

6. Rutherford - Bohr'sches Atom-Modell

6.1. Wiederholung allgemeine Eigenschaften des Atoms

a) generell sind Atome stabil

b) Atome bestehen aus Atomkern (zus. gesetzt aus Protonen und Neutronen) und Elektronen, die Atomkern umgeben. Wir werden hier sehen, woher wir das wissen. Atome sind neutral
Atom wird durch Coulombkraft gebunden
Potential

$$V_e = \underbrace{-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}}_{1.44 \text{ eVnm}} \frac{z}{r}$$

elektrostat. pot. Energie zwischen Atomkern mit Ladung ze und einem Elektron mit Ladung e im Abstand r
 $= 1.44 \text{ keV fm}$ wird in Zukunft nur als " e^2 " geschrieben

c) Typische Grösse: $1 - 10 \text{ \AA} = 10^{-10} - 10^{-9} \text{ m}$

(werden wir auch in diesem Kapitel sehen)
Wellenlänge des sichtbaren Lichts viel zu lang, um Atom aufzulösen. Siehe aber Bragg-Streuung

$$pc = E \approx \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eVnm}}{0.1 - 1 \text{ nm}} = 1. - 10. \text{ keV}$$

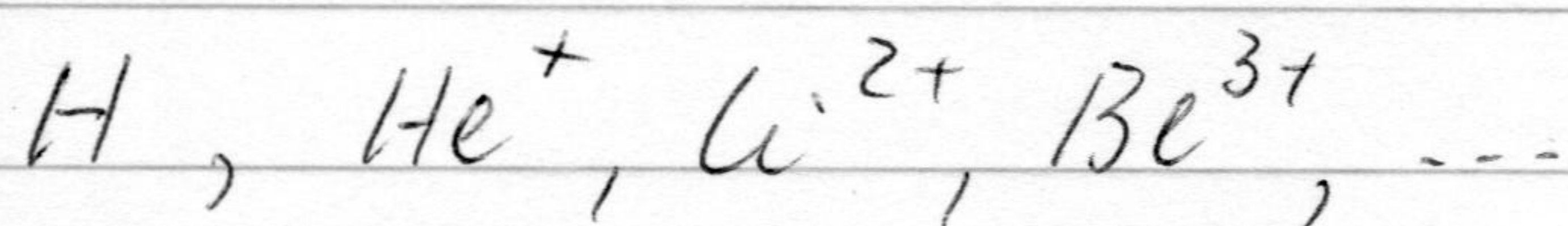
X-ray oder Röntgenstrahlen

(oder Rastertunnelmikroskop)

d) Atome können durch Absorption von elektromagnetischer Strahlung geeigneter Energie angeregt werden. Generell kühlen sie sich schnell wieder ab. Dabei werden Photonen emittiert.

mit diesen Punkten befassen wir uns in den nächsten Kapiteln

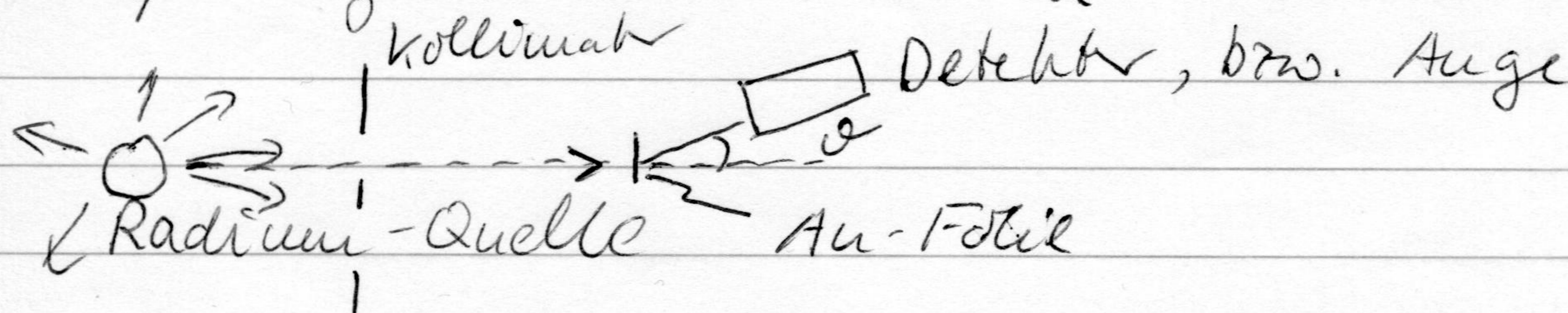
Zunächst wir in Kap. 6 ein 'klassisches' Modell, das Bohrmodell, dann quantenmechanische Lösung (Schrödingergl.) in Kap. 7. Dabei befassen wir uns, um Problem zu vereinfachen, nur mit Atomen bestehend aus Atomkern und einem Elektron, also Wasserstoff und wasserstoffähnliche Atome:



6.2. Rutherford - Streuung

Information über Grösse und Form geladener Objekte wird generell erhalten durch Streuung geladener Teilchen und Messung der Winkelverteilung. Erst Fall hier: Streuung von α -Teilchen an Atomkernen, die sogenannte Rutherfordstreuung.

