Quersumme und Addition

Kai Müller, Thomas Rösch

Zusammenfassung. Schon in der Schule lernt man, Quersummen zu berechnen. Was passiert, wenn von einer Quersumme wieder die Quersumme gebildet wird und so weiter? Ist diese iterierte Quersumme in einem gewissen Sinne additiv, gilt also, dass die Quersumme einer Summe gleich der Summe der Quersummen ist (nach eventuell nochmaliger Quersummenbildung)? Diese Frage wird im vorliegenden Artikel beantwortet.

Iterierte Quersumme einer Summe

Die Quersummenbildung $Q(n)$ kann iteriert werden:

$$n, Q(n), Q(Q(n)), \ldots, Q^k(n), \ldots .$$

Der Grenzwert $Q^\infty(n) := \lim_{k\to\infty} Q^k(n)$ existiert [PS].
Wir formulieren die Additivitätseigenschaft als folgenden
Satz 1. *Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$Q^\infty(n+m) = Q^\infty(Q^\infty(n) + Q^\infty(m)) . \tag{1}$$

Zum Beweis benutzen wir eine Charakterisierung der iterierten Quersumme $Q^\infty(n)$ aus [PS] und zwei Eigenschaften der Kongruenzrelation, was jeweils im Anhang bewiesen wird.
Wir verwenden den
Satz 2. (Charakterisierung der iterierten Quersumme $Q^\infty(n)$).
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 \le Q^\infty(n) \le 9 \tag{2}$$
$$Q^\infty(n) \equiv n \bmod 9 . \tag{3}$$

Durch die Eigenschaften (2) und (3) ist $Q^\infty(n)$ eindeutig bestimmt.
Bemerkung. Will man $Q^\infty(n)$ berechnen, dann muss man nicht die Quersumme wiederholt bilden, sondern drückt n aus als

$$n = k \cdot 9 + r \text{ mit } 1 \le r \le 9 .$$

Dann ist $Q^\infty(n) = r$. (Es ist eine Art Division durch 9 mit Rest, allerdings so, dass der Rest mindestens 1 ist).

Außerdem gilt allgemein für die Kongruenzrelation

$$a \equiv a' \bmod m, b \equiv b' \bmod m \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \bmod m\,, \tag{4}$$

und die Kongruenzrelation ist transitiv

$$a \equiv b \bmod m \text{ und } b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m\,. \tag{5}$$

Beweis von Satz 1. Wir betrachten die linke Seite von (1) unter Verwendung von (3):

$$Q^\infty(n + m) \equiv n + m \bmod 9\,.$$

Für die rechte Seite von (1) gilt wegen (3) und (4)

$$Q^\infty(n) + Q^\infty(m) \equiv n + m \bmod 9\,.$$

Weiterhin ist wegen (3) und (5)

$$Q^\infty(Q^\infty(n) + Q^\infty(m)) \equiv n + m \bmod 9\,.$$

Wegen (2) sind beide Seiten sogar gleich (vergleiche auch die Bemerkung zu Satz 2). $\square$

ANHANG

Beweis der Charakterisierung der iterierten Quersumme $Q^{\infty}(n)$ nach [PS]:

Beweis von (2). („Bei wiederholter Quersummenbildung wird diese irgendwann einstellig").

Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ habe die Zifferdarstellung $\ldots e_2 e_1 e_0$, also

$$n = e_0 + e_1 \cdot 10 + e_2 \cdot 10^2 + \ldots .$$

Sei $Q(n)$ die gewöhnliche Quersumme von n. Dann ist

$$n = e_0 + e_1 \cdot 10 + e_2 \cdot 10^2 + \ldots \ \geq e_0 + e_1 + e_2 + \cdots = Q(n) .$$

Also ist $n \geq Q(n)$. Für $n \geq 10$ ist sogar $n > Q(n)$ (weil es dann einen Index $j \geq 1$ gibt, so dass $e_j \neq 0$). Wegen $Q(Q^{\infty}(n)) = Q^{\infty}(n)$ folgt

$$Q^{\infty}(n) \leq 9 .$$

□

Beweis von (3). („Eine Zahl n und die iterierte Quersumme $Q^{\infty}(n)$ lassen bei Division durch 9 jeweils denselben Rest").

Mithilfe der Zifferndarstellung von oben haben wir

$$\begin{aligned} n - Q(n) &= e_0 + e_1 \cdot 10 + e_2 \cdot 10^2 + \cdots - (e_0 + e_1 + e_2 + \ldots) \\ &= e_1 \cdot 9 + e_2 \cdot 99 + \ldots \\ &\equiv 0 \bmod 9 . \end{aligned}$$

Also ist

$$n \equiv Q(n) \bmod 9 .$$

Daraus folgt $Q(n) \equiv Q(Q(n)) \bmod 9$. Andererseits ist $Q(n) \equiv n \bmod 9$, also

$$n \equiv Q(Q(n)) \bmod 9 .$$

Iteration des Ganzen führt zu (3). Die Zahl r ist eindeutig, denn gäbe es r_1 und r_2, $r_1 > r_2$ mit der Eigenschaft, dann ist $r_1 - r_2 < 9$ und durch 9 teilbar, also $r_1 - r_2 = 0$.

□

Für den Beweis der Addivität und der Transitivität der Kongruenzrelation erinnern wir an

$$p \equiv q \bmod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } (q - p) = k \cdot m .$$

Beweis von (4).
Zu zeigen:

$$a \equiv a' \bmod m, b \equiv b' \bmod m \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \bmod m\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } (a' - a) &= k \cdot m \\ \exists k' \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } (b' - b) &= k' \cdot m \\ \Rightarrow ((a' + b') - (a + b)) &= (k + k') \cdot m \\ \Leftrightarrow a + b &\equiv a' + b' \bmod m\,. \end{aligned}$$

□

Beweis von (5).
Zu zeigen:

$$a \equiv b \bmod m \text{ und } b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } (b - a) &= k \cdot m \\ \exists k' \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } (c - b) &= k' \cdot m \\ \Rightarrow (c - a) &= (k + k') \cdot m \\ \Leftrightarrow a &\equiv c \bmod m\,. \end{aligned}$$

□

KM dankt Christian Keibl für anregende Diskussionen und Vivien Weimer für den Hinweis auf die Fragestellung.

Literatur

[PS] Puchta, Spilker: *Altes und Neues zur Quersumme.* `http://www.math.uni-rostock.de/~schlage-puchta/papers/Quersumme.pdf` Zugriff 07.01.2018