

4. Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrie $\leftrightarrow$ Erhaltungssatz
 verknüpft durch "Noether's Theorem" (Emmy Noether)
 Wenn immer es in einem physikalischen System eine zugrundeliegende Symmetrie gibt, kann man eine erhaltene physikalische Größe oder eine (" Ladungs" -) Quantenzahl definieren

Beispiele aus der klassischen Physik:

Ervarianz unter Translation $\leftrightarrow$ Impulserhaltung

Rotationsinvarianz $\leftrightarrow$ Drehimpulserhaltung

Quantenmechanik: Symmetrioperationen sind unitäre Transformationen $U \psi(\vec{r}, t) = \psi'(\vec{r}, t)$
 mit $UU^\dagger = 1$ (hermitesche konjugierte $U^\dagger$ gleich U^*)

3 Typen von Transformationen:

- kontinuierliche Transformationen: U geht kontinuierlich in Einheitsoperator über (wie Translation) $\rightarrow$ führen zu additiven Erhaltungssätzen
- diskontinuierliche Transformationen: immer diskrete Zustände $\psi' = U\psi$ (z.B. Zeitumkehr)
 $\rightarrow$ führen zu multiplikativen Erhaltungssätzen

4.1. Additive Erhaltungssätze

el. Ladungserhaltung: wurde bereits von Pauli 1941 mit der Eichinvarianz der elektromagnetischen WW - keine absolute Skala für Potential - verknüpft. bei möglich unendlicher Reichweite. (Rev. Mod. Phys. 13, 203)
 $\boxed{\sum q_i = \text{konstant}}$

exp. Tests: $e \rightarrow \nu \gamma$ $\tau > 4.6 \cdot 10^{26} \text{ y}$; neues Exp am PSI am Beginn Datennahmen

β -Zerfall des Neutrons $n \rightarrow p \bar{\nu}_e \bar{\nu}_e$ vgl. mit

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e \quad \frac{\Gamma(n \rightarrow p \bar{\nu} \bar{\nu})}{\Gamma_{\text{tot}}} < 8 \cdot 10^{-27}$$

Baryonzahlenerhaltung: weist jedem Teilchen analog zu elektrischer Ladung Baryonzahl oder baryonische Ladung A zu.

Quarks haben $A = 1/3$, Antiquarks $A = -1/3$

$A = 1$ für $p, n, \Lambda, \Delta \dots$ alle Baryonen haben $A = 1$

$A = -1$ für $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda}, \bar{\Delta} \dots$ " Anti " $A = -1$

frühe experimentell $\boxed{\sum A_i = \text{konstant}}$

Grenzwert z.B. aus Studie nach Protonenzerfall

$p \rightarrow e^+ + \pi^0$ $\tau > 1.6 \cdot 10^{33} \text{ y}$ im Vergleich mit
 $p \rightarrow \text{anything}$ $\tau > 2 \cdot 10^{29} \text{ y}$ Alter des Universums von 10^{10} Jahren
 aber: kein zwingender theoretischer Grund für Baryonzahlenerhaltung; in einigen GUTs

zerfällt Proton auf Zeitskala $10^{29}-10^{30}$ y
 → intensive Suche in letzten 20 Jahren

Leptonzahlerhaltung: 1953 als empirisches
 Gesetz von Kanpiuski & Mahuond eingeführt
 um Abwesenheit bestimmter Prozesse zu erklären.
 z.B. $\gamma \rightarrow e^+e^-$ oder $\gamma \rightarrow p\bar{p}$ im Feld eines 3. Teilchens
 aber wie $\gamma \rightarrow e^+p$ oder $\mu \rightarrow e\gamma$
 ~ Zuordnung einer Leptonenzahl zu jeder
 Generation $L_e = 1$ für e^- und ν_e etc.
 empirisch ist ist Leptonzahl für jede
 Generation erhalten

$$\boxed{\sum_i L_{ei} = \text{konstant}}$$

erste Evidenz, daß

ν_e und ν_μ verschieden: 1962 Brookhaven
 Nat. Lab. AGS

15 GeV $p + B \rightarrow \pi + X$

Wähle Zerfallskanal $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$

stoppe Myon in 13.5 m Stahl (bis 17 GeV ok)

ridge verbleibenden Stahl auf H-Target

beobachte mit 10 t Funktorkammer was passiert

$\nu_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$? } Unterschied elektronen-

