

6. Supraleitung

6.1. Phänomenologie

Supraleitung: in manchen Materialien fließt Strom bei niedriger Temperatur ohne Widerstand, $\rho = 0$! → [Fig 6-1]
 von Kamerlingh Onnes 1911 an ~~flüssigen~~ Hg bei 4.2 K (fl. He stand seit Kurzem zur Verfügung!) entdeckt

Onnes: $R < 10^{-5} \Omega$, Abfall sehr scharf

heute: ρ unmeßbar klein, Messung durch persistente Ströme. Bringe Supraleiterschleife in Magnetfeld, induziere Strom, entferne Magnetfeld und Werte ... Jahre! $\rho < 10^{-25} \Omega \text{m}$
 $\Delta T \leq 10^{-3} \text{ K}$ abh. von Probequalität

Phasenübergang, u.U. 1. Ordnung

viele Metalle, Legierungen und A. zeigen Supraleitung

hohes Magnetfeld und/oder hohe Strom^{dichte} zerstören diese Eigenschaft! sehr schmale btz. Anwendung → [Fig. 6-2]
 aber bei einigen Legierungen 50 T und 10^{11} A m^{-2} bei fl. He Temp ok

Messner-Ochsenfeld Effekt: 1933 entdeckt, daß Supraleiter auch perfekter Diamagnet, $\chi_m = -1$ für $T < T_c$

$\vec{M} = -\vec{B}_0 / \mu_0$, Magnetisierung kompensiert externes B-Feld
 $\vec{B}_{\text{SL}} = \mu_0 (\vec{H}_{\text{SL}} + \vec{M}_{\text{SL}}) = 0$

äußeres Magnetfeld induziert Ströme in dünnen

Schicht an Oberfläche des Supraleiters, nach
Leitz'scher Regel Eigenmagnetfeld, Kompensation
des äusseren Felds im Inneren des Supraleiters

$$B(z) = B(0) \exp(-z/\lambda_L) \quad \lambda_L = 10-100 \text{ nm} \quad \text{London'sche Eindringtiefe}$$

Zusätzlicher Effekt zu perfekter Leitung!
wo alles durch Faradaysches
Gesetz erklärt $\oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$  Fig. 6-3

6.2. Mikroskopische Theorie

1957 durch J. Bardeen, L.N. Cooper und J.R.
Schrieffer $\leftrightarrow$ BCS-Theorie

Supraleitender Zustand $\leftrightarrow$ Quantenphänomen
auf makroskop. Skala

sehr viele Teilchen im selben Zustand, aber
Elektronen sind Fermionen ?!

Elektronen bilden sogenannte "Cooper-Paare"
die Bosonen sind (Nukleonen im Kern
tun das auch! ebenso ^{fermionische} Alkaliatome in kal-
ten Quantengasen)

Grundsätzlich geht das immer, wenn eine
u.U. beliebig schwache, attraktive WW zwischen
den Fermionen herrscht.

Für Supraleit: Elektronen tauschen 'virtuelle'
Phononen aus, die Elektron-Getter WW
führt zu attraktiver effektiver Elektron-Elektron
WW (trotz Coulombabstoßung)  Fig. 6-4
für anschauliche Erklärung.

Die Elektronen des Cooperpaar können durch
Fermiener Zustände beschrieben werden

$$\{(\vec{k}\uparrow), (-\vec{k}\downarrow)\} \quad * (\text{siehe 6-3 für mehr})$$

mittlerer Abstand $\xi = 0.4 \text{ nm} - 1 \mu\text{m}$! kann
sehr groß sein "Kohärenzlänge"

quantenmech. Behandlung der Cooperpaar
BCS-Theorie

Elektronen in der Nähe der Fermikante tau-
schen Phononen mit bis zu $\hbar\omega_D$ aus
alle anderen Elektronen sind durch
Fermi-Dirac Statistik blockiert

Energiegewinn Δ pro Elektron oder 2Δ pro Paar
durch Bildung der Cooperpaare erniedrigt
sich Energie & alle Paare kondensieren
in diesen neuen Zustand wenn Entropie
unwichtig wird (bei sehr kleiner Temperatur)
→ Konsequenz: zwischen besetzten und
unbesetzten Zuständen bildet sich eine
Lücke (gap) von 2Δ um die Fermikante

