

3. Thermische Eigenschaften

wie können wir effects wie Wärmekapazität, Wärmeleitung, thermische Expansion, ... schneller verstehen?

thermische Ausdehnung von Gittervibrationen charakteristisch, Aufbau, Propagation dieser Vib.

Betrachten hier nur das Gitter, elektronische Beiträge später. Viele Eigenschaften bereits so beschrieben.

3.1. Harmonische Gitterschwingungen

Zunächst 1-dimensional

im 1-d Potential betrachten wir nur 1 Teilchen

$$V(x) = \underbrace{V(a)}_{\text{willkürlich, Gleichw.}} + \underbrace{\frac{dV}{dx}(x-a)}_{=0, \text{ da Gitterschwingung um Gleichgew. pos. a}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}(x-a)^2}_{\text{harm. Potential}} + \underbrace{\dots}_{\text{anharmonische Terme}}$$

→ harmonische Schwingungen

- für eine Masse M $M \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma x$ Bewegungsgl.

$$\text{Frequenz } \omega = \sqrt{\gamma/M}$$

Energie Summe aus pot. und kinetischer Energie

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \gamma x^2$$

Amplitude aus Äquipartitionsprinzip, d.h. für jede Koordinate Beitrag $\frac{1}{2} k_B T$ zur mittleren Energie des Systems, also

$$\frac{1}{2} \gamma x_{\max}^2 = k_B T \quad \text{oder} \quad x_{\max} = \left(\frac{2 k_B T}{\gamma} \right)^{1/2}$$

* Ort und Impuls

$x_{\max}$ typischerweise klein gegen Gitterabstände
 aber wegen Bindung der Atome wie Gitter
 sind die Schwingungen gekoppelt.

a) betrachte zunächst Kette identischer Atome
von unendlicher Länge und Oszillationen
entlang der Kette (1-d Problem)

Kette charakterisiert durch 1 Gittervektor der
 Länge a , reziprokes Gitter ebenfalls 1-d
 reziproker Gittervektor der Länge $b = 2\pi/a$
 Atome durch Federn mit Kraftkonst γ ver-
 bunden

Bewegungsgleichung $M \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\gamma(u_n - u_{n-1}) + \gamma(u_{n+1} - u_n)$
 u_n Position von Atom n rel. zu Gleichgewichtslage

allg. Lösung der Form $u_n(t) = u \exp(i(kan - \omega t))$

Wellenvektor der Osz. $k = 2\pi/\lambda$

in Bewegungsgleichung

$$-M\omega^2 \exp(i(kan - \omega t)) = -\gamma(2 - \exp(-ika) - \exp(ika)) \times \exp(i(kan - \omega t))$$

$$+ M\omega^2 = 2\gamma(1 - \cos(ka))$$

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{2\gamma(1 - \cos(ka))}{M}} = 2\sqrt{\frac{\gamma}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right| \Rightarrow \boxed{\text{Fig 3-1}}$$

"Dispersionsrelation" $\left[\begin{array}{l} \text{für } k \ll \frac{\pi}{a} \text{ gibt Steigung das ist} \\ \text{die Schallgeschwindigkeit } c_s \end{array} \right]$

Lösungen sind Wellen, die entlang der Kette
 propagieren. Sind allerdings nur an den Gitter-
 punkten n definiert.

Dispersionsrelation periodisch mit Periode des
 reziproken Gittervektors $2\pi/a$!

d.h. Bewegung aller Atome der Kette kann
diese Periodizität beschrieben werden
wobei genug, Lösungen für Länge des
kristallinen Gittervektors zu kennen, also
z.B. im Intervall $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$

"erste Brillouinzone"

generelle Definition: 1. BZ Region aller Punkte
die einem kristallinen Gitterpunkt (z.B. dem
Ursprung bei $k=0$) näher sind als jedem anderen
 $\leftrightarrow$ entspricht der Wigner-Seitz-Zelle im
Ortsraum

b) Kette endlicher Länge, N -Atome

$\rightarrow$ Randbedingungen

wähle sogenannte zyklische oder periodische
Randbed. (Born, von Karman) $u_{N+n}(t) = u_n(t)$
(Spezialfall wäre, beide Enden fest zu halten,
dann nur stehende Wellen)

