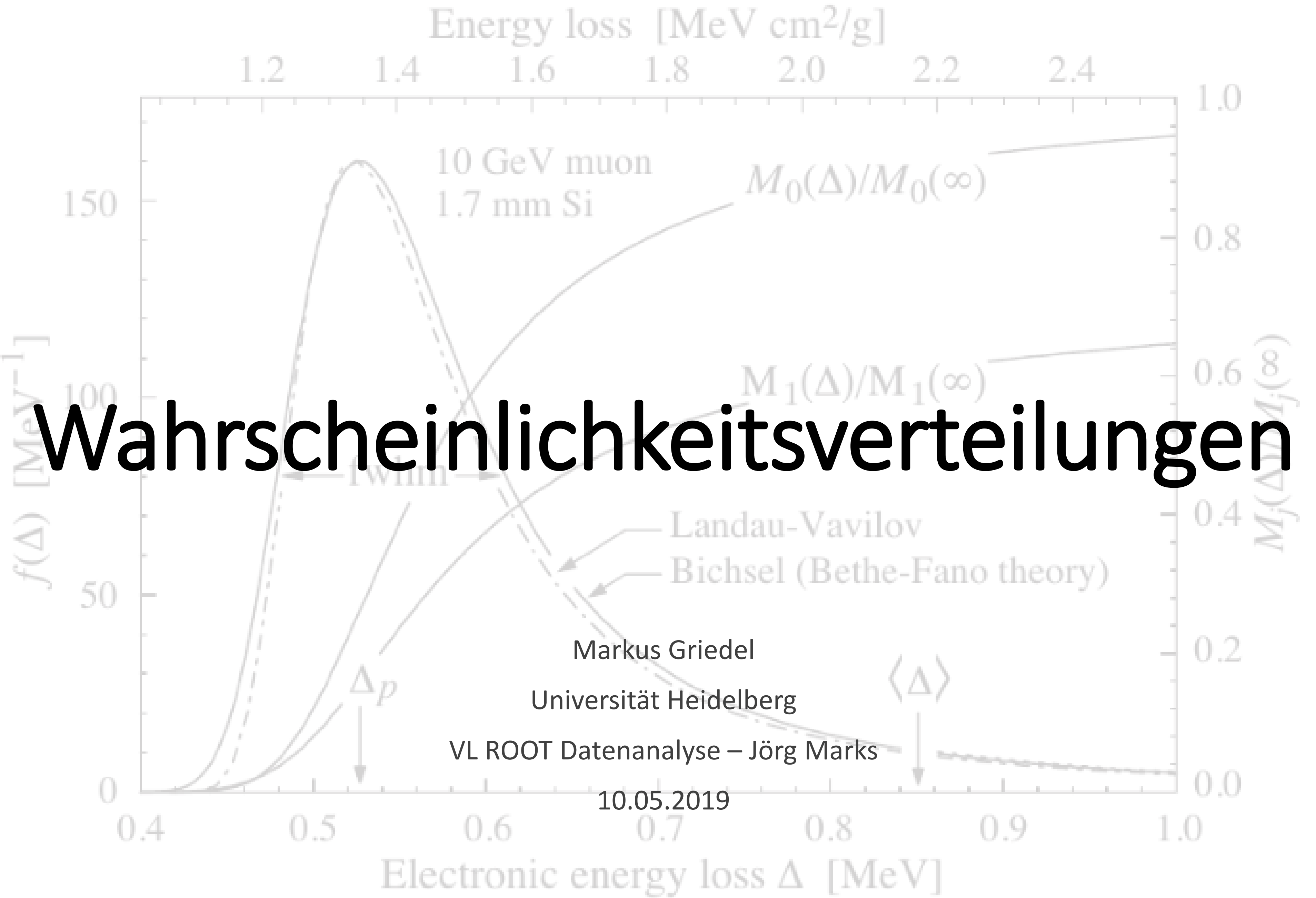


Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Markus Griedel

Universität Heidelberg

VL ROOT Datenanalyse – Jörg Marks

10.05.2019

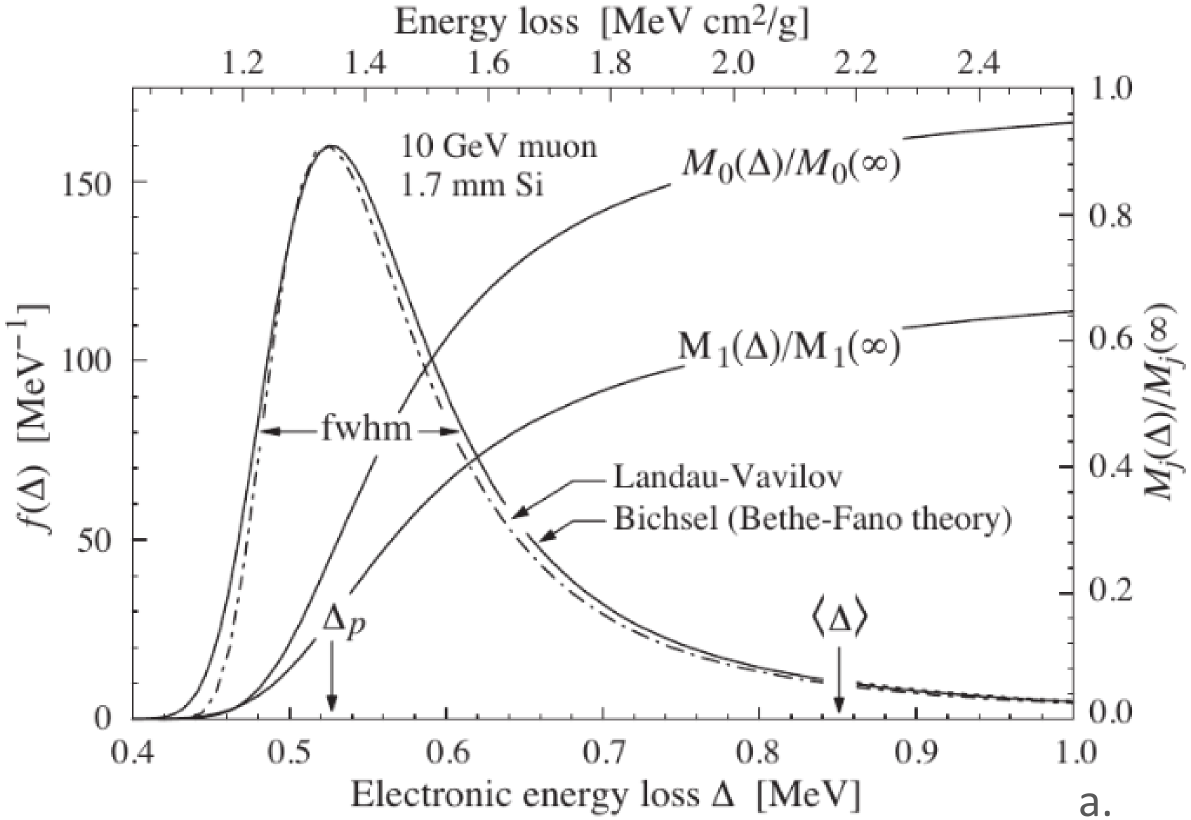
Propability density function (p.d.f.)

- Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung
- Random Variabel: Diskret oder kontinuierlich
- Kontinuierlich: Wahrscheinlichkeit: $P(x\ in\ [x, x+dx]) = f(x)dx$
  - $f(x) =$ pdf
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

- Diskret: $P(x_i) = p_i$
  - $P(x_i) =$ pdf