Auf Vorschlag von E. Rutherford führten Geiger und Marsden um 1909 Streuexperimente durch in denen Alphateilchen (He^{2+}) auf eine Goldfolie geschossen wurden.



Sie machten folgende Beobachtungen:

- die meisten Alphateilchen gehen ohne Ablenkung durch die Folie, d.h. bei $\vartheta = 0^\circ$

b) der mittlere Streuwinkel ist sehr klein:

$$\langle \vartheta \rangle = \int_0^{180^\circ} N(\vartheta) \vartheta d\vartheta \approx 1^\circ$$

c) einige, wenige Alphateilchen werden jedoch in sehr große Winkel gestreut; typischerweise 1 in 10^4 geht in Winkel $\vartheta > 90^\circ$.

Schlüsse daraus: Materie ist lose gepackt, aber gelegentlich trifft Alphateilchen auf ein sehr massives Streuzentrum, so daß es ^{sgw} in Rückwärtswinkel gestreut werden kann.

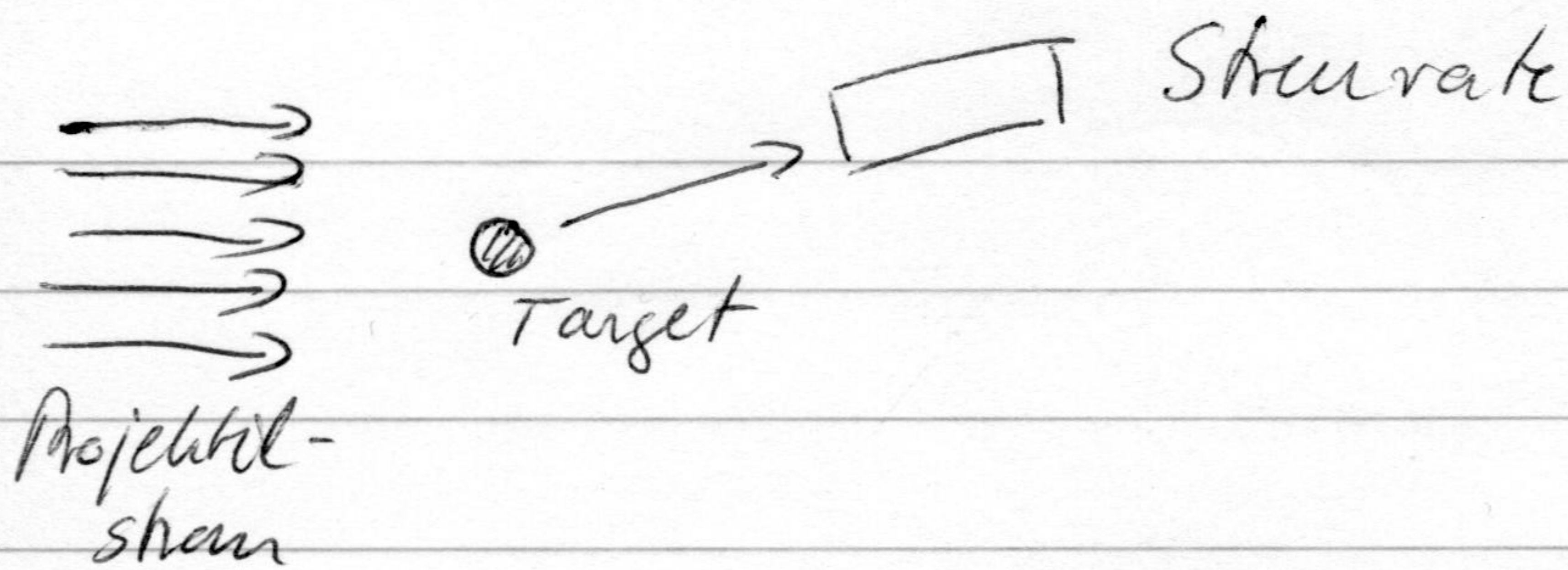
Das kann nicht Streuung an Elektronen sein da $m_e \approx \frac{1}{8000} m_\alpha$. Streuzentrum muß massiver als α -Teilchen sein. \rightarrow führt zu

Postulation des Rutherford Modells des Atoms: der grösste Teil der Masse und die gesamte positive Ladung sind in einem "Atomkern" konzentriert. Grösse $10^{-15} - 10^{-14} \text{ m} = 1 - 10 \text{ fm}$, also sehr klein. Dieser ist von \approx Elektronen umgeben, die den grössten Teil des Volumens eines Atoms füllen.