$\rightarrow$ Einschränkung der möglichen Wellenzahlen

$$k = \frac{2\pi}{aN} m \text{ mit } m \text{ ganzzahlig}$$

$$\text{da } \exp(ikn) = \exp(ik(N+n))$$

da Oszillation periodisch im kristallinen
Gitter, d.h. invariant unter Addition von
 $\frac{2\pi}{a}$ zu k , gibt es nur N verschiedene
Frequenzen. In der ersten Brillouinzone

$$-N/2 \leq m \leq N/2$$

 Fig 3-2

Lösung wie unendliche Kette, aber nur an N
Punkten zwischen $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$

je längere Kette, desto näher am Kontinuum

c) quantisierte Vibrationen - Phononen
auf jeder der N Oszillatorfrequenzen baut
sich harm. Oszillatorspektrum mit äquidistanten
Zuständen auf

$$E_l = (l + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad l \text{ ganzzahlig}$$

$\Rightarrow$ Fig 3-3

für jeden der N Oszillatorfrequenzen
Energiezustände $E_l(k) = (l + \frac{1}{2}) \hbar \omega(k)$

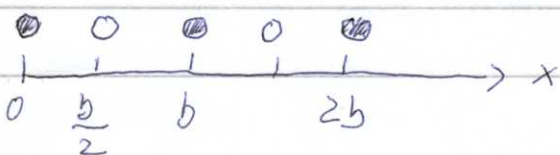
d.h. k ist eine 2. Quantenzahl für das
System von N Oszillatoren, jede Vibrations-
zustand eindeutig durch (k, l) beschrieben

den Oszillator k im angeregten Zustand l nennt
man ein "Phonon"

Vibrationsmode, an der alle N Atome teil-
nehmen, nicht lokalisiert an einem Atom!

Phonon: Schwingungsquantum, das erzeugt
und vernichtet werden kann und dessen
Propagation z.B. Wärmeleitung beschreibt.
Phonon ist Boson (wie Photon), Statistik
z.B. für Wärmekapazität wichtig.

d) 2 Sorten von Atomen pro Gitterzelle ent-
lang der Kette



Atome mit Massen M_1 u. M_2
an Positionen u_n und v_n
mit gleicher Gitterabstände

Bewegungsgleichungen wie oben

$$M_1 \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\gamma(2u_n - v_{n-1} - v_n) \quad M_2 \frac{d^2 v_n}{dt^2} = -\gamma(2v_n - u_n - u_{n+1})$$

Lösungen wieder von selben Typ, setze ein

$$u_n(t) = u \exp(i(kbn - \omega t)) \quad v_n(t) = v \exp(i(kbn - \omega t))$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 M_1 u &= \gamma v (1 + \exp(-ikb)) - 2\gamma u \\ -\omega^2 M_2 v &= \gamma u (\exp(ikb) + 1) - 2\gamma v \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{homogenes lin.} \\ \text{Gleichungssystem} \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \omega^2 = \gamma \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \pm \gamma \left[\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2 - \frac{4}{M_1 M_2} \sin^2\left(\frac{kb}{2}\right) \right]^{1/2}$$

Lösungen haben wieder Periodizität
des reziproken Gitters $2\pi/b \approx$ alle Physik
innerhalb der 1. Brillouinzone

 Fig. 3-4

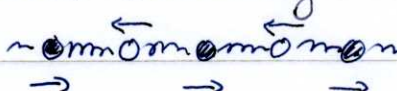
durch $\pm \sqrt{\quad}$ 2 Typen von Lösung:

$$-\sqrt{\quad} \sim 0 \text{ für } \sin(\quad) = 0 \text{ bzw. } k = n2\pi/b$$

"akustischer Zweig" sieht aus wie Atome 1. Satz
Propagation von Schallwellen durch Kristall

$$+\sqrt{\quad} \sim \text{Maxima } 2\gamma \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \text{ wenn } k = n2\pi/b$$