  - $\sum_i P(x_i) = 1$

Propability density function (p.d.f.)

- Mittelwert: $\langle\Delta\rangle = E[\Delta] = \int \Delta\, f(\Delta) d\Delta$
- Varianz: $\sigma^2 = V[\Delta] = E[(\Delta - \langle\Delta\rangle)^2]$
- Wahrscheinlichster Wert (Mode): Δ_p
- FWHM
- Cumulative Moments (Verteilungsfunktionen)



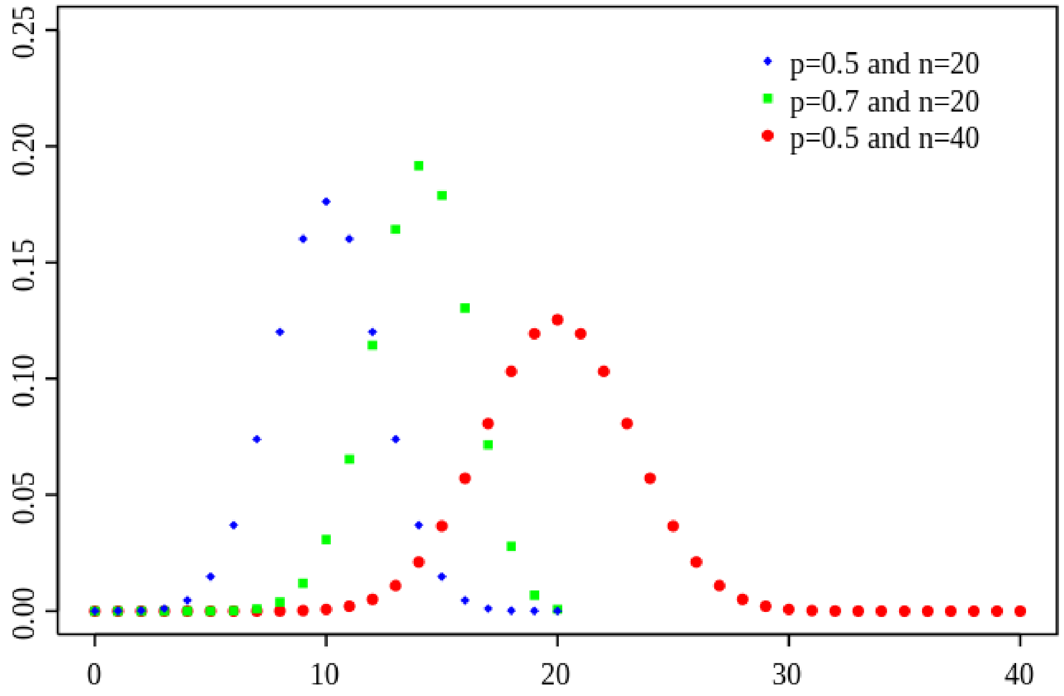
a.

Binominal

- Nur zwei Ausgänge (z.B. Münzwurf)
- Mit Wahrscheinlichkeiten p und 1-p

$$f(r; N, p) = \binom{N}{r} p^r \, (1-p)^{N-r}$$

$$E[r] = Np \qquad V[r] = Np(1-p)$$



b.