(z.B. Thompson Modell ausgeschlossen: Pudding aus Protonen/Neutronen in dem Elektronen wie Rosinen verteilt sind)

Quantitative Beschreibung der Streuung:

beachte zunächst Strom von Projektilteilchen die eine grosse Fläche überstrichen auf der sich 1 Targetteilchen befindet



einfallende Rate $R_i \left(\frac{\text{Projektilteilchen}}{\text{Zeiteinheit}} \right) = \frac{dN_i}{dt}$

einfallender Fluß $\Phi_i = \frac{R_i}{A} = \frac{dN_i}{A dt}$ A : Stahlquer-
schnittsfläche

Rate der gestreuten Teilchen $R = \frac{dN}{dt}$

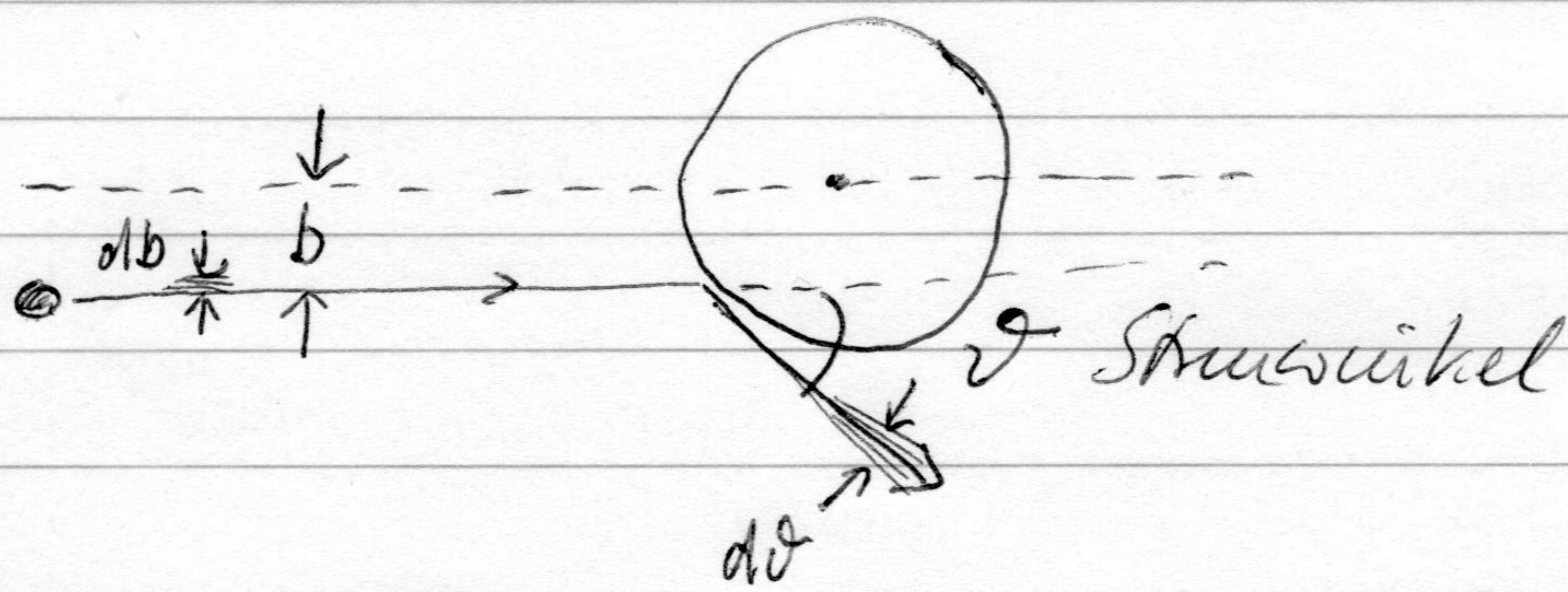
Streuwahrscheinlichkeit wird gemessen durch den sogenannten Streuquerschnitt oder Wirkungsquerschnitt σ , so daß

$R/R_i = \sigma/A$ σ hat die Dimension einer Fläche; ist die Fläche, die 'aktiv' zur Streuung beiträgt.

