Physik III - Übungsblatt 11
SS2006, Universität Heidelberg

Ausgabe am 6.7.2006
Besprechung am 13.7.2006

11.1 Quantenmechanisches Teilchen im Potentialtopf, Teil I

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen mit der Masse m im zeitlich konstanten eindimensionalen Potential ($V_0 > 0$; $a > 0$)

$$V(x) = 0 \qquad \text{für } x < -a$$
$$V(x) = -V_0 \qquad \text{für } -a \leq x \leq a$$
$$V(x) = 0 \qquad \text{für } x > a$$

Wir betrachten nur gebundene Zustände des Teilchens (Energie $E < 0$).

a) Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung für die drei Ortsbereiche getrennt auf.

b) Geben Sie jeweils die allgemeinen Lösungen der Schrödingergleichung an. Welches fundamental unterschiedliche Verhalten besitzen die Lösungen in den drei Bereichen. Beachten Sie dabei (insbesondere in den Bereichen $|x| < a$) , daß das Betragsquadrat einer Lösung der Schrödingergleichung als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert wird.

c) Kombinieren Sie nun die Lösungen in den drei Bereichen zu einer Gesamtwellenfunktion. Welche Bedingungen müssen an den Stellen $x = \pm a$ erfüllt sein ?

11.2 Quantenmechanisches Teilchen im Potentialtopf, Teil II

a) Kommen wir jetzt zur Lösung der der Schrödingergleichung aus 11.1.
Da das Potential eine gerade Funktion in der Koordinate x ist, d.h. $V(x) = V(-x)$, lassen sich die Lösungen für die Wellenfunktionen $\psi(x)$ in zwei Gruppen teilen, für die $\psi(-x) = \psi(x)$ ('gerade' Lösungen) bzw. $\psi(-x) = -\psi(x)$ ('ungerade' Lösungen) gilt.
Wir betrachten den Fall gerader Lösungen. Zeigen Sie, daß dann die Lösung zu einer transzendenten Gleichung führt der Form

$$\tan z = ((z_0/z)^2 - 1)^{1/2} \quad ; \quad z = a\,(2m\,(E + V_0))^{½} / \hbar \quad ; \quad z_0 = a\,(2m\,V_0)^{½} / \hbar$$

b) Lösen Sie diese Gleichung numerisch oder graphisch und geben Sie die entsprechenden Eigenwerte E an für

$$m = 938\ \mathrm{MeV}/c^2\ ;\quad a = 5 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}\ ;\quad V_0 = 50\ \mathrm{MeV}\ ,$$

was in etwa der Situation eines Nukleons im Atomkern entspricht.

11.3 Rotation eines quantenmechanischen Teilchens

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m rotiert in konstantem Abstand r um eine feste Achse (hier die z –Achse). Die Schrödingergleichung, dargestellt in Polar-Koordinaten, ergibt sich dann zu (wenn Sie wollen, können Sie versuchen das nach zu vollziehen):

$$d^2\psi(\varphi) / d\varphi^2 \ + \ 2\,\theta\, E / \hbar^2\ \psi(\varphi) = 0$$

mit dem Azimuthwinkel φ und dem Trägheitsmoment θ des Teilchens.
Welche Energien kann das System annehmen ? Dabei hilft, zu beachten, daß die Wellenfunktion eindeutig sein muß.
Die resultierende Formel gilt auch für zweiatomige Moleküle (H_2, O_2 ..), wenn Sie deren Trägheitsmoment einsetzen. (Abstand der beiden Atome ca. 10^{-8} cm) . In welchem Spektralbereich etwa liegt das reine Rotationsspektrum solcher Moleküle ?