

Kai Müller

Maxwell für die Hosentasche

Copyright des Textes: © by Kai Müller

Version: 11.02.2013

Überblick

Der Physiker James Clerk Maxwell stellte zwischen 1861 und 1864 eine Theorie des Elektromagnetismus auf. Diese beschrieb alle damals bekannten Phänomene, die mit elektrischen und magnetischen Feldern zu tun haben und insbesondere auch deren Verknüpfung bei der Induktion. Die Experimente wurden vor allem von Michael Faraday gemacht. Die mathematische Formulierung dieser Theorie geht über Schulkenntnisse hinaus, jedoch ist es möglich, eine Idee davon zu vermitteln. Der Kern sind vier Gleichungen, die Maxwell-Gleichungen, aus denen *alle* anderen Gleichungen des Elektromagnetismus hergeleitet werden können. Sie sind hier im Text der Vollständigkeit halber angegeben, für den Schulunterricht *können* sie nicht nur überlesen werden, sondern *sollten* überlesen werden.

Als Kriterium für eine gute Theorie wird oft genommen, dass sie Vorhersagen über Phänomene macht, die bis dahin *nicht* bekannt sind. Die Überprüfung dieser Vorhersagen ist dann ein Indiz, ob die Theorie richtig ist. Maxwells Theorie sagte die Existenz elektromagnetischer Wellen voraus. Er konnte deren Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnen und kam auf die Lichtgeschwindigkeit c . Die experimentelle Bestätigung dessen war ein großer Triumph.

Maxwells Gleichungen

Wir beginnen mit dem Fall, der als statischer Fall bezeichnet wird im Gegensatz zum dynamischen.

Elektrische Monopole

Ruhende Ladungen erzeugen elektrische Felder. Das kann auch eine einzelne Ladung sein, ein *Monopol*. Wenn sich bestimmte Ladungen irgendwo befinden, dann hängt die elektrische Feldstärke an einer Stelle im Raum davon ab, wieviele Ladungen da sind und davon, ob es positive oder negative sind.

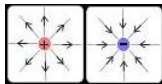


Abb. 1: Ladungen¹

Wir legen in Gedanken um die Ladungsverteilung eine geschlossene Fläche und „zählen“ die Feldlinien, die durch die Oberfläche gehen. Es sind jedoch unendlich viele, daher wird die Summe zu einem Integral, $\int E dA$. Das ist analog zu dem Fall, dass man die Fläche unter einem Funktionsgraphen bestimmen möchte. Dazu muss man unendlich viele Rechtecke summieren; das Integral gibt genau die Fläche an.

Die entsprechende Maxwell-Gleichungen lautet:

$$\int E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Wir für unseren Fall sehen die linke Seite nur symbolisch für die Summe über alle Feldlinien des E -Feldes. Die elektrische Feldstärke hängt ab von der Position x und kann auch von der Zeit t abhängen. Am Integral steht nicht dx , sondern dA , um zu betonen, dass über eine Oberfläche A summiert wird. An der Uni lernt man, so ein Integral auszurechnen und umzuformen, so dass am Ende ein gewohntes Integral mit Grenzen a und b dasteht. Rechts steht die Gesamtladung² Q . Hat man z. B. einige positive Ladungen und keine negative, dann gehen aus der gedachten Fläche nur Feldlinien heraus.

¹http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electric_Field_Lines.svg

²Auch ϵ_0 muss auftauchen, denn $\sigma = \epsilon_0 \cdot E$ mit der Flächenladungsdichte $\sigma = Q/A$, also $Q/A = \epsilon_0 \cdot E$. Das Integral ist eine Summe über (unendliche viele) Terme $E \cdot A$.

Falls man eine positive und eine betragsmäßig gleich große negative Ladung hat, ist $Q = 0$. Die linke Seite ergibt dann auch Null, denn es gehen „genausoviele“ Feldlinien aus der gedachten Oberfläche heraus wie hinein. Hinausgehende Feldlinien werden als positiv gewertet, hineingehende als negativ und dann ergibt das Integral Null. Positive Ladungen sind *Quellen* (analog zur „Wasserquelle“), negative Ladungen sind *Senken* („Abfluss“).