$\nu_\mu + p \rightarrow n + e^+$? } Schauer und min. ionisierendes Teilchen

und 8 Neutronen und 10^{14} v auf Target:

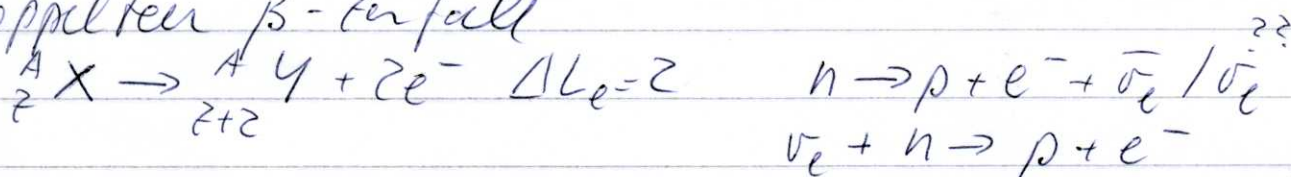
56 Ereignisse mit μ und 0 mit e , spät noch
 dramatisch verbessert → $\nu_e \neq \nu_\mu$

aber: zwischen Neutrinooszillationen
 beobachtet ↔ Neutrinos mischen

4-4

mögliche, wenn Neutrinos Masse haben
(Maki et al 1962, Pontecorvo 1968): Masseneigen-
Zustände

und: sind identische ν und $\bar{\nu}$ wirklich
ausgeschlossen? Suche nach neutrinolosen
doppelten β -Zerfall



Heidelberg - Roskauer Exp.: 11.5 kg ${}^{76}\text{Ge}$ im Gran
Sasso Tunnel ($\rightarrow \text{As} \rightarrow \text{Se}$) $\tau = 1.9^{+16.8}_{-0.7} \cdot 10^{25} \text{ y}$

Strangenesserhaltung: Seit Ende der 1940er
Jahre beobachtetes Puzzle: sogenannte V-Teil-
chen werden mit groÙ Wahrscheinlichkeit
produziert, aber zerfallen langsam

$X \rightarrow \begin{cases} p \\ \pi^- \end{cases}$ oder $\pi^+ \pi^-$ Zerfall eines neutralen Teil-
chen (Lambda oder K^0) in 2
geladene Teilchen

bei einigen GeV Pionenergie ist Wirkungsquer-
schnitt für $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$ $\sigma \approx 1 \text{ mb} \approx 0.1 \sigma_{\pi p \rightarrow \Delta}$
typisch für starke WW. Aber Zerfallssbreite

$$\Gamma_{\Lambda} = \frac{\hbar c}{\tau c} = \frac{197 \text{ MeV fm} \cdot s}{10^{-10} s \cdot 3 \cdot 10^{23} \text{ fm}} = 6.6 \cdot 10^{-12} \text{ MeV} \leftarrow \text{Schwache WW}$$

Vgl. $\Gamma_{\Delta} \approx 100 \text{ MeV} \leftarrow$ starke WW

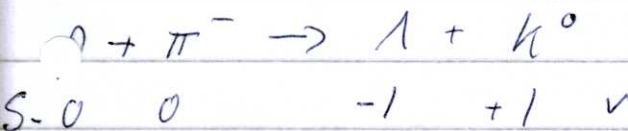
Pais - Regel (1952): Kaonen und Lambdas wer-
den in starken WW produziert, aber zerfallen
schwach.