"optischer Zweig" werden sehen, diese Wellen
können aus em. Feld koppeln

kann man schon sehen: bei $k=0$ sind die beiden
Atome der Einheitszelle ausser Phase, wenn Ladung
unterschiedlich $\sim$ oszillierendes Dipol 

e) 3-d Festkörper

Generalisierung einfach, nur viele Indizes, da
 $k \rightarrow \vec{k}$ generalisierte Def. der 1. Brillouinzone
wie oben, Form kann kompliziert sein

Beispiel: fcc Gitter $\rightarrow$ inverses Gitter bcc

1. Brillouinzone ist frankisch Oktaeder

bei 1 Atom pro Einheitszelle $\rightarrow$ 3 Kurven $\omega(k)$
für akustischen Zweig (z.B. Al)

bei 2 Atomen pro Einheitszelle $\rightarrow$ 3 Kurven für
optischen Zweig + 3 Kurven für akustischen Zweig
(z.B. Diamant)

 Fig 3-4a

Kurven können bei Existenz zusätzlich
Punktsymmetrien teilweise (bestimmte ω) oder
ganz entartet sein; generell 3i Kurven bei
i Atomen pro EZ

grundsätzlich in 3d:

analog zum 1d Fall ein longitudinaler Zweig
+ 2 transversale Zweige (können entartet sein)

Auswahl gekoppelter 3d harmon. Oszillatoren, besonders
wenn chemische Bindungskräfte, Wechsel-
kräfte, wie in ionischen Kristallen.

Weniger gut in kovalent gebundenen Festkör-
pern - geradlinige Bindungen

bei höheren Temperaturen werden Anharmonizitäten wichtig.

3.2. Wärmekapazität

klassisch aus Äquipartitionsprinzip
 innere Energie 1 dim Oszillator $k_B T$
 3 $3k_B T$

$$dU = dQ = n C dT$$

pro Mol zugeführte Wärme definiert die
 molare Wärmekapazität C

$C = 3k_B M_A = 3R \approx 24.9 \text{ J/K}$ "Dulong-Petit'sche Regel"
 unabhängig von der Temperatur

nicht schlecht bei Raumtemperatur, viele
 Metalle haben $C = 24.27 \text{ J/K}$, allerdings Graphit
 nur 5 J/K

HB: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ und $C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ mit

$C_P - C_V = 9\alpha^2 V T / \kappa$ α : lin. therm. Ausdehnungskoeff.
 κ : Kompressibilität
 in Festkörpern sehr klein (wir beschränken Bereich)

in der Tat gibt es bei niedrigen Temperaturen eine
 sehr starke T -Abhängigkeit $\Rightarrow$ Fig. 3-5
 empirisch über großen Bereich $C \propto T^3$
 T -Abhängigkeit von C in Festkörpern eine
 der ersten großen Erfolge der Quantentheorie

3.2.1. Einstein-Modell

quantenmechanische Beschreibung der
 Oszillatoren durch Einstein

(Erinnerung an Behandlung der Schwarzkörperstrahlung)

vereinfachende Annahme Gitter:

Gitter mit N Atomen durch $3N$ Oszillatoren derselben Frequenz ω_E beschreiben
quantenmechanische Energielevels