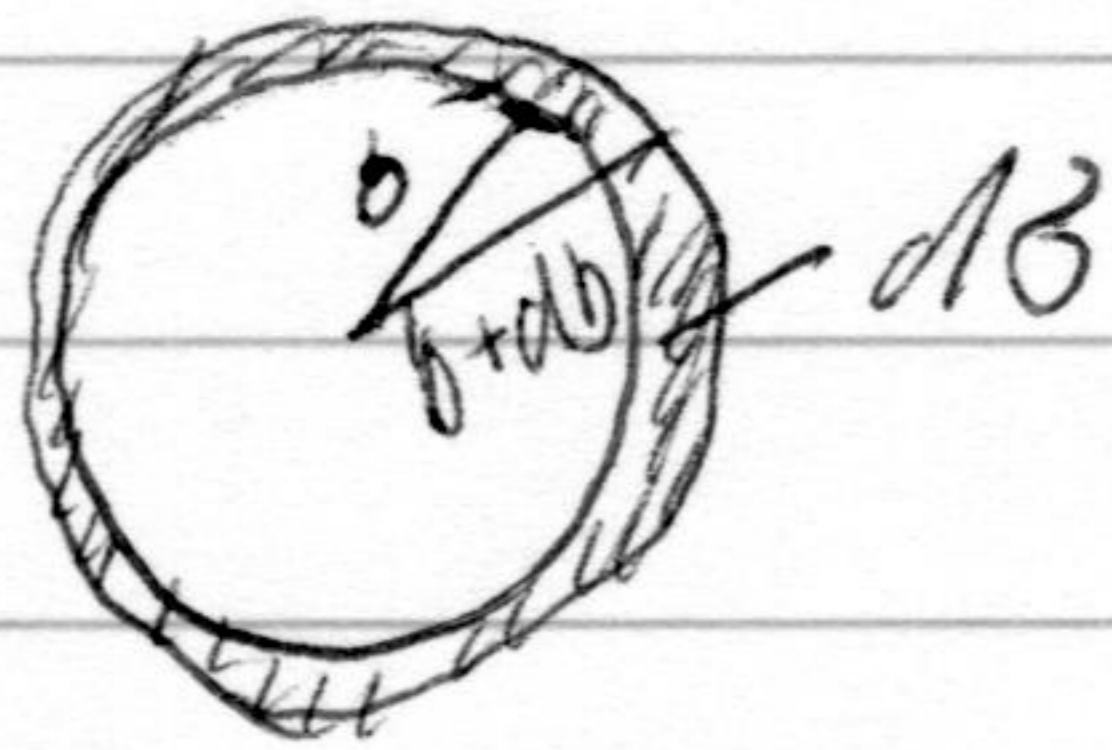
Zunächst einmal würden wir sagen, die geometrische Querschnittsfläche des Targetteilchens.

Werden später sehen: Wenn wir spezifischer sind wird die Aussage, was passiert, wenn Projektil Target trifft, verliert σ diese einfache geometrische Bedeutung.

Die Geometrie der Streueigenschaft wird durch den Stoßparameter b definiert: Abstand der Projektiltrajektorie vom Zentrum des Targetteilchens



für Stoßparameter zwischen b und $b+db$ ist der Wirkungsquerschnitt gegeben als die Fläche eines Rings mit innerem Radius b und äußerem Radius $b+db$, also $\delta = 2\pi b db$



Teildien, die mit Stoßparameter b einfallen, werden in Winkel $\vartheta(b)$ gestreut (Zusammenhang weit unten).

$$\frac{dR}{d\vartheta} = \Phi_i \frac{d\delta}{d\vartheta} = \Phi_i 2\pi b \frac{db}{d\vartheta}$$

da Messung üblicherweise einen Raumwinkel $d\Omega$ überdeckt ist üblicher

$$\frac{dR}{d\Omega} = \Phi_i \frac{d\delta}{d\Omega} = \frac{\Phi_i 2\pi b}{d\varphi \sin\vartheta} \frac{db}{d\vartheta}$$

Problem am besten in Kugelkoordinaten behandelt

$$\left. \begin{aligned} z &= r \cos\vartheta \\ x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

