

5. Bindung und Auslegung von Atomkernen

5.1. Bindungsenergie und Tröpfchenmodell

Bindungsenergie definiert als

$$B(Z, N) = Z M_H c^2 + N M_n c^2 - M_{H, Z} c^2$$

\swarrow Masse Wasserstoffatom \swarrow Masse Neutron \swarrow Masse Atom mit N Neutronen und Z Protonen

M wird üblicherweise ausgedrückt in Einheiten von $1/12$ der Masse eines ^{12}C -Atoms $\equiv 1 \text{ amu}$

$$1 \text{ amu} \cdot c^2 = 931.502 \text{ MeV}$$

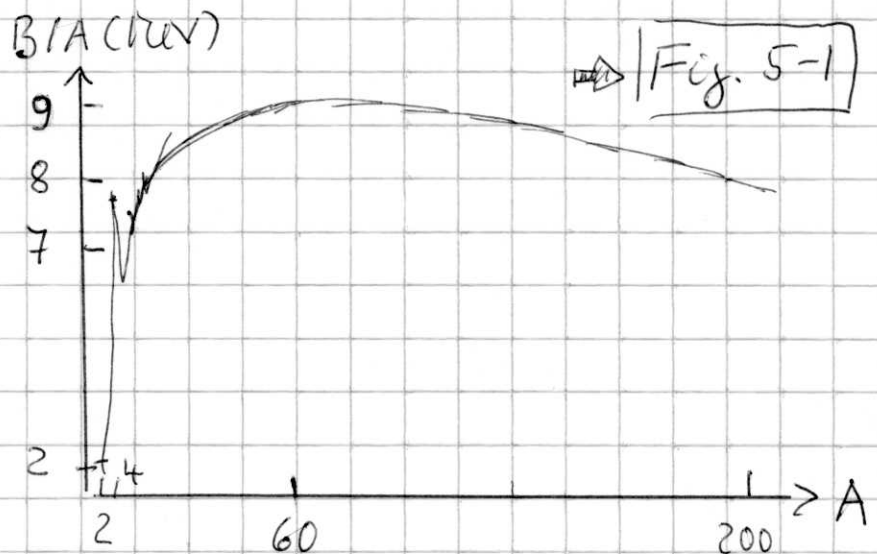
$$M_H = 1.0078 \text{ amu}$$

$$M_n = 1.0087 \text{ amu}$$

$$\text{He: } B(2, 2) = 2 \cdot 1.0078 + 2 \cdot 1.0087 - 4.0026 = 0.0304 \text{ amu}$$

$$\hat{=} 28.3 \text{ MeV} \quad \text{oder} \quad B/A = 7.1 \text{ MeV}$$

Systematik der Bindungsenergien



erste Beschreibung der Systematik durch C.F. von Weizsäcker 1935, N. Bohr 1936 basierend auf:

$$\text{Kernradius} \approx 1.2 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$

Kerne haben wie Flüssigkeit etwa konstante Dichte

von 0.17 Nucleonen fm^{-3} , offensichtlich Reichweite der Kernkraft kurz \leftrightarrow Sättigungscharakter

in Analogie zu Atomen / Molekülen in Flüssigkeiten kann man einfache Parametrisierung der Bindungsenergie finden:

$$B(\text{MeV}) = b_v \cdot A - b_s A^{2/3} - b_c Z^2 A^{-1/3} - b_{\text{sym}} (N-Z)^2 / A + b_p A^{-1/2}$$

"Weizsäcker-Formel"

→ 5-2

- $b_v A$ Volumenterm: B/A konstant, B wächst mit Volumen, $b_v = 15.85 \text{ MeV}$
- $b_s A^{2/3}$ Oberflächenterm: Nukleonen an der Oberfläche haben weniger Bindungspartner, sind daher weniger gebunden \propto zu Oberfläche $R^2 \propto A^{2/3}$
 $b_s = 18.34 \text{ MeV}$ reduziert Bindung, also negativ
- $b_c Z^2 A^{-1/3}$ Coulombterm: Coulombabstoßung der Z Protonen

für einheitlich geladene Kugel mit Radius R_0

$$B_c = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(r) \rho(r')}{|r-r'|} d^3r d^3r' = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{8\pi^2}{3} \frac{4}{5} R_0^2$$