Es gibt keine magnetischen Monopole

Trotz intensiver Suche wurden bis heute keine magnetischen Monopole gefunden. Es gibt also keinen Nordpol alleine. Bricht man einen Stabmagneten genau an der Grenze zwischen N und S durch, erhält man zwei kleinere Stabmagneten, wobei jeder ein N und ein S hat.

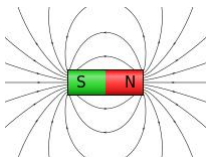


Abb. 2: Magnet³

Das ist gleichbedeutend damit, dass magnetische Feldlinien immer geschlossen sind. Wie kann man so etwas mathematisch schreiben? Es ist erstaunlich, dass eine Aussage über die Form von Linien als Formel geschrieben werden kann! Die Idee ist, dass geschlossene Feldlinien folgendes bedeuten: Wenn wir irgendwo im Raum in

³http://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFpt_cylindrical_magnet_big.svg

Gedanken eine geschlossene Fläche (z. B. Kugel, Oberfläche einer Kartoffel) legen und „alle“ magnetischen Feldlinien summieren, die diese Fläche durchstoßen, erhalten wir Null: Es müssen **immer** genauso viele herausgehen wie hinein. Dies ist die Aussage folgender Maxwell-Gleichung⁴:

$$\oint B dA = 0.$$

Nun wird es etwas wilder, denn auch die Induktion soll in der Maxwell-Theorie vorkommen.

Elektromagnetische Induktion

Bei den elektrischen Feldern gibt es außer den Feldlinien, die an einer Ladung beginnen und an einer Ladung enden (siehe oben), auch elektrische Wirbelfelder, also geschlossene Feldlinien. Diese entstehen durch sich ändernde Magnetfelder.

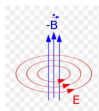


Abb. 3: Induktion⁵

Die entsprechende Maxwell-Gleichung lautet

$$\oint E ds = -\frac{d}{dt} \int B dA.$$

⁴Um zu betonen, dass es eine geschlossene Fläche sein muss, ist auch die Schreibweise $\oint \dots$ gebräuchlich, analog auch für geschlossene Kurven.

⁵http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elektromagnetische_Induktion.svg

Die Schreibweise $\frac{d}{dt}$ bedeutet, dass der folgende Term abgeleitet wird bezüglich der Zeit. Alternativ dazu ist die Newtonsche Schreibweise mit Punkt, also $\dot{B} = \frac{d}{dt}B$.

Ströme erzeugen Magnetfelder, aber es geht auch anders

Mit dieser Abschnitts-Überschrift ist gemeint: Fließt irgendwo ein elektrischer Strom, dann bildet sich ein magnetisches Wirbelfeld. Das ist aus der Mittelstufe bekannt für den stromdurchflossenen Draht. Maxwell kam durch theoretische Überlegungen(!) zu dem Schluss, dass es noch eine andere Möglichkeit geben muss: Wenn sich ein elektrisches Feld ändert, wird ein magnetisches Feld erzeugt. Das ist sozusagen eine Art Umkehrung der Induktion. Im Experiment zeigte sich, dass dies tatsächlich der Fall ist. Dieser Effekt wird als Maxwellscher Verschiebungsstrom bezeichnet. Im Schulunterricht kommt dieser Fall nicht vor. Der Effekt ist schwierig zu messen. Wenn man einen Kondensator lädt und dann ausschaltet, hat das Zusammenbrechen des E -Feldes ein B -Feld zu Folge. Es ist jedoch äußerst schwach.

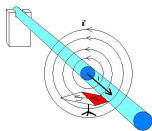


Abb. 4: Strom⁶

⁶http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oersted's_experiment.JPG

⁷http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Displacement_current_in_capacitor.svg

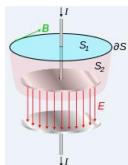


Abb. 5: Maxwells Zusatz⁷

Damit ist klar, dass die entsprechende Maxwell-Gleichung mehr Terme haben muss als die zuletzt genannte.