Grund: Erhaltung der Strangeness $\rightarrow$ assoziiert

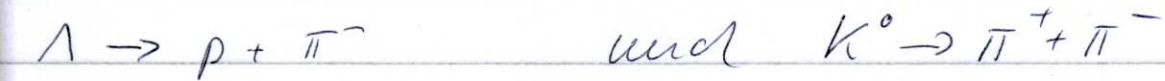
Produktion, d.h. Produktion in Paaren mit $S=+1$ und $S=-1$

Strongness 1953 von Gell-Mann und Nishijima 1953 (11 Jahre vor Quarks) eingeführt, um Pais-Regel zu erklären

$$\begin{aligned} \sum_i S_i &= \text{konst für starke und} \\ &\quad \text{elektromagnet. WW} \\ \sum_i S_i &\neq \text{konst für schwache WW} \end{aligned}$$



$$S: 0 \quad 0 \quad -1 \quad +1 \quad \checkmark$$



$$S: -1 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta S = -1 \quad +1 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta S = -1$$

im schwachen Zerfall $\Delta S = \pm 1$ möglich

Isospin Erhaltung: Heisenberg 1932 - Neutron und Proton sind 2 Ladungszustände eines Teilchens, des Nukleons

bleibt 1937 durch H. Bethe - Analyse von pp und pn Streudaten zeigt nach Abzug von Coulombeffekt, daß pp und pn WW gleich in Stärke und Reichweite ist. Ebenso Massen von ^3H und ^3He → führt zu Konzept des Isospins

Nukleon ist ein 2-Zustandssystem (Doublett) charakterisiert durch eine Quantenzahl Isospin von der es (in einem irreduziblen Hilbertraum) 2 mögliche Orientierungen, p und n, gibt
 $I = 1/2$, $I_3(p) = +1/2$, $I_3(n) = -1/2$

Rotationen im Isospinraum durch Spinoren analog zu Paulispinoren

2-Nukleon-System: Symmetrisierung der Wellenfunktion analog 2-Elektronensystem bezüglich Spin: sym Triplett $\frac{1}{\sqrt{2}}(pn+np)$ nn
 antisym Singulett $\frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)$ mit Wf $\chi(I, I_3)$
 formal Triplett $\chi(1,1)$ $\chi(1,0)$ $\chi(1,-1)$
 Singulett $\chi(0,0)$

Atomkerne: Z Protonen, N Neutronen $A = Z + N$
 $\vec{I} = \sum_{i=1}^A \vec{I}_i$ $I_3 = \sum I_{3i}$

el. Ladung $Q = Ze = \sum_{i=1}^A q_i = e \sum_{i=1}^A (I_{3i} + 1/2) = e(I_3 + \frac{1}{2}A)$
 $\sim I_3 = Z - \frac{1}{2}A$

$= \frac{1}{2}(Z-N)$ fest für jeden Atomkern
 aber für jeden Kern gibt es A Isospinvektoren
 je von Länge $1/2 \sim I_{\max} = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(Z+N)$ und
 wegen $I_3 \sim I_{\min} = \frac{1}{2}|Z-N|$

in jedem Atomkern kann es Zustände mit
 $\frac{1}{2}|Z-N| \leq I \leq \frac{1}{2}(Z+N)$ geben, jedem Zustand
 ist eine Quantenzahl I zugeordnet

Behachte in benachbarten Kernen mit gleichen A (Isobaren) Zustände
 mit gleichen I , sowie gleichen totalen Drehimpuls;
 I_3 natürlich unterschiedlich. Elektromagnetische
 WW bricht Isospin-Symmetrie der starken WW,
 aber nur etwas, da sie viel schwächer ist.

→ Zustände sind Isospindoublets

Beispiel: ${}^7_3\text{Li}^4$ und ${}^7_4\text{Be}^3$ $\Rightarrow$ Fig. 4-1
 I_3 $\frac{1}{2}(3-4) = -1/2$ $\frac{1}{2}(4-3) = +1/2$ $I_{\min} = 1/2$ für beide
 $I_{\max}$ $\frac{1}{2}(3+4) = \frac{7}{2}$ für beide, alle niedriger