$$\text{mit } \rho = \frac{3Ze}{4\pi R_0^3} \text{ und } R_0 = r_0 A^{1/3} \approx B_c = \frac{3Z^2 e^2}{5r_0 A^{1/3}}$$

$$\text{mit } r_0 = 1.2 \text{ fm} \approx b_c = 0.717 \text{ MeV}$$

- $b_{\text{sym}} (N-Z)^2 / A$ Symmetrieterm: Pauliprinzip und diskrete Energielevels im Potentialtopf (s.u.)
→ möglichst günstig: gleiche Anzahl von Z und N
 $b_{\text{sym}} = 23.7 \text{ MeV}$ Asymmetrie reduziert Bindung \sim "-"
- $b_p A^{-1/2}$ Paarungsterm: gg -Kerne stärker gebunden als ug und gu und diese wieder stärker als uu
für gg $b_p = 11.5 \text{ MeV}$, für uu $b_p = -11.5 \text{ MeV}$, für ug, gu $b_p = 0$

$B(N, Z)$ bestimmt, wie stark Kerne gebunden sind
 wandelt sich weniger stark gebunden als ^{12}C , wo
 $B/A = 1 \text{ amu} \cdot c^2$, viele sind stärker gebunden
 definieren sogenannten Massenüberschuss B_{ex} -defizit
 $\Delta = M_{N, Z} c^2 - A \cdot \text{amu} \cdot c^2$ (tabelliert)

Für jedes Element Z gibt es ein Isotop mit $A=Z+N$
 das am stärksten gebunden ist (Linie der
 Stabilität, siehe Übersichtstafel)

- für kleines Z : $N=Z$ bevorzugt (Sym. Energie)
- für grosses Z : Coulombenergie dominiert $\sim N > Z$
- Ende des Periodensystems: $??$ $^{272}_{110}\text{Ds}$, $^{277}_{112}\text{Cp}$, $^{289}_{114}\text{X}$, ...
- für jedes Element gibt es 1 oder mehrere stabile
 Isotope sowie eine ganze Reihe von instabilen
 aber gebundenen Isotopen; typischerweise β -Zerfall
 zu benachbarten Elementen
- Region der gebundenen Kerne limitiert durch sog.
Proton- bzw. Neutron-Drip-Linie; jenseits zer-
 fallen Kerne stark in $< 10^{-18} \text{ s}$ (Lage ist
 sehr wichtig für Elementsynthese in Sternen)

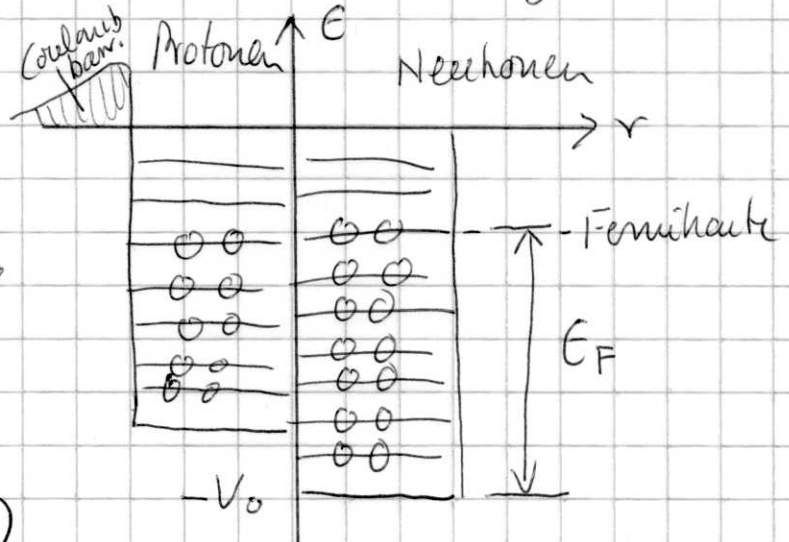
→ Fig. 5-2a

5.2. Fermigas-Modell

Kern hat auch viele Eigenschaften, die leicht
 durch ein Modell unabhängiger Teilchen in
 einem Potential beschrieben werden als durch
 starkes WW Flüssigkeitstropfen. Einfachstes Modell:

Nukleonen voneinander unabhängig, Kern ist
Fermigas von n Nukleonen, die sich frei
in Kugel mit Radius $R = r_0 A^{1/3} \approx 1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$
bewegen. Da sie Fermionen sind und liegen sie
dem Pauli Prinzip

2 Potentialtöpfe,
einer für p , einer für n
jeder enthält endlich
Anzahl von Teilchen
niveaus, jedes besetzt
mit 2 Teilchen
(Spin nach oben/unten)



Temp. so niedrig daß alle Nukleonen in den
niedrigst möglichen Zuständen sind. Zustände
bis zu einer bestimmten max. kin. Energie,
der Fermienergie sind gefüllt. Anzahl von
Zuständen mit Impulsen zwischen 0 und p_{max}
folgt aus der Integration

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_{\text{max}}} \int_0^{p_{\text{max}}} d^3x d^3p = \frac{V p_{\text{max}}^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad \text{mit } V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A$$

jeder Zustand mit 2 Nukleonen besetzt, also
für Neutronen

$$n = N/2 = \frac{4\pi r_0^3 A p_{F,N}^3}{3 \cdot 6\pi^2 \hbar^3} \quad \approx \quad p_{F,N} = \frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi N}{4A}}$$

für Protonen

$$n = Z/2 = \frac{4\pi r_0^3 A p_{F,Z}^3}{3 \cdot 6\pi^2 \hbar^3} \quad \approx \quad p_{F,Z} = \frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi Z}{4A}}$$

für z.B. $N=2$ $p_{F,1} = p_{F,2} \approx 250 \text{ MeV/c}$

$$T_{\text{max}} = E_F \approx 33 \text{ MeV}$$

mittlere kin. Energie $\langle T \rangle = \frac{\int_0^{p_{\text{max}}} E d^3p}{\int_0^{p_{\text{max}}} d^3p} = \frac{3}{5} T_{\text{max}} \approx 20 \text{ MeV}$

5.3. Schalenmodell

um mehr über Kerneigenschaften zu verstehen, z.B. Quantenzahlen und Energien diskreter gebundener Zustände, muß man Schrödingergleichung für geeignetes Potential lösen \approx Schalenmodell

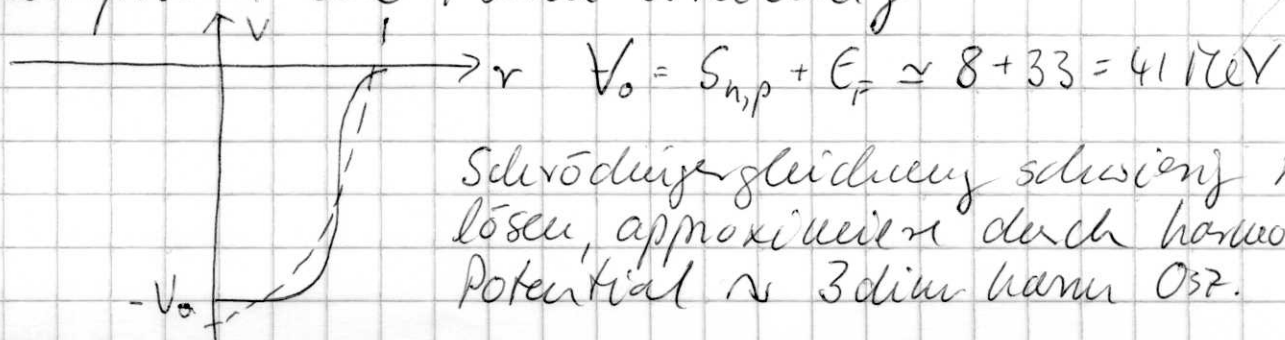
Evidenz für Schalenstruktur: Abweichung der Bindungsenergien von Weizsäcker-Formel, Proton- und Neutronseparationsenergien, Ausgabelinie von 1. angeregten Zust. in gg-Kernen (E_{2+}), ----