$$E_n = (n + 1/2) \hbar \omega_E$$

mittlere Energie gegeben durch mittleren Angewandten Zustand, z.B. für 1 Mol

$$\langle E \rangle = 3N_A (\langle n \rangle + 1/2) \hbar \omega_E$$

Phononen sind Bosonen, daher

$$\langle n \rangle = 1 / (\exp(\hbar \omega_E / k_B T) - 1)$$

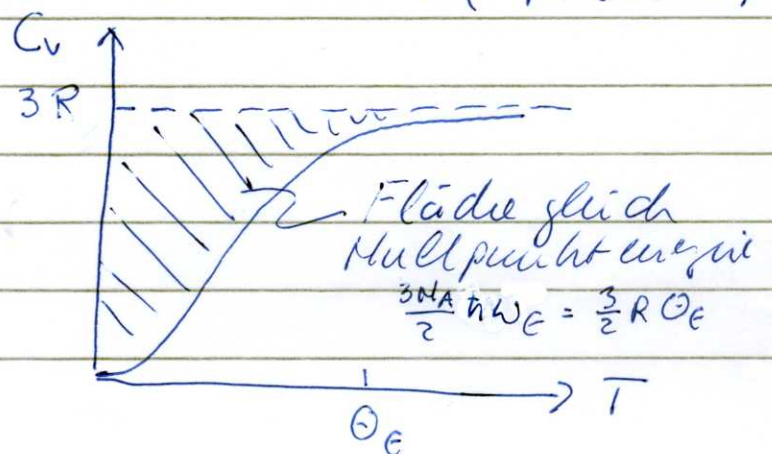
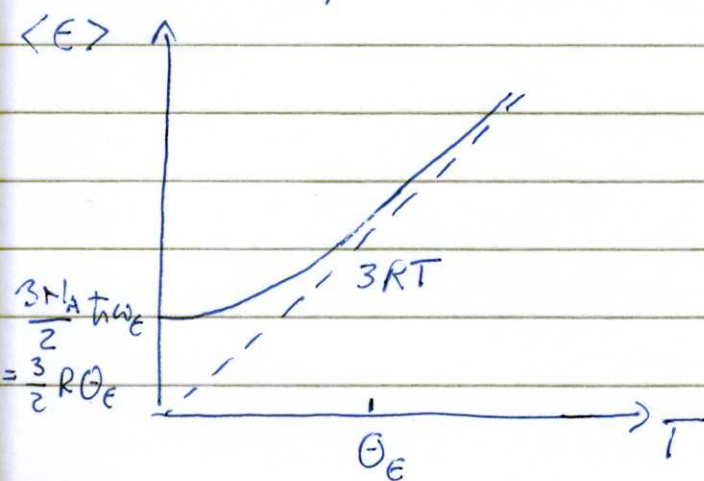
und daher

$$\langle E \rangle = 3N_A \left(\frac{1}{\exp(\hbar \omega_E / k_B T) - 1} + 1/2 \right) \hbar \omega_E$$

für $k_B T \ll \hbar \omega_E$ $\langle E \rangle = \frac{3N_A}{2} \hbar \omega_E$ Nullpunktenergie
 $T \ll \Theta_E$ $= \frac{3}{2} R \Theta_E$

für $k_B T \gg \hbar \omega_E$ $\langle E \rangle = 3N_A k_B T = 3RT$ wie Äquipartitionprinzip erwarten läßt (mittlere Energie eines Oszillators ist $k_B T$, $1/2 k_B T$ pot. und $1/2 k_B T$ kin. Energie)
führt Gittertemp $\Theta_E = \frac{\hbar \omega_E}{k_B}$ ein

Wärmekapazität $C_v = \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_v = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{\exp(\Theta_E/T)}{(\exp(\Theta_E/T) - 1)^2}$



Wärmekapazität verschwindet exponentiell
 für kleine T , erreicht Dulong-Petit klassi-
 schen Wert für hohe $T > \Theta_C$ F-i 3-6

Vgl. mit Daten gut bei hohen T , qualitativ
 nicht schlecht bei fallendem T aber Abfall
 viel zu steil exp mit Vgl zu T^3 in Daten;
 muß Verteilung der Oszillationsfrequenzen
 berücksichtigen

3.2.2. Debye Modell

betrachtet endl. lange Kette^(L) von N Atomen
 Frequenzverteilung als Funktion von k in 3.1
 Breite der 1. Brillouinzone gleich Länge des
 reziproken Gittervektors $2\pi/a$; Abstände der
 möglichen Punkte in k $\Delta k = 2\pi/L \ll 2\pi/a$ fast
 kontinuierlich, $\omega(k) = 2\sqrt{\frac{F}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$
 im Gegensatz zu Gittermodell: für makroskopischen
 Kristall gibt es sehr kleine Frequenzen nahe $k=0$
 entwickle sich $\approx \omega(k) \approx \sqrt{\frac{F}{M}} ak = vk$ (lin. Dispersions-
 relation, Phasengeschw gleich Gruppengeschw, Propagation
 von Schallwellen mit v)

Annahme Debye: benutze diese Dispersionsrelation
 für alle k ; ist zwar für grössere k nicht realistisch
 aber nicht so relevant, da für hohe Temp. wo diese
 Moden angeregt werden könnten, C sowieso durch
 das klassische Limit $3R$ beschrieben.