- Limit für kleine p und große N (Np konstant) → Poisson Verteilung

z.B. Branching ratio

Poisson Verteilung

- Ein Parameter Verteilung

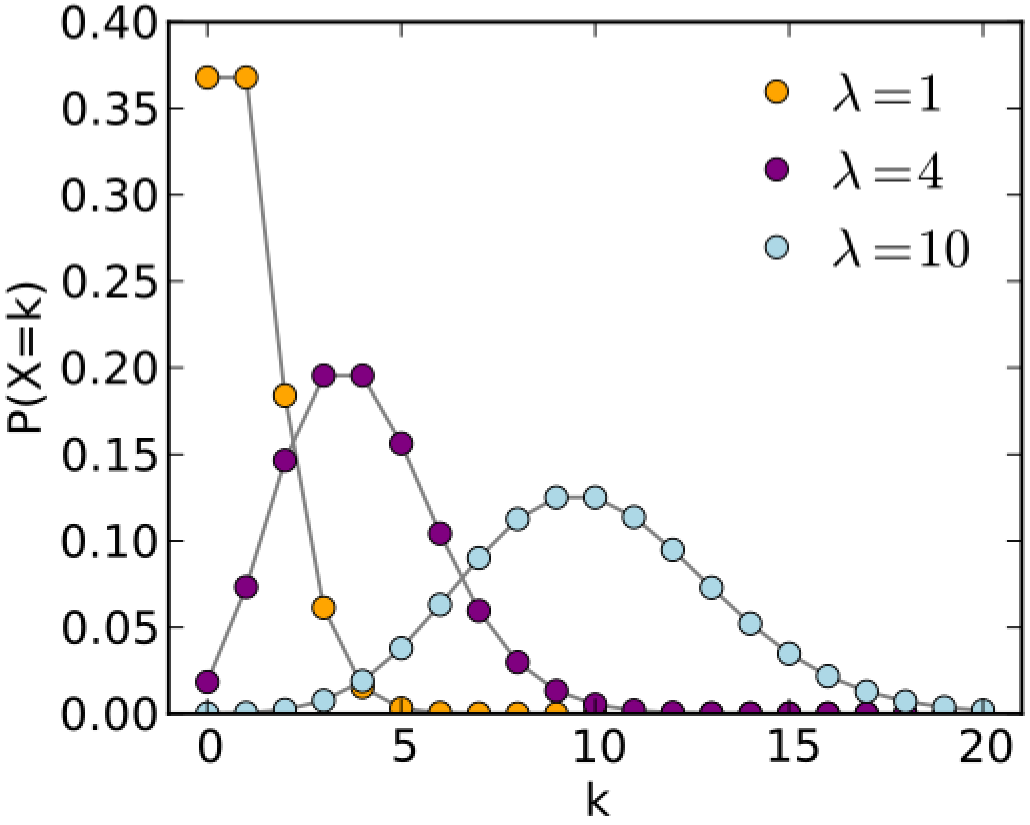
$$\boxed{P(r;\mu) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}}$$

$\boxed{E[r] = \lambda}$ $\boxed{V[r] = \lambda}$

- Rekursionsformel:

$$\boxed{P(r+1) = P(r)\frac{\lambda}{r+1}, \qquad P(0) = e^{-\lambda}}$$

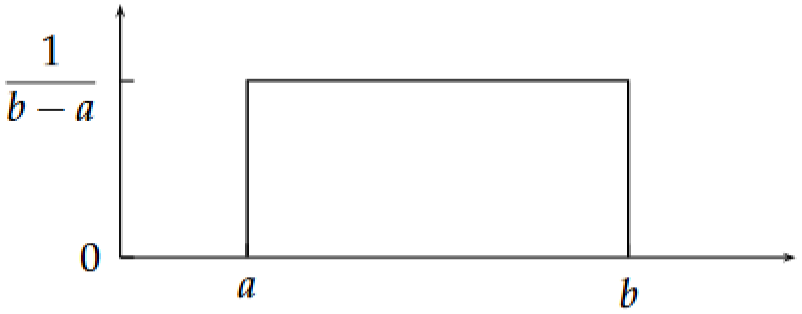
z.B. Counts



c.

Gleichverteilung (Uniform)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



2.

$$E[x] = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

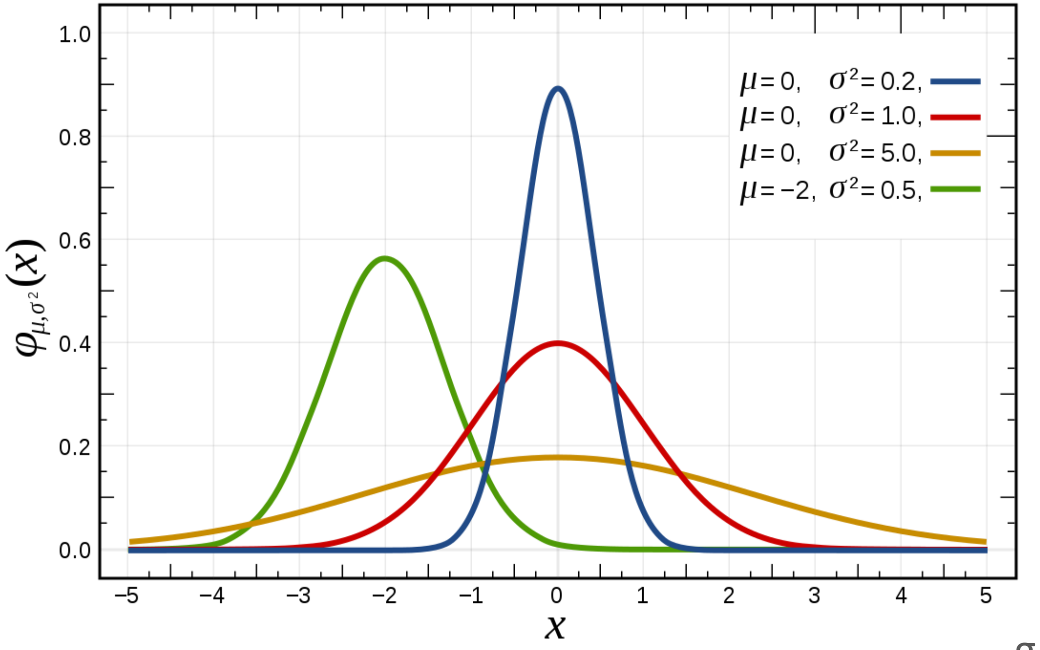
z.B. Monte Carlo

Gauß

- Wichtigste Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$\boxed{E[x] = \mu}$ $\boxed{V[x] = \sigma^2}$



g.