\rightarrow magische Zahlen bei denen Eigenschaften sich rel. scharf ändern $Z, N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$

räumliche Verteilung des Potentials \Rightarrow Figs 5.3-5.5

muß wegen kurzer Reichweite der Kernkraft der (Ladungs-)Dichte Verteilung folgen

Woods-Saxon Potential $V = -V_0 \left(1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \right)^{-1}$
entspricht der Fermi-Verteilung



$$V_0 = S_{n,p} + E_F \approx 8 + 33 = 41 \text{ MeV}$$

Schrödingergleichung schwierig zu lösen, approximieren durch harmonisches Potential \approx 3dim harmon Osz.

$$V(r) = -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r^2 - R_0^2)$$

mit $\hbar \omega_0 \approx 41 \text{ MeV} \cdot \text{A}^{-1/3}$ Zustände $E_N = \hbar \omega_0 \left(N + \frac{3}{2}\right) - V_0$
 mit $N = 2(n-1) + l \rightarrow$ Bahndrehimpuls $l = N, N-2, \dots, 0$ oder 1
 \hookrightarrow Anzahl rad. Knoten $n = 1, 2, 3, \dots$

Entartung der Oszillatorzustände $g(N) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$
 jeder Zustand mit $2g(N)$ Protonen oder Neutronen
 gefüllt (Spin)

\rightarrow magische Zahlen 2, 8, 20, 40, 70, 112 Probleme!

Kastenpotential oder korrektes Woods-Saxon Pot.

lösen das Problem nicht

\rightarrow Fig. 5-6

Aber: bisher Kernspin, bzw. Kopplung Spin-
 Bahndrehimpuls für Energieniveaus vernachlässigt
 Term $f(r) \hat{l} \cdot \hat{s}$ führt zu Aufspaltung der sonst entarteten
 Zustände $j = l \pm \frac{1}{2}$

Exp.: Struktur von p oder n an ${}^4\text{He}$ populiert ungeb.

Grundzustand bzw. angereg. Zust. von ${}^5\text{Li}$ bzw. ${}^5\text{He}$

${}^4\text{He}$: 1s gefüllt, d.h. beginne 1p zu füllen $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
 Drehimpuls aus Winkelverteilung, fülle

in beiden Fällen Grundzustand mit $J^\pi = \frac{3}{2}^-$
 und 1. angereg. Zustand mit $J^\pi = \frac{1}{2}^-$ 4.6 bzw. 7 MeV
 im Grundzustand \rightarrow stark attraktive Spin-Bahn
 WW.

Wichtig von Haxel, Jensen, Suess und Goepfert-
 Mayer realisiert (1949): Schalenmodell mit

adäquater Spin-Bahn Kopplung \rightarrow korrekte magi-
 sche Zahlen, Drehimpulse, Angereg. Energien

Bindungsenergien, mag. Momente

\rightarrow Fig. 5-7, 8

5.4. Kernspaltung

Bündelungsenergie in schweren Kernen ($A \geq 230$) macht es energetisch günstiger, in 2 kleinere Kerne aufzuspalten ($B/A \approx 7.5 \text{ MeV}$ im Vgl. mit 8.5 MeV)

d.h. es können pro Kern 200-250 MeV gewonnen werden


aber; die meisten schweren Kerne sind entweder stabil (^{208}Pb) oder zerfallen durch α -Zerfall

Grund: Coulombbarrieren sehr hoch

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1} Y + {}^{A_2}_{Z_2} Z \quad \text{mit } Z_1 \approx Z_2 \quad V_{\text{Co}}^{\text{fission}} = \frac{1.44 \text{ MeV fm } Z_1 Z_2}{r} \approx \frac{1.44 \text{ MeV fm } Z^2}{4r}$$

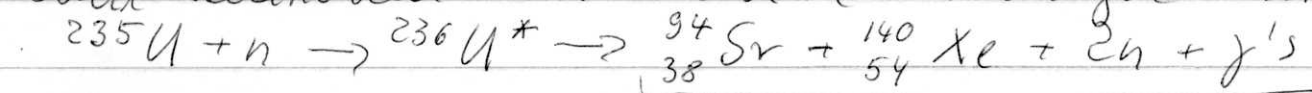
im Vgl mit $V_{\text{Co}}^{\alpha} = \frac{1.44 \text{ MeV fm } Z^2}{r}$ Verhältnis $Z:8 \geq 10$

alternative Betrachtungsweise: Kern muß sich stark deformiert werden bis Coulombabstoßung 2 Hälften auseinander treibt. Sphärischer oder annähernd sphärischer Kern muß Oberflächenspannung überwinden