mittlere Energie für
 einen Oszillator: $\langle E \rangle = \int \frac{g(\omega) \hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega$

(Nullpunktenergie hier weglassen, da kein Beitrag zu C)

für 3-dim Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

$$k_x = 2\pi n_x / L \text{ etc}^* \quad g(\vec{k}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 g(\vec{k}) d\vec{k} = g(k) dk$$

$$g(k) = \frac{L^3 k^2}{2\pi^2} = \frac{V k^2}{2\pi^2} \quad \text{NB: das ist nicht die Lösung für laufende Wellen}$$

und $k_{x,y,z}$ pos oder negativ aber auch die Lösung für stehende Wellen

$$g(\omega) = g(k) \frac{dk}{d\omega} \quad \text{und mit Dispersionsrel } \omega = vk$$

$$g(\omega) = \frac{V \omega^2}{2\pi^2 v^3}$$

* Randbed: $u(x=L, y, z) = u(x, y=L, z) = \dots$
statt $u(x=0) = u(x=L) = 0$

NB: in der Tat gibt es in 3d Kristall 3 akustische Zweige und man kann typischerweise 2D sehen lang. und transv. Schallgeschw unterscheiden d.h. v oben ist ein Mittelwert. Berechnung in 3d sehr schwierig für realistische interatomare Kräfte. Abkessung durch incl. Monophonstruktur möglich $\Rightarrow$ [Fig 3.7]

Hellung an $g(\omega)$ bis zu einem cut-off ω_D (Debye-Frequenz) gültig, keine Moden oberhalb.

für Gitter aus N Atomen $\sim 3N$ Schwingungsmoden $\sim$ wähle ω_D so daß

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega = 3N \quad \text{bzw} \quad \omega_D^3 = \frac{18\pi^2 v^3 N}{V}$$

und definiert eine Debye-Temperatur $\Theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B}$

und $x = \hbar \omega / k_B T$ bzw $x_D = \hbar \omega_D / k_B T = \Theta_D / T$

damit wird mittlere Energie von N Oszillatoren

$$\langle E \rangle = 3N k_B T \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{x_D} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx$$

Hochtemp. Limit $\exp x \approx 1 + x \sim \langle E \rangle = 3N k_B T$ pro Teil 3RT

Niedertemp. Limit, x groß, kann dann ohne großen Verlust an Genauigkeit bis $x = \infty$ integrieren
 $\int x^3 / \exp x - 1 = \pi^4 / 15$

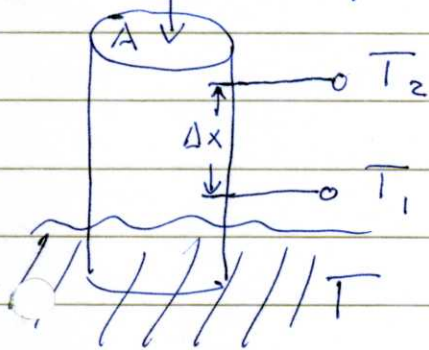
$$C = \frac{12\pi^4}{5} N k_B \left(\frac{T}{\Theta_0} \right)^3 \quad \text{Debye } T^3\text{-Gesetz}$$

Θ_0 bestimmt Skala; generell gute Reproduktion der exp. gemessenen Wärmekapazität
 wo kann als typ max. Oscillationsfrequenz (auch Annahme lin. Dispersion) verstanden werden

→ [1-ig. 3-8 / 3-8a]

3.3. Wärmeleitung

Def: dQ/dt konst. Wärmefluss



$$T_2 - T_1 = \Delta T$$

Wärmeleitfähigkeit κ

$$\kappa = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \frac{\Delta x}{\Delta T} \quad [\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}]$$

Nichtgleichgewichtsphänomene

Größenordnung bei Raumtemp:

	κ (W m ⁻¹ K ⁻¹)
Diamant	2300
Cu	386
Si	150
Styropor	0.03

offensichtlich haben auch Materialien ohne freie Elektronen u.ä. sehr große Wärmeleitfähigkeit
 → durch Phononentransp.

$$\kappa = \kappa_{ph} + (\kappa_e) \rightarrow \text{später}$$

Phononen als durch Kristall propagierende Wellen ergeben keinen Beitrag, mittl. Hapt. im ganzen Kristall gleich.