Zustände sind $I = 1/2$

Energiedifferenz der Isobaren:

$$\Delta E = E(A, Z+1) - E(A, Z) = \frac{\partial E}{\partial Z} (\Delta Z = 1)$$

$$= \frac{\partial E_{cb}}{\partial Z} - \underbrace{(m_n - m_p)}_{1.29 \text{ MeV}}$$

für gleichförmig geladene Kugel $E_{cb}(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}$

$$\frac{\partial E_{cb}}{\partial Z} = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R} = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}}$$

für $Z=3$ und $A=7$ $\frac{\partial E_{cb}}{\partial Z} = 2.26 \text{ MeV}$

$\Delta E = 2.26 - 1.29 = 0.97 \text{ MeV}$

im Vergleich zu Daten: $0.86 \text{ MeV} \rightarrow$

in Kernen eine gute Symmetrie

es gibt auch Multipletts mit mehr Kernen  Fig 4-2

andere Hadronen: I_3 wird über Valenzquarks

zugeordnet, $I \geq |I_3|$ Wert liegt fest, wenn

gesamtes Multiplett bekannt

z.B. Pion $\pi^+ = u\bar{d}$ $I_3 = 1$ $\pi^- = \bar{u}d$ $I_3 = -1$ $\pi^0 = u\bar{u} - d\bar{d}$ $I_3 = 0$

} Isospintriplett
mit $I=1$

Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ $I=1 \rightarrow I=0$ ein WW bricht I -Symmetrie

Lambda $\Lambda = uds$ hat keine geladenen Partner

$I_3 = 0, I = 0$

Zerfall $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$ über schwache WW

	uds	$u\bar{u}$ and $\bar{u}d$		
I_3	0	$1/2$ -1	$\Delta I_3 = -1/2$	} schwache WW verletzt Erhaltung von I, I_3, S
I	0	$1/2$ 1	$\Delta I = 1/2$	
S	-1	0 0	$\Delta S = 1$	

- aber erhält I_3

4.2. Multiplikative Erhaltungssätze:

Parität: Symmetrie unter räumlicher Inversion

$$x, y, z \xrightarrow{P} -x, -y, -z$$

diskrete Transformation $P \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$

offensichtlich $P^2 = 1$, d.h. umgekehrt ± 1 möglich

$$P \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \pi \cdot \Psi(\vec{r}) \quad \text{mit } \pi = \pm 1 \quad \begin{array}{l} +1 \text{ "gerade"} \\ -1 \text{ "ungerade"} \end{array}$$

"polare"

Vektoren kehren unter P ihr Vorzeichen um ($\vec{r}, \vec{p}, \dots$)
oder wie $\vec{L}$ sind invariant

$$P L_x = (-y)(-p_z) - (-z)(-p_y) = L_x \text{ etc. "axiale Vektoren"}$$

Skalarprodukte von Vektoren: polar $\cdot$ polar oder axial $\cdot$ axial

"echte Skalare" $\equiv$ invariant unter P

polar $\cdot$ axial (z.B. $\vec{p} \cdot \vec{L}$) ändern ihr Vorzeichen
unter Paritätstransformation "Pseudoskalare"

Transformation des räumlichen Anteils der Wellenfunktion;
wenn in Kugelkoordinaten ausgedrückt

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) \sum Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \quad \text{mit } Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = P_{\ell}^m(\cos \vartheta) \exp(i m \varphi)$$

$$P(r, \vartheta, \varphi) = (r, \pi - \vartheta, \varphi + \pi)$$

$$P \exp(i m \varphi) = \exp(i m (\varphi + \pi)) = (-1)^m \exp(i m \varphi)$$

$$P P_{\ell}^m(\cos \vartheta) = P_{\ell}^m(\cos(\pi - \vartheta)) = (-1)^{\ell+m} P_{\ell}^m(\cos \vartheta)$$

$$\Rightarrow P Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{\ell+m} Y_{\ell m} = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}$$

Parität ist multiplikative Quantenzahl $\Leftrightarrow$ d.h.
bei Paritätserhaltung ist Produkt der Paritäten
aller beteiligten Teilchen und ihre Relativbewegung
erhalten

$$\text{z.B. 2 Teilchensystem } \Psi = \Psi_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha}) \Psi_{\beta}(\vec{r}_{\beta}) \Phi(\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta})$$

$$P \Psi = \pi_{\alpha} \pi_{\beta} \Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} P \Phi = \pi_{\alpha} \pi_{\beta} (-1)^{\ell} \Psi \quad \text{wenn}$$