- Standardisierte Gauß-Verteilung: σ=1 und μ=0
- Grenzwert der Poison-Verteilung für Große μ

z.B. Messfehler

Central Limit Theorem

Zufallsvariablen die eine Summe aus Zufallsvariablen einer (nahezu) beliebigen Verteilung sind folgen einer Gauß Verteilung.

Für n unabhängige Zufallsvariablen x_i mit endlicher Varianz und Mittelwert, aber beliebiger pdf gilt für

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

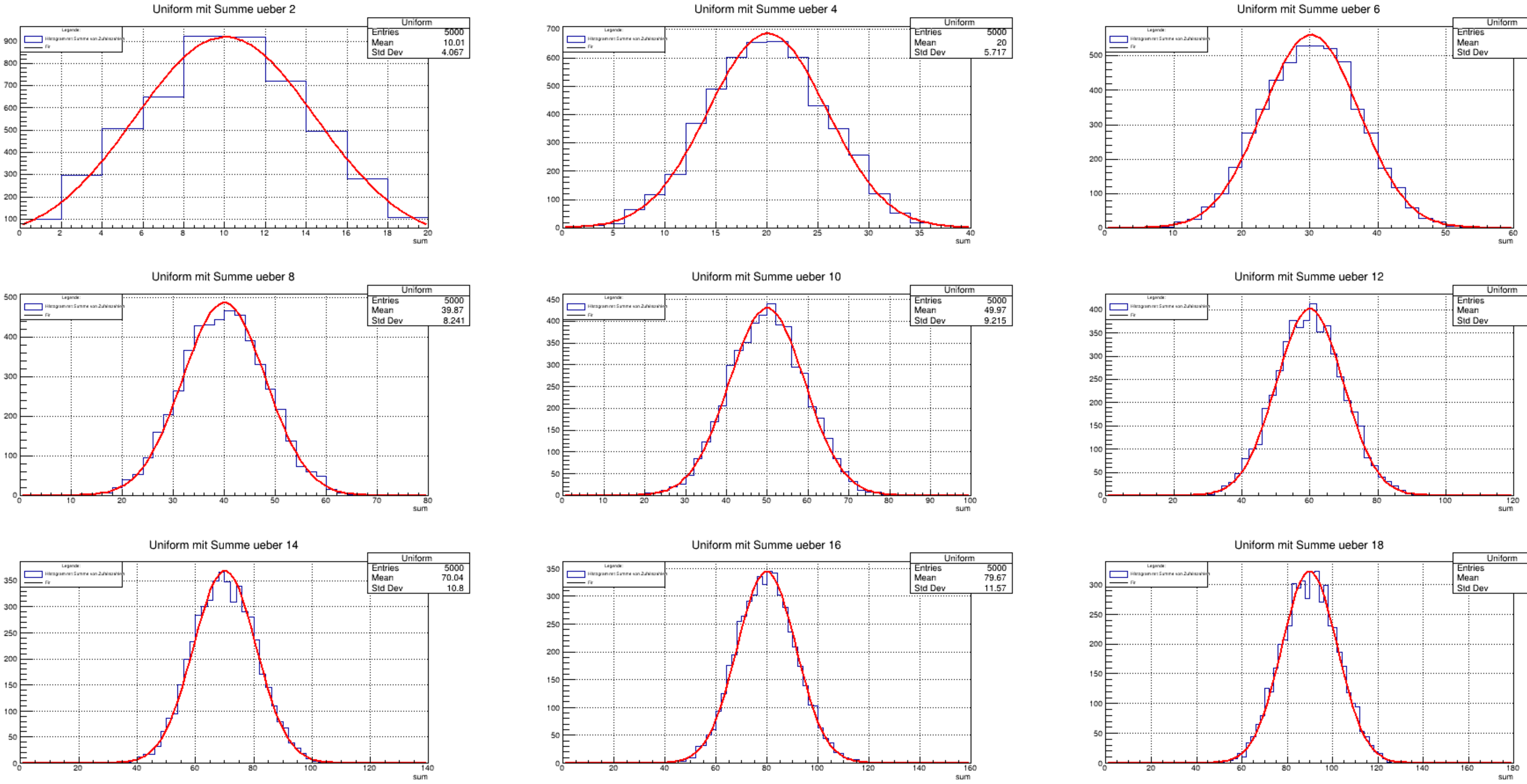
Im Limit $n \rightarrow \infty$, y ist Gauß verteilt mit

