Mü

Klasse 11f **Exakte Berechnung von Integralen** 08.02.2011

Bisher: Exakte Berechnung war nur möglich, falls f linear (oder Graph von f Kreislinie).

Erstes Beispiel eines Integrals über eine Funktion, die nicht zu diesen Spezialfällen gehört:

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x\,, \quad \text{also} \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für} \quad f(x) = x^2\,.$$

Wir berechnen zunächst die Untersumme für $n = 4$:

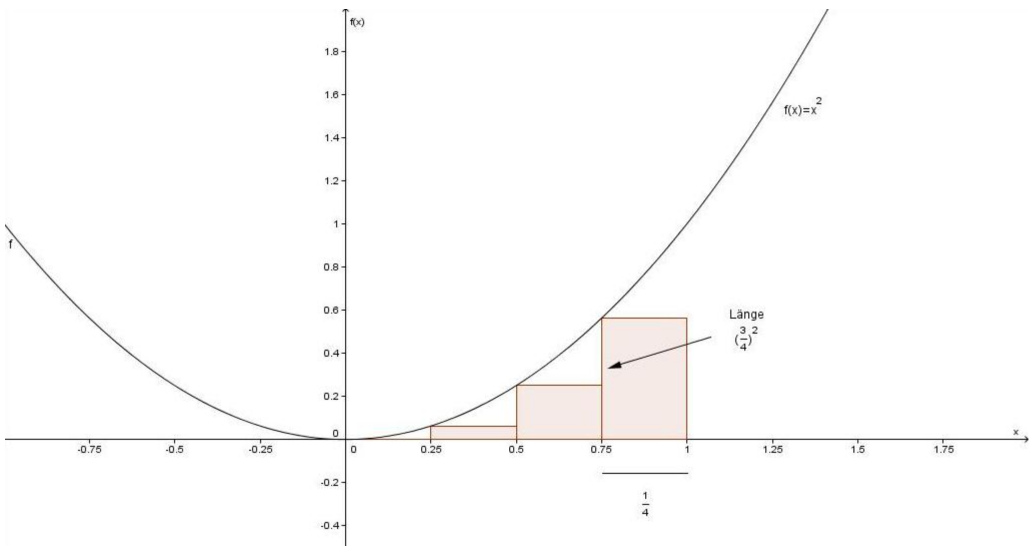

Abb. mit GeoGebra

Untersumme[$f(x)$,0,1,4]$= \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,21875$.

Idee: Wir berechnen die Untersumme für n und betrachten dann den Fall $n \to \infty$.

Die Einzelintervalle haben die Länge $\frac{1}{n}$, denn der gesamte Bereich auf der x-Achse, über den wir integrieren, hat die Länge 1 (Integral von 0 bis 1) und dieser wird in n gleiche Teile zerlegt. Die Stützstellen, die für die Untersumme verwendet werden, sind in diesem Fall $0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; ...; \frac{n-1}{n}$ (für $n = 4$ sind die Stützstellen $0; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}$).
Der Flächeninhalt eines einzelnen Rechtecks der Untersumme lässt sich aus der „Länge“, die immer $\frac{1}{n}$ ist und der jeweiligen „Breite“, die sich als Funktionswert an der Stützstelle ergibt, berechnen.

Für

$f(x) = x^2$ ist also

Untersumme[f(x), 0, 1, n]

$$= \frac{1}{n}\cdot 0^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot 0^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot 2\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\cdot 3\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}(n-1)\right)^2$$

$$= 0 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot 2^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot 3^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot(n-1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot 2^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot 3^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot(n-1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot\left[1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot\underbrace{\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\right]}_{=S}$$

Einschub

S: Summe der ersten $(n-1)$ Quadratzahlen

Dafür gibt es eine Summenformel*:

$$S = \frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)$$

Bsp.: $\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2}_{\text{das ist } 1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 \text{ für } n=4} = 1+4+9 = 14$

Also setze $n=4$ in Summenformel ein:

$$S = \frac{1}{6}\cdot(4-1)\cdot 4\cdot(2\cdot 4-1) = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 7 = 14$$

$\Rightarrow$ ✓

*Diese müsste man eigentlich noch beweisen

Bemerkung: Mittels der Summenformel erhält man das Ergebnis sofort, d.h. ohne Summieren der einzelnen Terme

Weiteres Bsp.: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

Hier müssen 6 Summanden addiert werden!

Einfacher geht's mit der Summenformel:

Setze $n=7$ (denn dann ist $n-1=6$) in die Summenformel ein:

$$S = \frac{1}{6} \cdot (7-1) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 7 - 1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 = 7 \cdot 13 = 91$$

Probe: $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$ ✓

→ Zurück zur Untersumme: Sie ist also

Untersumme[f(x), 0, 1, n]

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$

(Check: Für $n=4$ kennen wir ja bereits das Ergebnis. Daran können wir diese eben erhaltene Formel überprüfen

$$\text{Untersumme}[f(x), 0, 1, 4] = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (4-1) \cdot 4 \cdot (2 \cdot 4 - 1)$$

$$= 0{,}21875 \checkmark_{\text{s.o.}}$$

Je größer n wird, desto mehr nähert sich die Untersumme dem wahren Wert.

Der wahre Wert ist $\lim\limits_{n \to \infty}$ Untersumme[f(x), 0, 1, n],

also $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}(n-1) \cdot n (2n-1) \right]$

Gegen welchen Wert geht

$\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)$ für $n \to \infty$?

Für $n = 1000$: 0,3328
$n = 10000$: 0,33328
$n = 1000000$: 0,3333328

} Term z.B. als Funktion in GTR eingeben, dann $Y_1(1000)$ etc.

Exakte Bestimmung des Grenzwerts?

[1. Möglichkeit

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \, \frac{1}{6}(n-1)\cdot n(2n-1)$$

$$= \frac{1}{6} \, \frac{1}{n}(n-1) \cdot \frac{1}{n}\cdot n \cdot \frac{1}{n}(2n-1)$$

$$= \frac{1}{6} \, \frac{n-1}{n} \cdot 1 \cdot \frac{2n-1}{n}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1 \cdot \left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\cdot 1 \cdot \underbrace{\left(2-\frac{1}{n}\right)}_{\to 2} = \frac{1}{6}\cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$]

→ 2. Möglichkeit

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)\cdot n \cdot (2n-1) = \frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{6\cdot n^3}$$

$$= \frac{(n^2-n)\cdot(2n-1)}{6\cdot n^3}$$

$$= \frac{2n^3-n^2-2n^2+n}{6n^3}$$

$$= \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \frac{\cancel{n^3}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\cdot 6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 2}{2} - \overset{\to 0}{\frac{3}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{\underset{\to 6}{6}} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$