Physik III - Übungsblatt 10
SS2006, Universität Heidelberg

Ausgabe am 29.6.2006
Besprechung am 6.7.2006

10.1 Potentialschwelle

Ein Teilchen der Energie E und Masse m läuft von $x = -\infty$ kommend gegen eine Potentialschwelle der Höhe U in $0 \leq x \leq a$ an. Die Lösung u(x) der Schrödingergleichung lautet dann:

$$
\begin{array}{ll}
e^{ikx} + Ae^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\
B_1 e^{i\kappa x} + B_2 e^{-i\kappa x} & \text{für } 0 \leq x \leq a \\
Ce^{ikx} & \text{für } x > a
\end{array}
$$

Dabei ist die Amplitude der einlaufenden Welle (beschrieben durch e^{ikx} für $x < 0$) willkürlich auf 1 normiert.

a) Tunneleffekt

Betrachten Sie zunächst den Fall E < U . Dann erfordert die Lösung der Schrödinger-gleichung: $k = (2mE)^{½} / \hbar$ und $\kappa = (2m(U-E))^{½} / \hbar$.

Berechnen Sie $|A|^2$ und $|C|^2$. Wie sind diese Größen zu interpretieren ?

Welchen Wert nimmt $|A|^2 + |C|^2$ ein, und warum muß dies so sein ?

Geben Sie für $|C|^2$ eine Näherungsformel für $\kappa a >> 1$ an und lesen Sie daraus ab, in welchen zwei Grenzfällen Totalreflexion auftritt.

b) Resonanzen

Betrachten Sie jetzt den Fall E > U . Dann erfordert die Lösung der Schrödinger-gleichung: $k = (2mE)^{½} / \hbar$ und $\kappa = i\,(2m(U-E))^{½} / \hbar$.

Berechnen Sie wieder $|A|^2$ und $|C|^2$.

Für welche ("Resonanz-") Energien E erhalten Sie das klassische Ergebnis $|C|^2 = 1$?

c) Transmission

Tragen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit $|C|^2$ für den Energiebereich $0 \leq E \leq 5U$ als Funktion von E/U graphisch auf.

10.2 Wellenfunktion eines schwach gebundenen Systems

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einer Potentialwanne: Die potentielle Energie sei konstant $V(x) = V_0 < 0$ zwischen den Koordinatenwerten $x= -L$ und $x = +L$, und in den übrigen Bereichen $x < -L$ und $x > +L$ sei $V(x) = 0$. Mit Hilfe der Schrödingergleichung kann man die Energien der gebundenen Zustände und die Wellenfunktionen berechnen. Zur Vereinfachung sei hier die Wellenfunktion des energetisch tiefsten Zustands für die Parameter $L = 10^{-15}$ m, m = 938 MeV angegeben, die einem bestimmten Wert von V_0 entspricht.

$$
\begin{array}{lll}
\psi(x) = C \cos(kx) & \text{für } -L \leq x \leq +L & ; \quad k \cdot L = \pi/6 \\
\psi(x) = C' \exp(-Kx) & \text{für } x > +L & ; \quad K = k / 3^{½} \\
\psi(x) = C' \exp(+Kx) & \text{für } x < -L & \\
C' = C \cos(kl) \exp(KL) & &
\end{array}
$$

a) Prüfen Sie durch Einsetzen in die Schrödingergleichung nach, daß es sich hier tatsächlich um eine Lösung handelt.
b) Überprüfen Sie, ob die angegebene Lösung an der Stelle $x = L$ das korrekte Stetigkeitsverhalten besitzt (Funktionswert und Ableitung).
c) Ermitteln Sie rückwärts, wie groß die Gesamtenergie und die Potentialkonstante V_0 sind. Erwartet man die Existenz eines angeregten gebundenen Zustands (nur qualitative Diskussion) ?

10.3 Quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeit
a) Berechnen Sie für die in Aufgabe 10.2 angegebene Wellenfunktion die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im gesamten Bereich ($-\infty < x < +\infty$) und bestimmen sie aus der Bedingung, dass sie = 1 sein muss, den Faktor C. (Nützlich ist die Relation $\cos^2(kx) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2kx))$.)
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält sich das Teilchen außerhalb des Gebiets mit dem Potential V_0 auf, was in der klassischen Physik gar nicht möglich wäre?