Sie lautet:

$$\oint B \, ds = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int E \, dA.$$

Die linke Seite dieser Gleichung enthält das B -Feld, rechts ist der erste Term im Wesentlichen die Stromstärke (eines stromdurchflossenen Drahts), der zweite beschreibt die zeitliche Änderung des E -Felds.

Die Macht Maxwells

Die Maxwellschen Gleichungen zusammen mit der Lorentzkraft⁸

$$F = q \cdot E \quad \text{und} \quad F = q \cdot v \cdot B$$

beschreiben alle heute bekannten Phänomene des Elektromagnetismus. Da auch zeitlich veränderliche Felder berücksichtigt sind,

⁸In der Schule wird nur der rechte Teil als Lorentzkraft bezeichnet. Eigentlich sind beide zusammen die Lorentzkraft.

spricht man auch von der Elektrodynamik (die „Magnetodynamik“ ist eingeschlossen, dieser Begriff ist jedoch nicht gängig).

Wir haben bisher keine Stoffe wie ein Dielektrikum oder einen Eisenkern etc. betrachtet. Daher sind die genannten Gleichungen die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum. Aber auch die Anwesenheit von Stoffen kann berücksichtigt werden, dann erhält man die Maxwell-Gleichungen in Materie.

Vom Allgemeinen zum Besonderen

Nimmt man die Maxwellschen Gleichungen als Ausgangspunkt, kann alles daraus hergeleitet werden: Das Coulombgesetz, das elektrische Feld eines Kondensators, das Magnetfeld einer Spule, etc. Aber auch beliebig komplexe Fragen können beantwortet werden, z. B. wie das magnetische Feld eines stromdurchflossenen Drahtes aussieht, der zu einem Achteck gebogen ist oder auch wie muss man eine Radioantenne positionieren, um einen guten Empfang zu haben, denn im Radio-Sendemasten werden auch Ladungen bewegt.

Aus dem Allgemeinen folgen also spezielle Fälle. Diese Vorgehensweise wird üblicherweise an der Uni gewählt.

In der Schule geht man in der Regel umgekehrt vor. Aus besonderen Fällen wird versucht, etwas Allgemeingültiges zu finden.

Bei der Uni-Vorgehensweise wird etwas Spezielles hergeleitet, also abgeleitet, man spricht von der *deduktiven* Methode. Die Schul-Methode ist *induktiv*, der Begriff hat inhaltlich nichts mit der elektromagnetischen Induktion zu tun.

Elektromagnetische Wellen

Die Existenz elektromagnetischer Wellen folgt aus den Maxwell-Gleichungen.

Wellen im Nichts

Maxwell machte mit Hilfe seiner Gleichungen die Vorhersage, dass elektromagnetische Wellen existieren, und zwar im Vakuum(!) Für Schall ist dies nicht möglich, Schall benötigt zur Ausbreitung ein Medium. Diese Rechnung kann hier nicht auf einfache Weise gezeigt werden. Es läuft darauf hinaus, die Maxwell-Gleichungen geschickt umzuformen und ineinander einzusetzen, dann erhält man eine Gleichung, die dieselbe Form hat wie die Gleichung, die z. B. die Ausbreitung einer Welle auf einer Geigensaiten beschreibt. Aus dieser kann man direkt die Ausbreitungsgeschwindigkeit ablesen. Da in den Maxwellgleichungen als Konstanten nur ε_0 und μ_0 vorkommen, können nur diese in der Wellengleichung auftauchen. Es ergibt sich für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Term $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Setzt man die bekannten Werte ein, ergibt sich ca. $3 \cdot 10^8$ m/s, also die Lichtgeschwindigkeit(!), daher gilt die bemerkenswerte Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Also existieren elektromagnetische Wellen im Vakuum, und zwar breiten sie sich dort mit c aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Materie kann mit den Maxwell-Gleichungen in Materie berechnet werden.