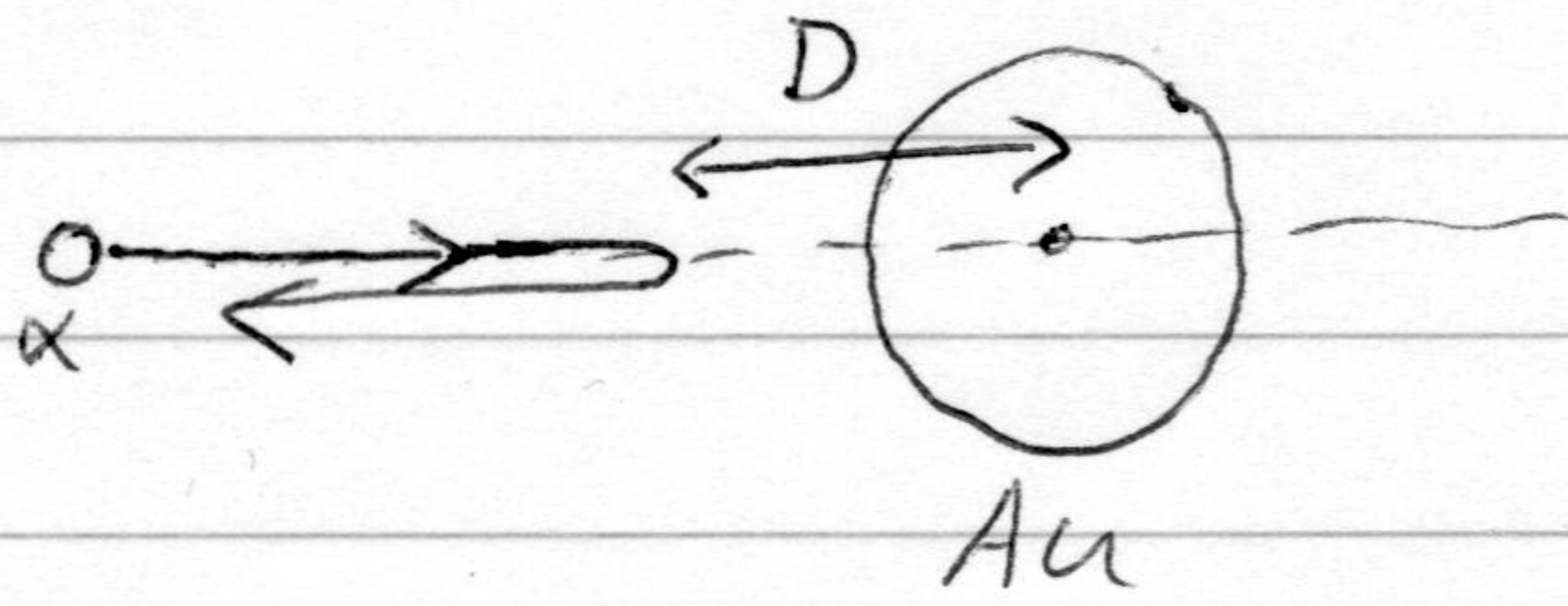
$$\text{Volumenelement } dV = dx dy dz = r^2 dr \underbrace{\sin\vartheta d\vartheta d\varphi}_{\text{Raumwinkel } d\Omega}$$

$$\text{Raumwinkel } d\Omega = r^2 dr d\cos\vartheta d\varphi$$

bei φ -Symmetrie

$$= 2\pi r^2 dr d\cos\vartheta$$

beachten wir zunächst Streueigenschaften bei $b=0$
(zentrale Stöße)



Projektil (α -Teilchen
näher rückt bis seine
anfängliche kinetische

Energie T_0 in potentielle (Coulomb) Energie
umgewandelt ist. Jetzt $T=0$, Abstopfung durch
Coulombpotential, α -Teilchen kehrt um und
erreicht bei unendlicher Entfernung wieder
kinetische Energie T_0 .

Umkehrpunkt: nächster Abstand D zwischen
Target und Projektil gegeben durch Energie-
erhaltung

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{e^2 z Z}{D} \quad \sim \quad D = \frac{e^2 z Z}{T_0}$$

z.B. α -Teilchen von $T_0 = 10 \text{ MeV}$ auf Goldkern
 $z = 2, Z = 79 \quad \sim \quad D = \frac{1.44 \text{ MeV fm} \cdot 2 \cdot 79}{10 \text{ MeV}} = 22.8 \text{ fm}$