Erzeugung von Phononen, die als Wellenpakete durch Kristall propagieren mit Gruppen-geschw dw/dk ; $2 \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 2$ Prozesse u. 3 Phononen

Temp. gradient muß klein genug sein, um Region mit Temp T und Anzahl von Phononen $\langle n \rangle$ zu definieren

mehr Phononen am heißeren Ende propagieren und 'zerfallen'

Phonon-Phonon streuung

Phonon-Gitterdefekt streuung

benutze Resultat der kin. Gas Theorie

$$\kappa_{ph} = \frac{1}{3} n C \lambda_{ph} v_{ph}$$

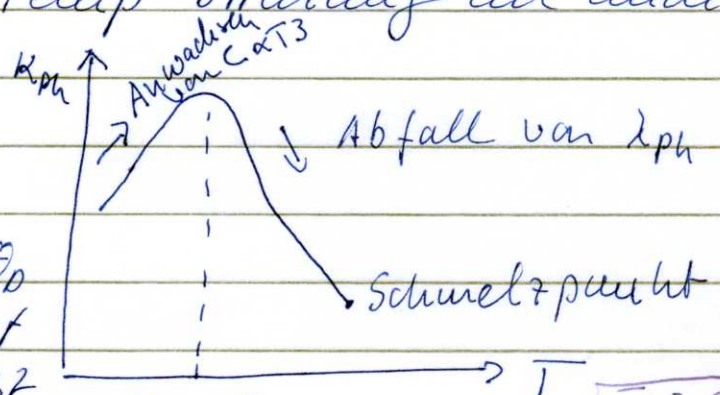
Didakt. $\rightarrow$ typ. Geschwindigkeit d. Phononen $\approx$ Schallgeschwindigkeit
Dännekap. $\rightarrow$ mittlere freie Weglänge $= v \cdot \tau$

d.h. behandle Phononen wie Teilchen in Gas

λ_{ph} : - bei niedrigen Temp Streuung an Gitterdefekten od., bei sehr perfekten Kristall, an Grenzflächen

- bei zunehmender Temp Streuung an anderen Phononen

schematisch



Max typischerweise bei $0.1 \Theta_D$ also sehr hoch im Material

d.h. Phonon-Phonon streuung erst bei sehr hoher T wichtig, siehe WL

3 Regimes - bei sehr niedrigen Temp dominiert T -Abh. von C , d.h. $\kappa \propto T^3$

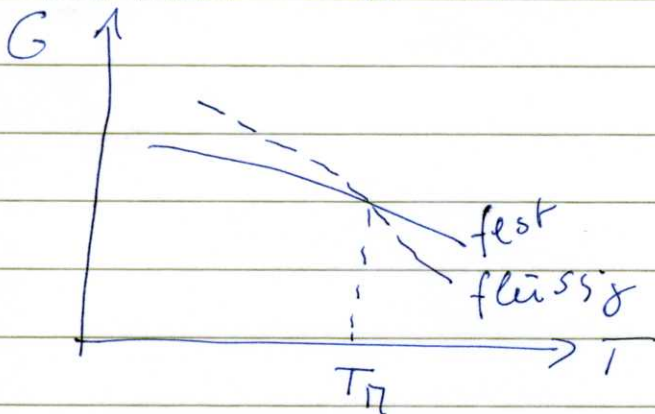
- bei sehr hoher Temp $T \gg \Theta_D$, Phonon-Phonon Streuung von Phononen etwa konst. Größe Anzahl $\langle n \rangle \propto T \leadsto \lambda \propto T^{-1}$ bzw T^{-x} mit $x > 1$ für koll. von mehr als 2 Phononen

MB: in rein harmonischem Potential Superpositionsprinzip, $\leadsto$ kein Beitrag zur Wärmeleitung, hängt von Anharmonizitäten ab

- bei mittleren Temp. Abfall steiler als T^{-1} limitiert durch Erzeugung von Phononen mit umgekehrter Gruppengeschw. (sogenannter Umklapp-prozess $k_3 \approx \pi/a$, erfordert etwa Debyeenergie $\propto \exp(-\Theta_D/T)$ oder $\lambda \propto \exp(\Theta_D/T)$) & in diesem Bereich stark von Konzentration von Gitterdefekten abhängig