 Fig. 5-9


die Energie muß aufgebracht werden \rightarrow induzierte Spaltung
entdeckt 1938 durch Haber, Straßmann, Lise Meitner
Bombardierung von ^{235}U mit Neutronen führt zur Produktion von Ba (Spaltfragment)

wenn Neutronen "thermisch" (kin. Energie $\approx kT$):



eine von vielen Möglichkeiten

immer 2 Spaltfragmente + (\approx) 2,5 Neutronen + Photonen

die zusammen 200-250 MeV Energie freisetzen  Fig. 5-10

83% kin. Energie Spaltfragmente, 11% Anregungsenergie

Spaltfragmente, 2.5% kin. Energie Neutronen, 3.5% Photonen

die emittierten Neutronen können weitere Spaltung induzieren, müssen dafür aber abgelenkt werden auf thermische Energie \rightarrow dann Kettenreaktion

Fig 5-10

wenn im Mittel 1 Neutron weitere Spaltung induziert: kritische Reaktion

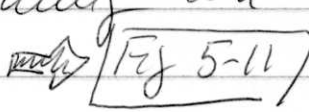
> 1 superkritisch, Beschleunigung
 < 1 subkritisch, Reaktion stirbt aus

Technologische Anwendung: Kernreaktor (Kernwaffen)
 kontrollierte Spaltung von $1g$ ^{235}U setzt soviel Energie frei wie Verbrennung von 2.6t Kohle ($\approx 25\text{MWh}$)

Techn. Gesichtspunkte:

- Minimierung Neutronenverlust
 "kritische Masse und Geometrie" (Oberfläche: Volumen)
 Vollkugel von 15kg U mit $r > 6\text{cm}$ ist kritisch
 angereichertes U; der größte Teil des natürlicheren U ist ^{238}U (99.3%) fängt Neutronen mit geringer Wirkungsquerschnitt ein und spaltet nicht
 braucht einige % ^{235}U
- Abbremsung (Moderierung) der Neutronen
 optimal Wasserstoff (H oder D) in Form von Wasser oder Kohlenstoff. Abbremslänge H_2O 5.6cm C 18.7cm
- Kontrolle der Reaktionsrate; je nach Bedarf muß ein Neutronabsorber weit / wenig weit im Reaktorkern gemacht werden. Steuerstäbe aus Cd oder B

- Wärme muß abtransport werden
 + typisch Wasser & Dampf & Antriebs Turbinen & Steam

1. Reaktor: Dez 1942 Univ Chicago G. Fermi & Mitarbeiter
 385 t Graphitblöcke in sphärischer Anordnung um
 40 t U & einige kW Energie; umgekehrt  Fig 5-11

natürlicher Reaktor von ca $2 \cdot 10^3$ Jahren im heutigen
 Gabun durch Wassereintrich in U-Lagerstätte (damals
 noch 3% ^{235}U in nat. U) genügend Neutronen;
 "braunte" ca. 200 000 Jahre

Nb.: selbes Prinzip der Neutronenvervielfachung trifft auf fast
 alle heute gebräuchlichen Reaktortypen (alle
 in Deutschland); nicht für sowjetische Graphit-
 moderierte Reaktoren vom Chernobyl Typ (16 in Betrieb)

6. Sterne und Kerne

6.1. Primordiale Elementsynthese

• ca $10 \mu\text{s}$ nach Urknall bei $T \approx 150 \text{ MeV} \approx 10^{12} \text{ K}$

findet ein Phasenübergang statt

Materie bestehend aus freien Quarks und Gluonen sowie
 e, ν, γ "kristallisiert aus" indem sich q und \bar{q}
 zu Hadronen verbinden \Rightarrow Fig. 6-11

Hadronen zerfallen schnell, es bleiben nur
 p, n, \bar{p}, \bar{n} übrig; wegen geringen Materieüberschusses
 bleiben auch $p\bar{p}$ und $n\bar{n}$ Annihilation von p und
 n übrig; solange T hoch genug (einige s)
 stehen diese im Gleichgewicht