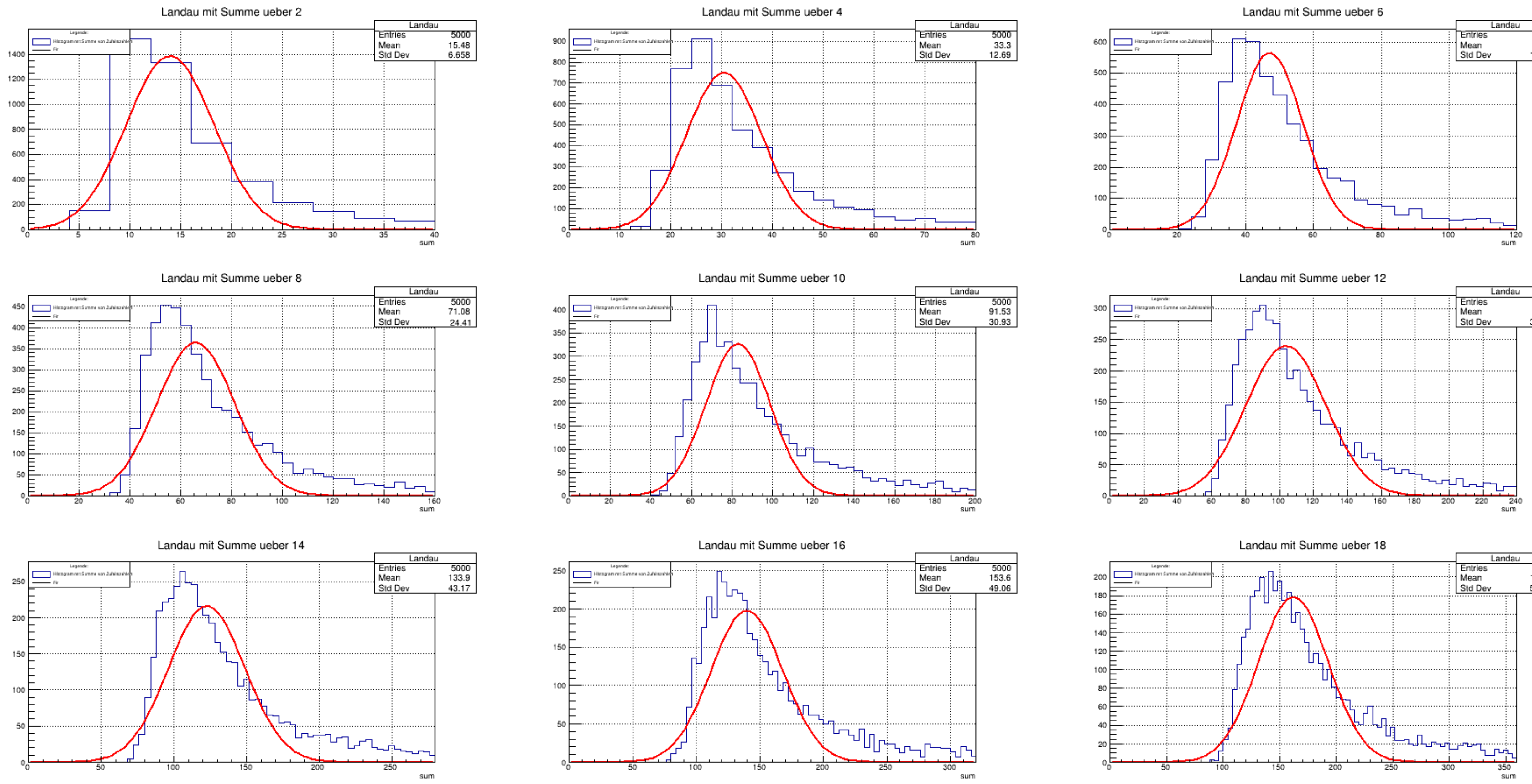
$$E[y] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \qquad V[y] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Aufgabe

1. Generiere ein Set aus Zufallsvariablen mit einer beliebigen Verteilung und fitte die Verteilung der Summe als Gauß
   (Trandom3.<Verteilung> / TH1D.FillRandom())
2. Variiere die Anzahl der Summanden und plotte verschiedene Histogramme

Lösung


Uniform mit Summe ueber 2
Uniform
Entries 5000
Mean 10.01
Std Dev 4.067
sum
Uniform mit Summe ueber 4
Uniform
Entries 5000
Mean 20
Std Dev 5.717
sum
Uniform mit Summe ueber 6
Uniform
Entries 5000
Mean 30.13
Std Dev 7.054
sum
Uniform mit Summe ueber 8
Uniform
Entries 5000
Mean 39.87
Std Dev 8.241
sum
Uniform mit Summe ueber 10
Uniform
Entries 5000
Mean 49.97
Std Dev 9.215
sum
Uniform mit Summe ueber 12
Uniform
Entries 5000
Mean 59.86
Std Dev 9.969
sum
Uniform mit Summe ueber 14
Uniform
Entries 5000
Mean 70.04
Std Dev 10.8
sum
Uniform mit Summe ueber 16
Uniform
Entries 5000
Mean 79.67
Std Dev 11.57
sum
Uniform mit Summe ueber 18
Uniform
Entries 5000
Mean 89.89
Std Dev 12.45
sum