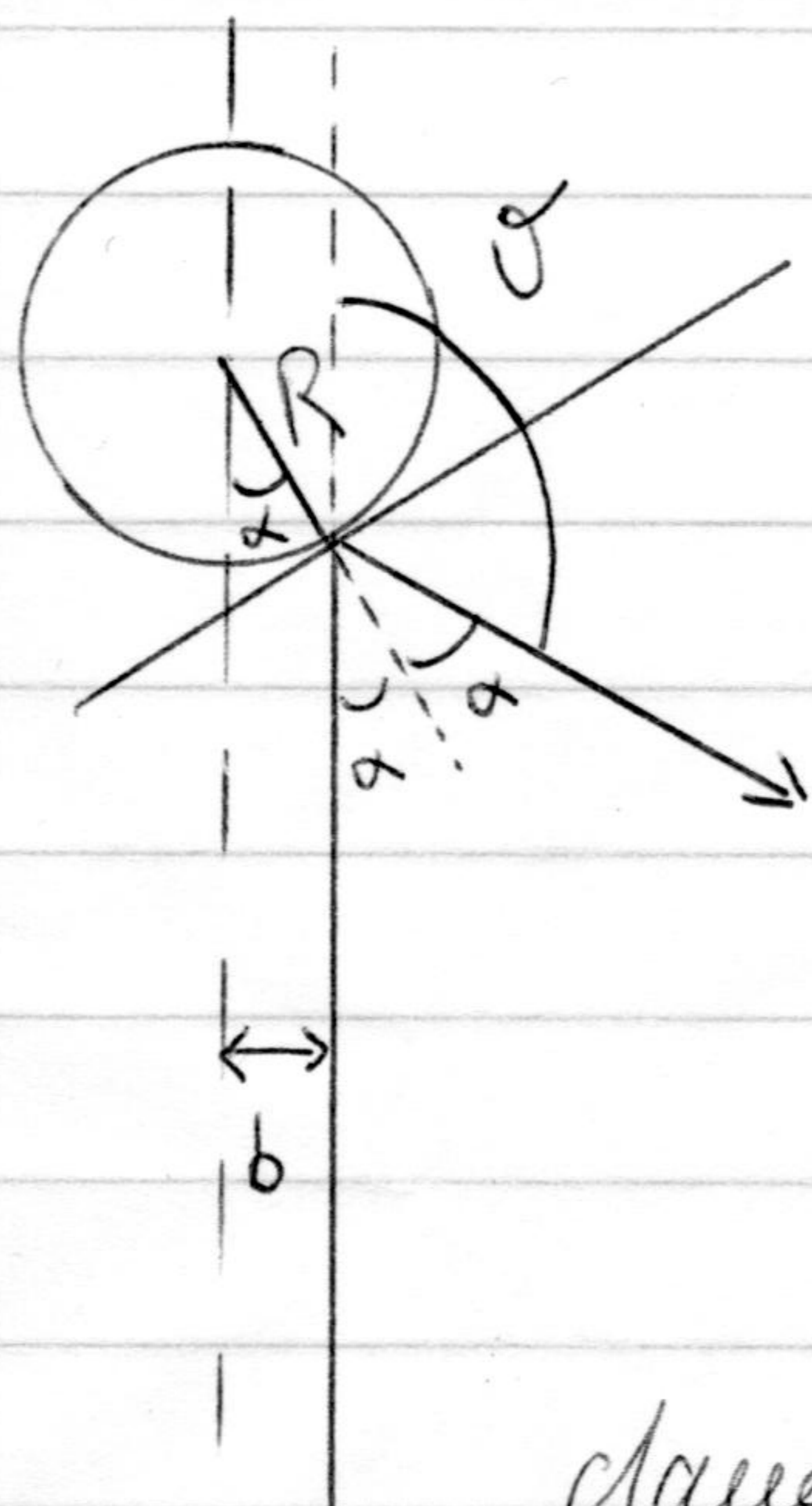
was passiert bei $b \neq 0$

analog zu Keplerbahn: α -Teilchen bewegen
sich auf Trajektorien, die durch Hyperbeln
gegeben sind (Coulombpotential hat dieselbe
Form wie Gravitationspotential)

Aus Energie und Drehimpulserhaltung
ergibt sich nächster Abstand und Streuwinkel.
(siehe Übungsaufgabe)

benötige Zusammenhang zwischen b und ϑ
um Streurate in Winkелеlement $d\Omega$ aus-
rechnen zu können, d.h. $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\frac{dR}{d\Omega}$

Illustration zunächst anhand von Stößen von Billiardkugeln: Streuwinkel gleich Einfallswinkel



$$\vartheta + 2\alpha = \pi \quad \text{und} \quad \frac{b}{R} = \sin \alpha = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\frac{db}{d\vartheta} = -\frac{R}{2} \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

R ist gemischt Abstand, zwei Kugeln genähern sich

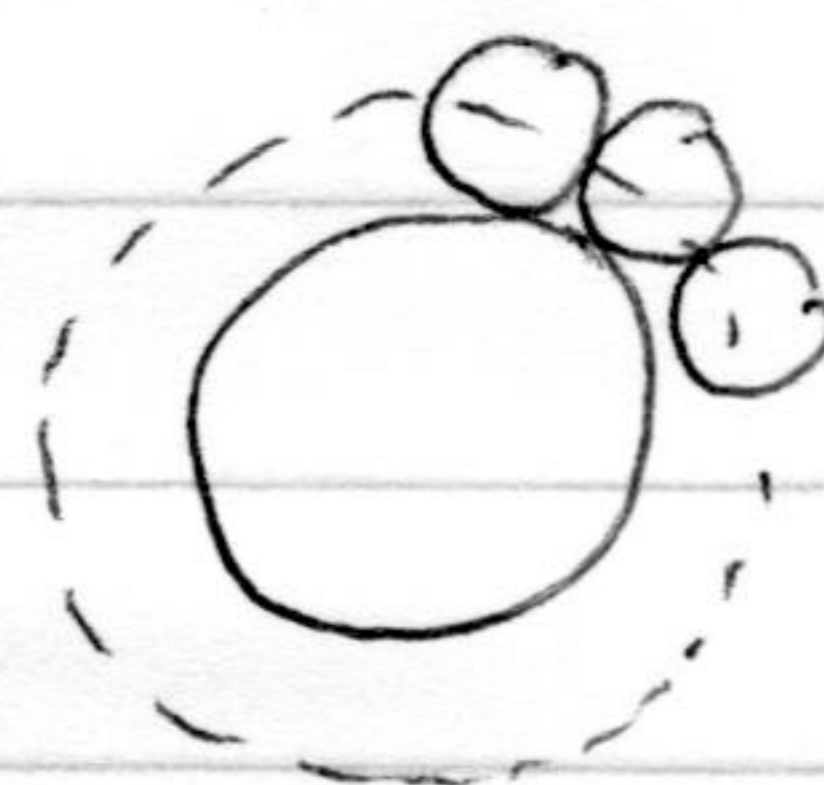
$$R = R_t + R_p$$

daneben wird
$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = 2\pi b \frac{db}{d\vartheta} = \frac{2\pi (R_t + R_p)^2}{2} \left(-\sin\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$\sigma = \pi (R_t + R_p)^2 \int_0^{\pi} \left(-\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta$$

$$= \pi (R_t + R_p)^2 \int_1^{-1} 2 \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \pi (R_t + R_p)^2$$