Erzeugung von EM-Wellen: Hertzscher Dipol

Mit Hilfe eines Hertzschen Dipols können zunächst elektromagnetische Schwingungen erzeugt werden. Vom Dipol lösen sich dann

elektromagnetische Wellen ab. Es ist schwierig, dies sich anschaulich vorzustellen. Die Maxwell'schen Gleichungen liefern folgende Ergebnisse, die experimentell bestätigt wurden (Nicht alles kann immer mit einem einfachen Modell anschaulich verstanden werden):

In der Nähe des Dipols, im *Nahfeld*, sind E - und B -Feld um 90° phasenverschoben, was noch anschaulich klar ist. Weiter weg vom Dipol, in dessen *Fernfeld*, sind E - und B -Feld phasengleich, z. B. sie sind beide zum gleichen Zeitpunkt maximal und beiden zum gleichen Zeitpunkt Null. Sie schwingen jedoch in verschiedenen Ebenen.

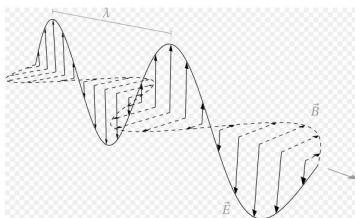


Abb. 6: Fortschreitende e.-m. Welle⁹

⁹http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electromagnetic_wave.svg

Zusammenfassung

Die Maxwell-Theorie beinhaltet also insbesondere folgende Aussagen

- Elektrische Ladungen sind *Quellen* bzw. *Senken* des elektrischen Feldes (*positive* bzw. *negative* Ladungen).
- Das Feld der magnetischen Flussdichte ist *quellenfrei* (und *senkenfrei*); magnetische Feldlinien sind immer geschlossen.
- Induktionsgesetz: Zeitliche Änderungen der magnetischen Flussdichte haben ein *elektrisches Wirbelfeld* zur Folge.
- Ein elektrischer Strom hat ein *magnetisches Wirbelfeld* zur Folge. Zeitliche Änderungen eines elektrischen Feldes haben ein *magnetisches Wirbelfeld* zur Folge.

Zum Nachvollziehen dieses Textes sei auch insbesondere auf die jeweils *kursiv* gesetzten Begriffe hingewiesen. Handelt es sich dabei um Fachbegriffe, sind diese extra einprägenswert.

Weitergehendes

Dieser Absatz ist zur freiwilligen Lektüre gedacht, alles Bisherige war ja Pflicht. Es sei darauf hingewiesen, dass es noch andere Formulierungen der Maxwell-Gleichungen gibt. Die Integrale können umgeschrieben werden, das sind jedoch rein mathematische Umformungen, die nichts an der physikalischen Aussage ändern. Es gibt sogenannte Integralsätze, die die Gleichungen in eine besonders kompakte Form bringen. Im übrigen sind E und B ja Vektoren, das heißt es muss auch zunächst definiert werden, was es bedeutet, Vektoren zu integrieren.

Dann gibt es noch andere Formulierungen, die besonders gut zeigen, dass die Maxwell-Gleichungen eng mit der Relativitätstheorie zusammenhängen. Übrigens hat eine berühmte Arbeit Einsteins zur Relativitätstheorie den Titel „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“.

Die Theorie des Elektromagnetismus vereinheitlicht Elektrizität und Magnetismus, die früher zwei getrennte Disziplinen waren. Im 20. Jahrhundert ist es unter anderem gelungen, den Elektromagnetismus mit der Theorie der schwachen Wechsellwirkung (radioaktiver Zerfall). Heute widmen eine ganze Reihe von Forschungsgruppen ihr Bestreben darauf, weitere *Vereinheitlichungen* zu erreichen. Es ist bis jetzt nicht gelungen, den Elektromagnetismus¹⁰ mit der Gravitationstheorie zu vereinheitlichen. Die Hausaufgaben gehen also vorerst nicht aus ...



James Clerk Maxwell.

¹⁰Bildquelle Maxwell http://commons.wikimedia.org/wiki/File:James_Clerk_Maxwell.jpg