ϕ durch Kugelfunktionen beschrieben werden können

Messungen zeigen: a) starke und ein WW erhalten
Parität

Beispiel: (augen) Zustände in denen können nach Parität klassifiziert werden $\rightarrow$ Sache nach "verbotenen" Zerfall

Suche nach α -Zerfall eines angeregten Zustands
in ^{16}O mit $E^* = 8.87 \text{ MeV}$ und $J^\pi = 2^-$

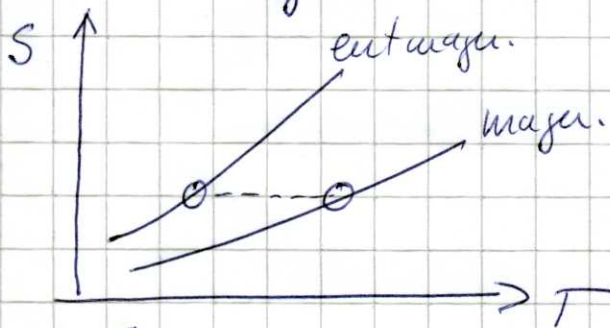
$^{16}\text{O}^* \rightarrow ^{12}\text{C} + \alpha$ wenn Zerfall im Grundzustand
 $\pi^- \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad 0^+$ von ^{12}C ; dann müsste $(-1)^l$
 negativ sein, aber da $\Delta J = 2 \rightarrow l = 2$

d.h. Zerfall nur möglich, wenn Kernzustände in
entweder $^{16}O^*$ oder ^{12}C Beimischung der entgegen-
gesetzten Parität haben

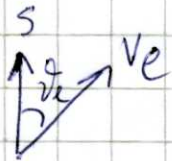
Erwarte für erlaubten α -Zfall $\Gamma_\alpha \sim 60 \text{ keV}$, messen
 $\Gamma_\alpha < 2 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \leadsto$ Reduktion um Faktor $3 \cdot 10^{-12}$
 $\leadsto$ Grund für mögliche Paritätsvermischung mit
 $\sim 10^{-6}$ in der Wellenfunktion

b) Paritätsverletzung in der schwachen WW: 1956 Analyse von T.D. Lee und C.N. Yang $\rightarrow$ keine Evidenz für Paritätserhaltung in schwacher WW (Phys. Rev. 104 (1956) 254)
Vorschlag eines Experiments zum Test, durchgeführt von Tran Van E. Puiarb $\Rightarrow$ β -Zerfall von polarisierten $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$ Kernspinspolarisation in Co-Salz durch starkes B-Feld bei sehr niedriger Temperatur Bedingung $\mu_H B \gg kT$ für $S=1$ und $g=1$
 $\sim \mu_S = 1$ Mikron $\mu_H = 3.15 \cdot 10^{-14} \text{ eV/T} \sim kT \ll 3.15 \cdot 10^{-13} \text{ eV}$
für $B=10 \text{ T}$ d.h. $T \ll \frac{3.15}{8.6} \cdot 10^{-2} \text{ K}$

Kühlung durch adiabatische Entmagnetisierung
von CeMgMO_3



dann Messung von Bleihö-
hen mit Spin 1/2 zu Kernspin
im Vergleich zu Bleihöhen
mit Spin antiparallel
zu Kernspin (Kern B-Feld)



$$\langle \cos \theta \rangle = \left\langle \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}| |\vec{v}|} \right\rangle = \langle \psi | \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}| |\vec{v}|} | \psi \rangle < 0$$

Elektron präferenziell emittiert in Richtung
entgegen gerichtet zu Spin, d.h. Gesamtwert
eines Pseudoskalars $(\vec{s} \cdot \vec{v}) \neq 0$
d.h. Paritätsverletzung

Fig 4-34

Gütschub 4-10a

Ladungskonjugation: Symmetrioperation der Ladungs-

konjugation kehrt Vorzeichen aller Ladungsquan-
tenzahlen um.