→ Fig 6-5

Bildungsenergie des Cooperpaars bei $T=0$

$$\Delta(T=0) = 2\hbar\omega_D \exp(-1/V \cdot g(E_F))$$

mit Debye Frequenz ω_D , attraktivem WW-Poten-
tial V und el. Zustandsdichte $g(E_F)$

Δ fällt mit T da Cooperpaar durch $k_B T$ auf-
gehoben werden und wird 0 bei T_c

Cooper löst 1956 Schrödingers Gleichung
 für 2 wechselwirkende Elektronen in
 Anwesenheit einer Fermikugel nicht-
 wechselwirkender Elektronen
 Wellenfunktion der 2 Elektronen

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2)$$

mit $k_1, k_2 > k_F$ (Rolle der anderen Elektronen)

für niedrigste Energie ist c.m. der beiden
 Elektronen in Ruhe, d.h. $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k}$
 damit

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))$$

$k > k_F$

es gibt gebundene Zustände wenn
 WW beliebig schwach aber attraktiv

BCS: Wellenfunktion von n Cooperpaaren
 ohne Restriktion $k > k_F$

symmetrische Symmetrie der Paarwellenfunktion
 kein Bahndrehimpuls

totale Paarwellenfunktion antisymmetrisch
 durch antisymmetrischen Spin Singlet $\phi(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$
 $\cdot \Psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

N -Elektronenwellenfunktion

$$\Psi(1, 2, 3, \dots, N) = P \{ \phi(1,2) \phi(3,4) \dots \phi(N-1,N) \}$$

mit Operator P der Produktwellenfunktion
 $\{ \dots \}$ antisymmetrisch bezüglich Vertauschen von
 je 2 Elektronen macht

Nachweis des Gaps und der Cooperpaare:

- Tunneln zwischen Supraleiter mit $T < T_c$ und normalem Metall, getrennt durch Isolator. Durch Anlegen einer äußeren Spannung ^{an Supraleiter} kann Fermienergie des Metalls auf Höhe der unbesetzten Zustände im Supraleiter gebracht werden, sobald $eU = \Delta \sim$ fließt Tunnelstrom
exp. Bestimmung von Δ → Fig 6-6

Makroskopische kohärente Wellenfunktion der Cooperpaare direkt beobachtbar durch Quantisierung des magn. Flusses durch von Supraleitendem Ring umschlossene Fläche

eindeutige Wellenfunktion erfordert für einen Umlauf um Ring Phasenänderung $2\pi n$ (n positiv ganzzahlig)

$$\leadsto \Phi = n \Phi_0 \text{ mit elementarem Flussquantum } \frac{2\pi\hbar}{q} = \frac{h}{q} \text{ und } q = 2e$$

experimentell bestätigt, kühle Ring in Magnetfeld bis supraleitend, $\sim B=0$ messe Fluß $\Phi = 1, 2, 3 \frac{h}{2e}$
 $2 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$

Deaver, Fairbank 1961

Warum Supraleitend?

Strom ~~durch~~ Kondensat von Cooperpaaren
 $\hat{=}$ gesamtes Kondensat wird im E-Feld
 beschleunigt, alle Cooperpaare haben jetzt
 statt Paarimpuls $q=0$ endlichen
 Paarimpuls $\hbar \vec{q} = 2m \vec{v}$
 jedes Paar trägt zu Stromdichte $\vec{j}$ bei

$$\vec{j} = -\frac{n_s}{2} 2e \frac{\hbar \vec{q}}{2m} \quad \frac{n_s}{2} \text{ Dichte der Paare}$$

der kohärente Zustand erlaubt nicht, daß
 ein einzelnes Cooperpaar ein Phonon streut
 und seinen Impuls ändert ohne daß
 alle anderen Paare ihn auch ändern
 Grundzustandswellenfunktion des
 Kondensats müßte sich ändern

- allerdings: durch genügend starkes
 externes Feld ist das möglich