Fläche eines Kreises mit $R = R_t + R_p$
"geometrischer Streuquerschnitt"

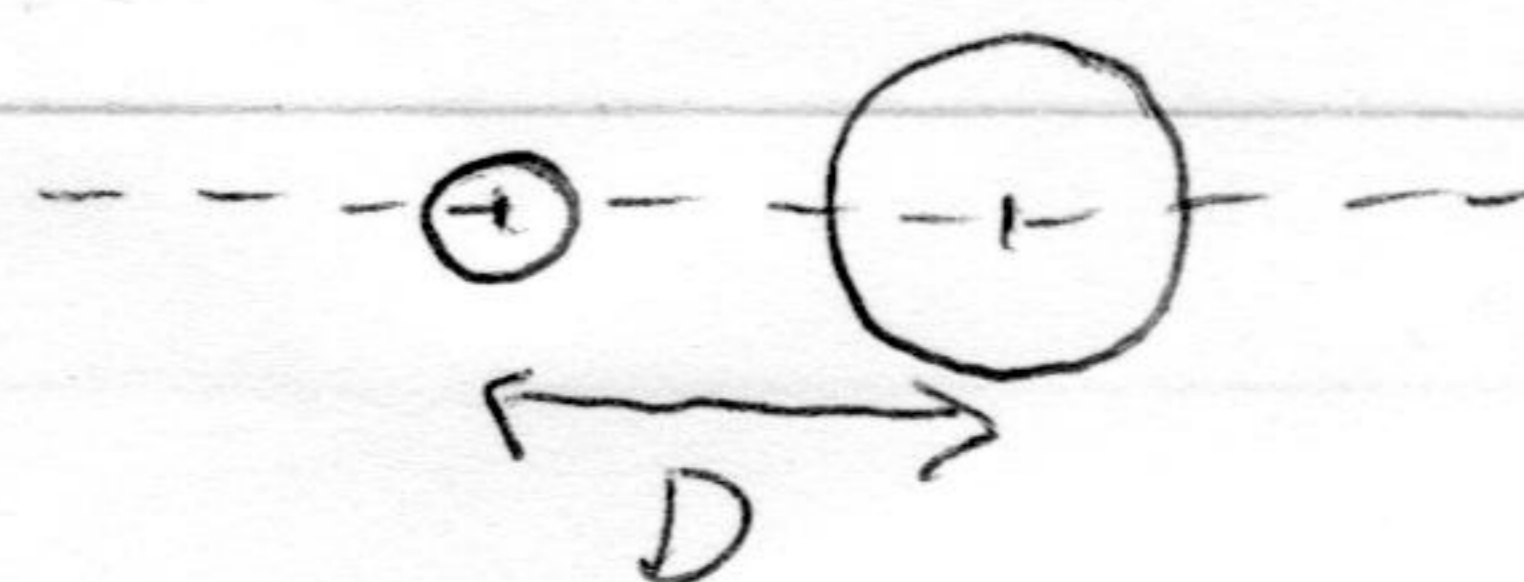


b) Streuung im Coulombfeld \leftrightarrow Rutherfordstreuung

\rightarrow Zusammenhang zwischen b und ϑ gegeben als

$$b = \frac{D}{2} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

D = wärlisk Abstand zwischen Target und Projektile bei zentralen Stoß ($b=0$)