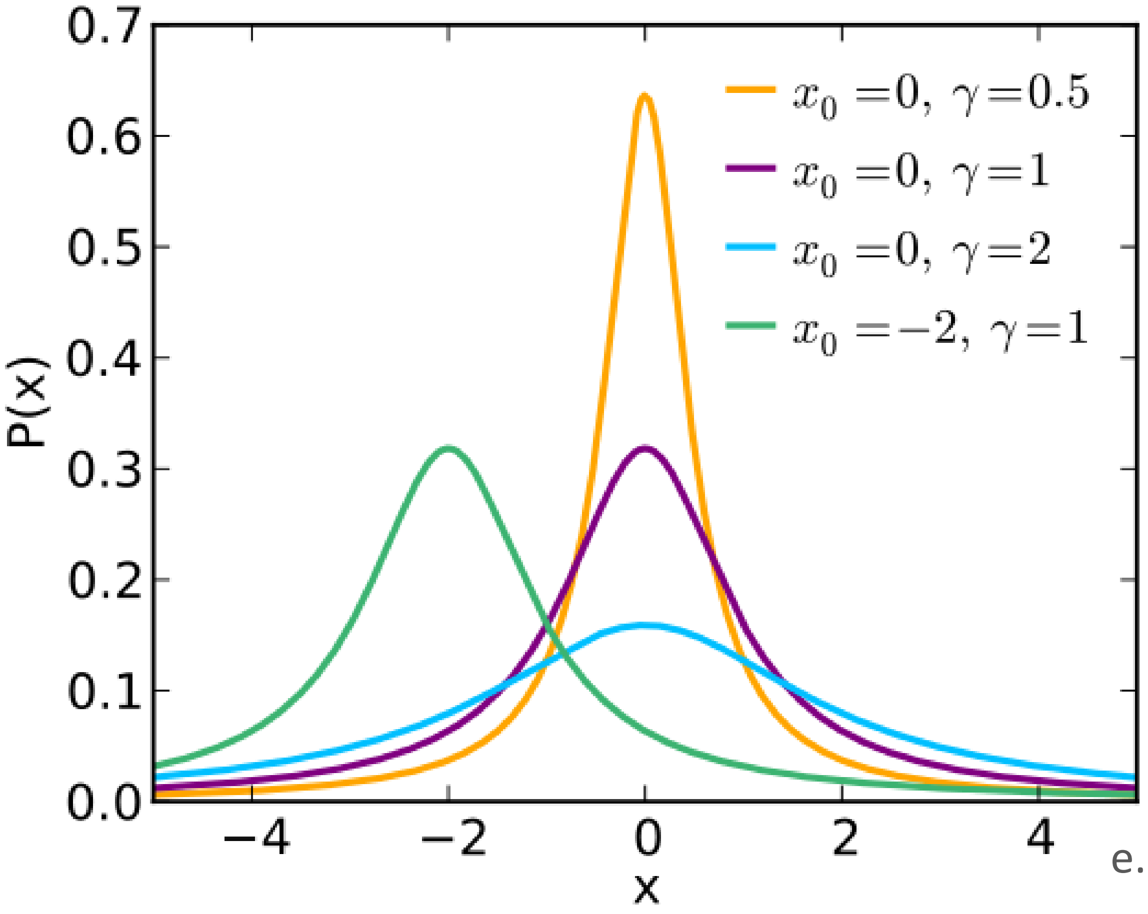

Landau mit Summe ueber 2
Landau Entries 5000 Mean 15.48 Std Dev 6.658
Landau mit Summe ueber 4
Landau Entries 5000 Mean 33.3 Std Dev 12.69
Landau mit Summe ueber 6
Landau Entries 5000 Mean 51.6 Std Dev 18.13
Landau mit Summe ueber 8
Landau Entries 5000 Mean 71.08 Std Dev 24.41
Landau mit Summe ueber 10
Landau Entries 5000 Mean 91.53 Std Dev 30.93
Landau mit Summe ueber 12
Landau Entries 5000 Mean 112.1 Std Dev 36.63
Landau mit Summe ueber 14
Landau Entries 5000 Mean 133.9 Std Dev 43.17
Landau mit Summe ueber 16
Landau Entries 5000 Mean 153.6 Std Dev 49.06
Landau mit Summe ueber 18
Landau Entries 5000 Mean 175.6 Std Dev 53.77
sum

Cauchy

$$\boxed{f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma}\,\frac{\gamma^2}{(x - x_0)^2 + \gamma^2}}$$

- Kein Mittelwert oder Varianz
  → Kein CLT

- Mode ist x_0

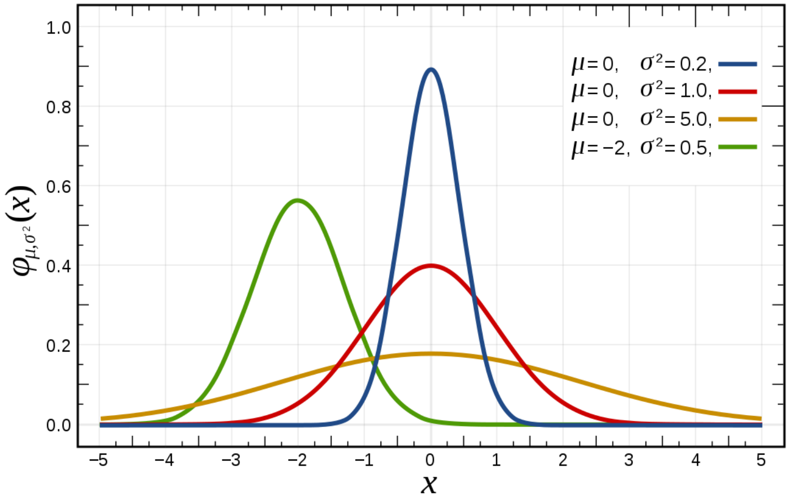


e.