3.4. Schmelzpunkt

gründsätzlich unüb, man freie Energie für feste und flüssige Phase als Funktion von T kennen $G = U + PV - TS$



System wählt immer Phase mit niedrigster freier Energie am Kreuzungspunkt: Phasenübergang

MB: es kann mehrere feste Phasen geben (Graphit $\leftrightarrow$ Diamantstruktur)

Schwierig zu berechnen

grundsätzlich: je stärker Bindung, desto höher Schmelztemp T_M

Edelgase: van der Waals T_M 4 K He
30 K Ne
90 K Ar

Metalle: metallische Bdg. 500 - 1500 K

Si, Übergangsmetalle: kovalente Bdg. 2000 - 3000 K

mögliche Abschätzung: wenn Vibrationsamplitude groß genug, schmilzt Metall

$$\frac{1}{2} \gamma x_{\max}^2 = k_B T \quad \text{fordere z.B. } x_{\max} \approx 0.05a \text{ für } T_M$$

$$\begin{aligned} \sim T_M &= \frac{(0.05a)^2 \gamma}{2k_B} = \frac{(0.05a)^2 \omega^2 M}{2k_B} && \text{benutze } \omega_D = k_B \Theta_D / \hbar \\ &= \frac{(0.05a)^2 \Theta_D^2 k_B M}{2 \hbar^2} && \text{ganz gut! } \Rightarrow \boxed{\text{Fig 3.9}} \end{aligned}$$

3.5. Thermische Ausdehnung

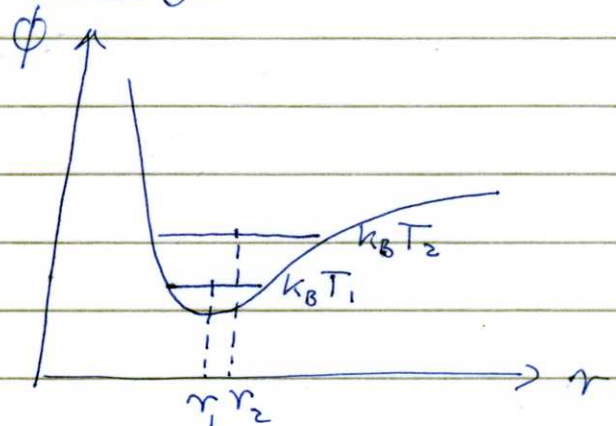
nur durch Anharmonizitäten im Potential

$V \propto \omega^{-3}$ oder $\omega \propto V^{-1/3}$

mit Grüneisenzahl γ

mit Grüneisenzahl γ

$$\gamma = - \frac{V}{\omega} \frac{d\omega}{dV}$$



man kann zeigen, daß $\gamma = - \frac{\alpha}{6} \left(\frac{d^3 \Phi}{dr^3} \right)_{r=a} \left/ \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} \right)_{r=a} \right.$

Volumenkoeff der thermischen Expansion

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

β^{-1} inverse Kompressionsmodulus

Beitrag der Phononen zu $(\partial p / \partial T)_V$

etwas Thermodynamik

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

F Helmholtzsche freie Energie U-TS

betrachte hier nur Beiträge zu F, die auch T-abhängig sind $\sim$ Energie in Vibrationen
jede Schwingung modo dem trägt

$$f = \frac{1}{2} \hbar \omega + k_B T \ln \left(1 - \exp \left(- \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right) \right) \quad \text{bei}$$

Beitrag zum Druck $p_{\text{vib}} = - \sum_m \frac{\partial f}{\partial V}$

$$= - \sum_m \hbar \frac{\partial \omega}{\partial V} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right) - 1} \right)$$

mit γ von oben

$$= \frac{\gamma}{V} \langle E_{\text{vib}} \rangle$$

$$\sim \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{\gamma C_V}{V} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\gamma C_V}{\beta V}$$

Kompressionsmodulus β nur schwach T-abh

$$\frac{\beta \beta V}{C_V} = \gamma \approx 1-3$$

Grüneisen: T-Abh. des therm. Expansionskoeff gleich T-Abh von C_V