Es sei $|N\rangle = |A, Q, S, L, \dots\rangle$, dann ergibt
 $C|N\rangle = |-N\rangle$; wie für Parität $C^2 = 1$
für mögliche Eigenzustände gilt
 $C\psi = \eta_c \cdot \psi$ mit mögl. Eigenwerten $\eta_c = \pm 1$

allerdings sind die meisten Teilchen nicht
Eigenzustände von C

z.B. $C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle \neq \pm |\pi^-\rangle$

nur völlig neutrale Teilchen können Eigenzu-
stände von C sein

Photon, hat $\eta_c = -1$ da E-Feld einer bewegten
Ladung unter C sein Vorzeichen wechselt
n-Photon Zustände haben $\eta_c = (-1)^n$

π^0 : Zerfall in 2γ $C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$

Zerfall in 3γ würde C verletzen; frische $\frac{\Gamma_{\pi^0 \rightarrow 3\gamma}}{\Gamma_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma}} < 3 \cdot 10^{-8}$

Paritätszuordnung für Teilchen:

3 Zuordnungen per Definition $\pi_p = \pi_n = \pi_\lambda \equiv +1$
 1 pro additive Quantenzahl (Q, A, S)

Rest aus erlaubten Reaktionen im Zr-fällen

Antiproton $\pi_{\bar{p}} = -1$

Pion: $\pi_{\pi^-} = \pi_{\pi^0} = \pi_{\pi^+} = -1$

Fermion - Antifermion: entgegengesetzte Parität

Boson - Antiboson: gleiche Parität

alle Eichbosonen haben $\pi = -1$ $(\gamma, g, W^\pm, Z)$

Atomkerne: gegeben durch L

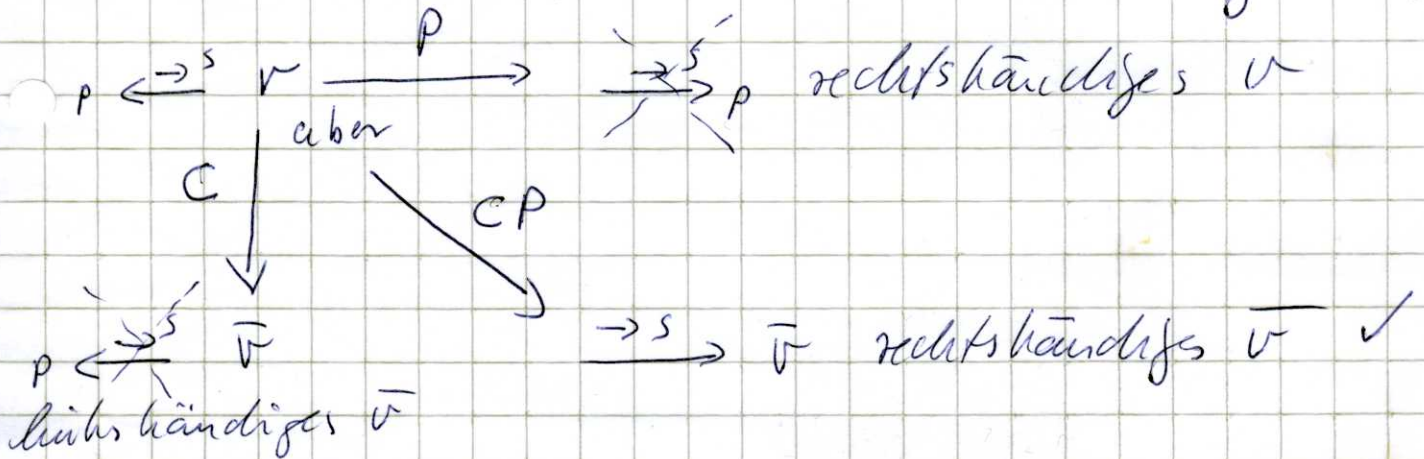
4-11

Starke und em WW sind invariant unter C
 z.B. Reaktion $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
 Winkelverteilung von π^+ und π^- und Energie-
 spektrern sind identisch

aber: schwache WW verletzt C-Symmetrie

frühe experimentell Neutrinos aus β -Zerfall sind
 immer links händig, d.h. $\xrightarrow{S} p$

und Antineutrinos sind rechts händig $\xrightarrow{S} p$



Händigkeit der Neutrinos im β -Zerfall erklärt
 Verletzung der Parität und der Ladungskon-
 jugationssymmetrie.