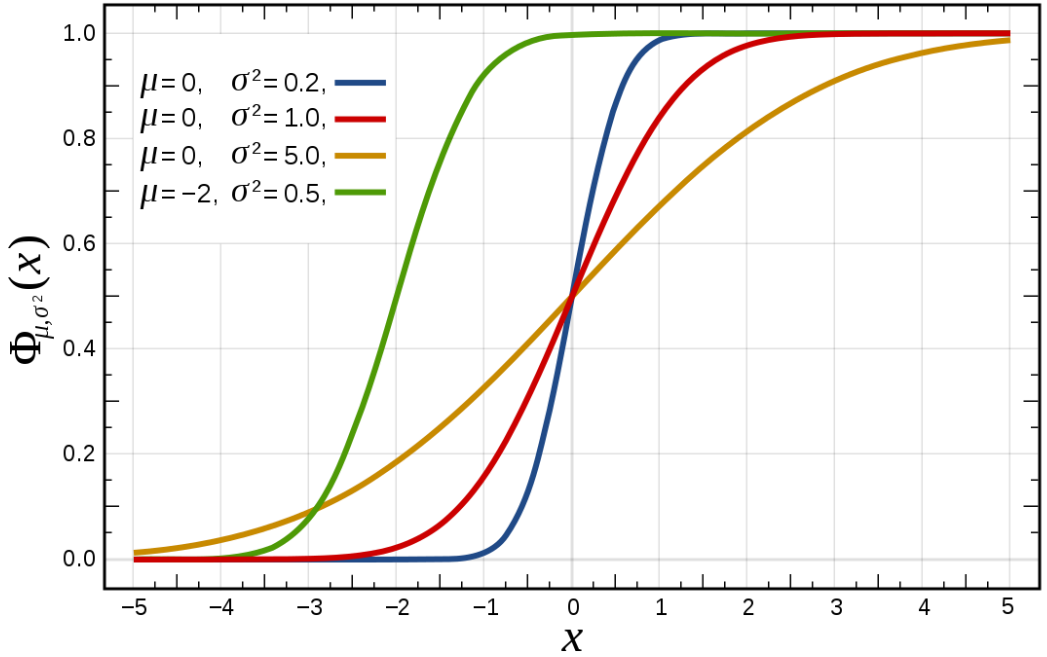
z.B. Resonanz Kurve

Verteilungsfunktionen

- Cumulative distribution function
- $\int_{-\infty}^{x} f(x')dx' = F(x)$
- Pdf: $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$



g.



f.

Quellen

Bildquellen

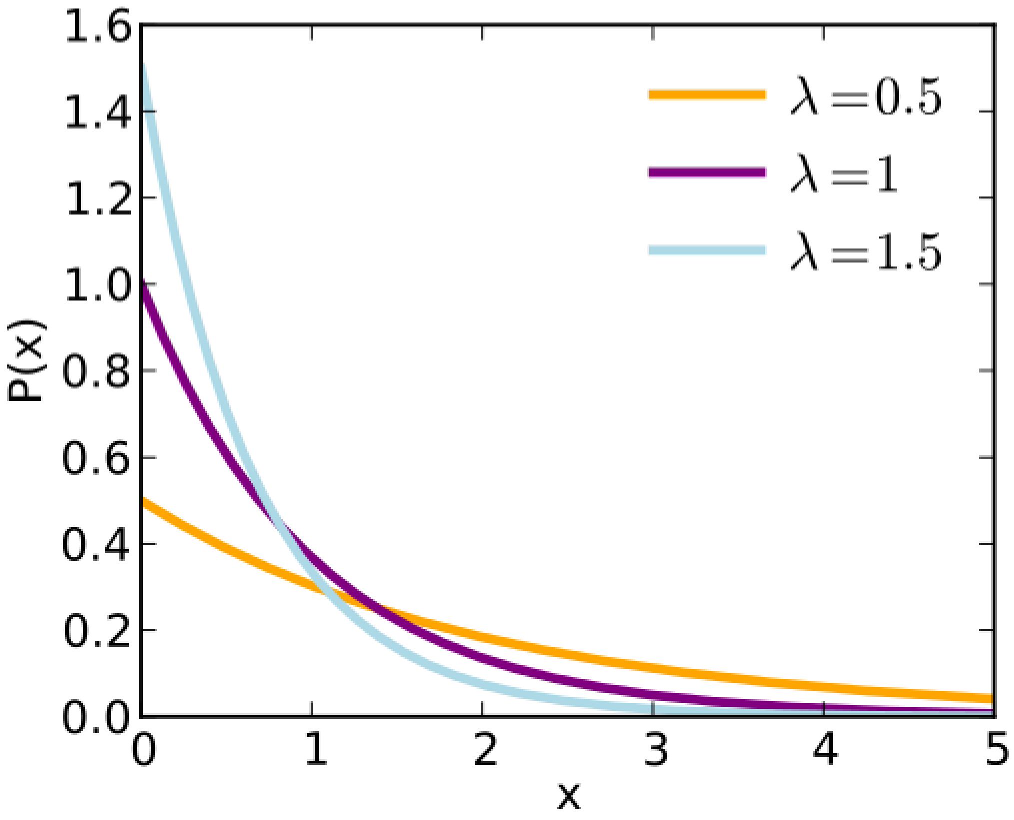
a. http://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-passage-particles-matter.pdf
b. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/75/Binomial_distribution_pmf.svg
c. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/Poisson_pmf.svg
d. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ec/Exponential_pdf.svg
e. https://en.wikipedia.org/wiki/File:Normal_Distribution_PDF.svg
f. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8c/Cauchy_pdf.svg
g. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Normal_Distribution_PDF.svg

1. Cowan G. *Statistical Data Analysis*. Oxford: Clarendon Press; 1998.
2. Blobel V, Lohrmann E. *Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse*. Stuttgart ; Leipzig: Teubner; 1998.
3. Reygers *Lecture on Statistical methods.* Heidelberg; 2017.

Exponential

$$\boxed{f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda\, e^{-x\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}}$$

$\boxed{E[x] = 1/\lambda}$ $\boxed{V[x] = 1/\lambda^2}$



d.

z.B. Zerfall Prozess

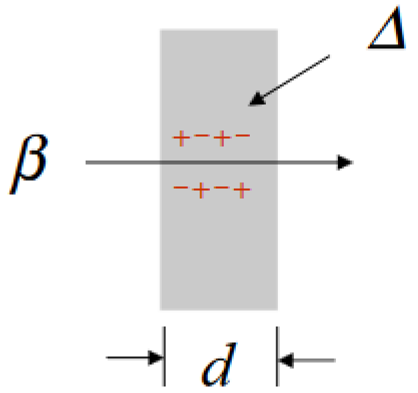
$$\frac{1}{\pi c}\int_0^\infty e^{-t}\cos\left(t\left(\frac{x-\mu}{c}\right)+\frac{2t}{\pi}\log\left(\frac{t}{c}\right)\right)dt$$

$$f(\Delta;\beta)=\frac{1}{\xi}\phi(\lambda)\ ,$$

$$\phi(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-u\ln u-\lambda u)\sin \pi u\, du\ ,$$

$$\lambda=\frac{1}{\xi}\left[\Delta-\xi\left(\ln\frac{\xi}{\epsilon'}+1-\gamma_{\mathrm{E}}\right)\right]\ ,$$

$$\xi=\frac{2\pi N_{\mathrm{A}}e^4z^2\rho\sum Z}{m_{\mathrm{e}}c^2\sum A}\frac{d}{\beta^2}\ ,\qquad \epsilon'=\frac{I^2\exp\beta^2}{2m_{\mathrm{e}}c^2\beta^2\gamma^2}\ .$$

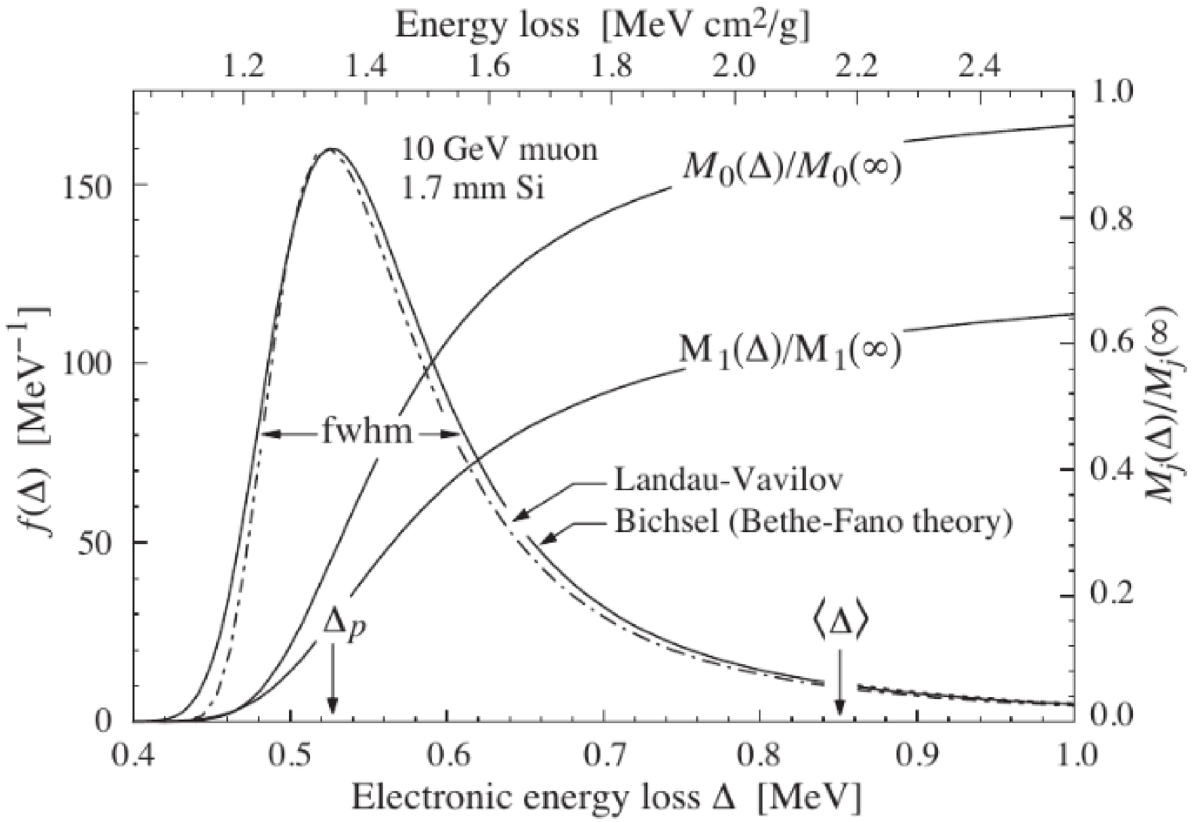


Landau

$$f(\Delta;\beta) = \frac{1}{A}\Phi(\lambda)$$

$$\lambda = \frac{1}{A}[\Delta - A\left(ln\frac{A}{\epsilon(\beta)} + 1 - \gamma_E\right)]$$

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-u\ln u \; - \lambda u)\sin \pi u \, du$$



z.B. Energieverlust eines geladenen Teilchens mit Geschwindigkeit β in Materie der Dicke d