für Beispiel von oben: 10 MeV α -Teilchen auf Gold

b (fm) ϑ α -Trajektorien sind Hyperbellen

5 133°

10 97°

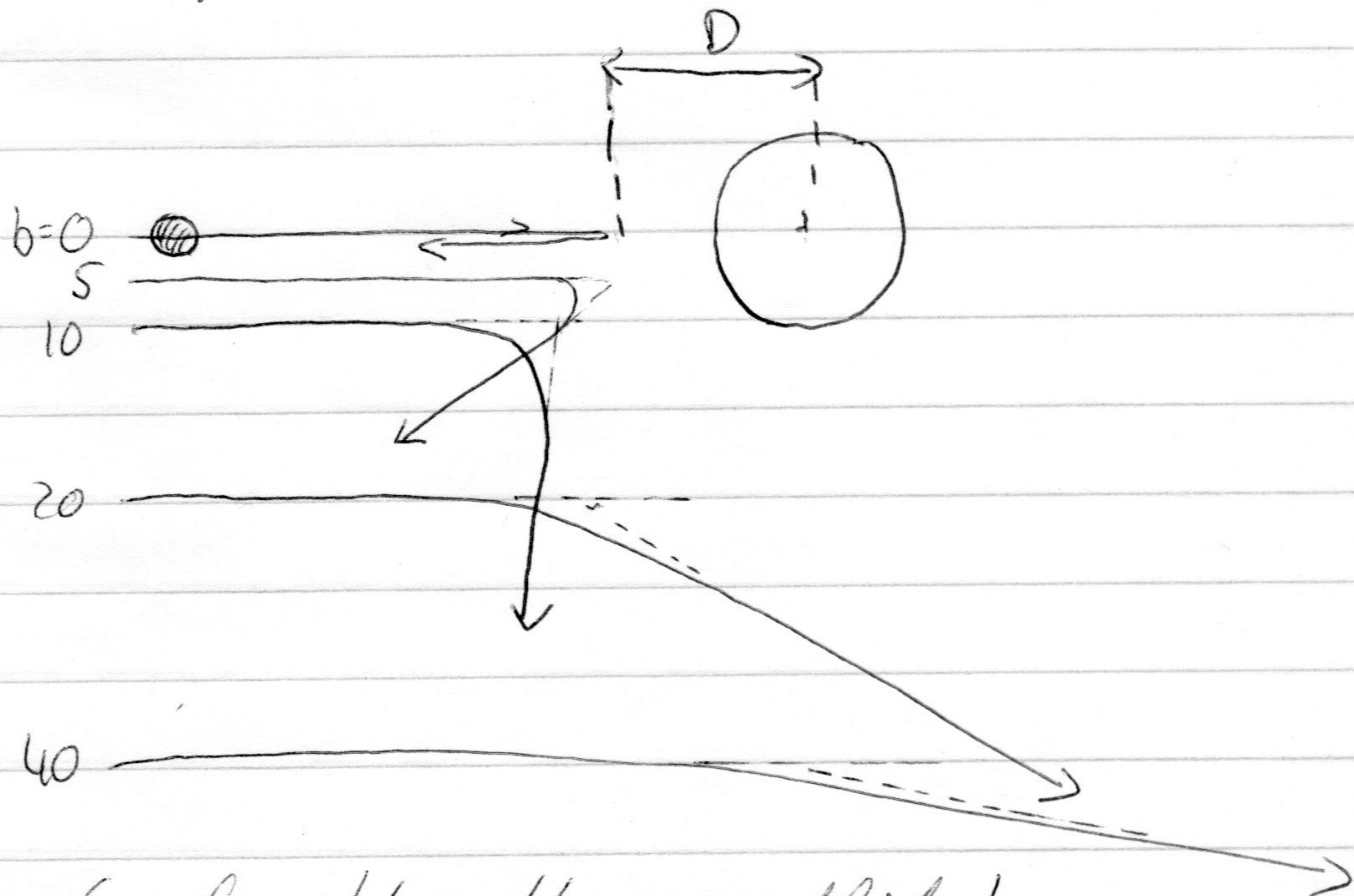
15 74°

20 59°

40 32°

80 16°

160 8°



Reichweite der Coulombkraft unendlich!

$$\text{mit } b = \frac{D}{2} \cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{D \cos(\vartheta/2)}{2 \sin(\vartheta/2)} \leadsto \frac{db}{d\vartheta} = \frac{D}{4} \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}$$

$$\text{und } \frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{b db}{\sin^2 \vartheta} = \frac{D \cos(\vartheta/2)}{2 \sin(\vartheta/2)} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{D}{4} \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}$$

$2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} = \frac{D^2}{4} \frac{1}{(1 - \cos \vartheta)^2}$$

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{e^4 z^2 z^2}{16 T_0^2} \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$$

Rutherford-
Streuquer-
schnitt

etwas anders geschrieben:

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \left(\frac{z^2}{4}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{\hbar c}{T_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} \quad \text{mit } \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1.44 \text{ MeV fm}}{197 \text{ MeV fm}}$$

$= \frac{1}{137} = \alpha$

α : dimensionslose Kopplungskonstante der elektromagn. Wechselwirkung

in dieser Form kann Stefanformel generalisiert werden: Strahlungsquerschnitt proportional zum Quadrat der Stärke der Wechselwirkung, proportional zum Quadrat der Ladungen, universell proportional zum Quadrat der einfallenden kinetischen Energie, universell prop. zur vierten Potenz von $\sin(\theta/2)$

⇒ Fig 6-1

wichtig: dies gilt nur mit der Bedingung daß Ladungsverteilungen von α -Teilchen und Elektronen nicht überlappen. Sonst Abweichung, da Coulombkraft nach Gauss'scher Sat die eingeschlossene Ladung umßt

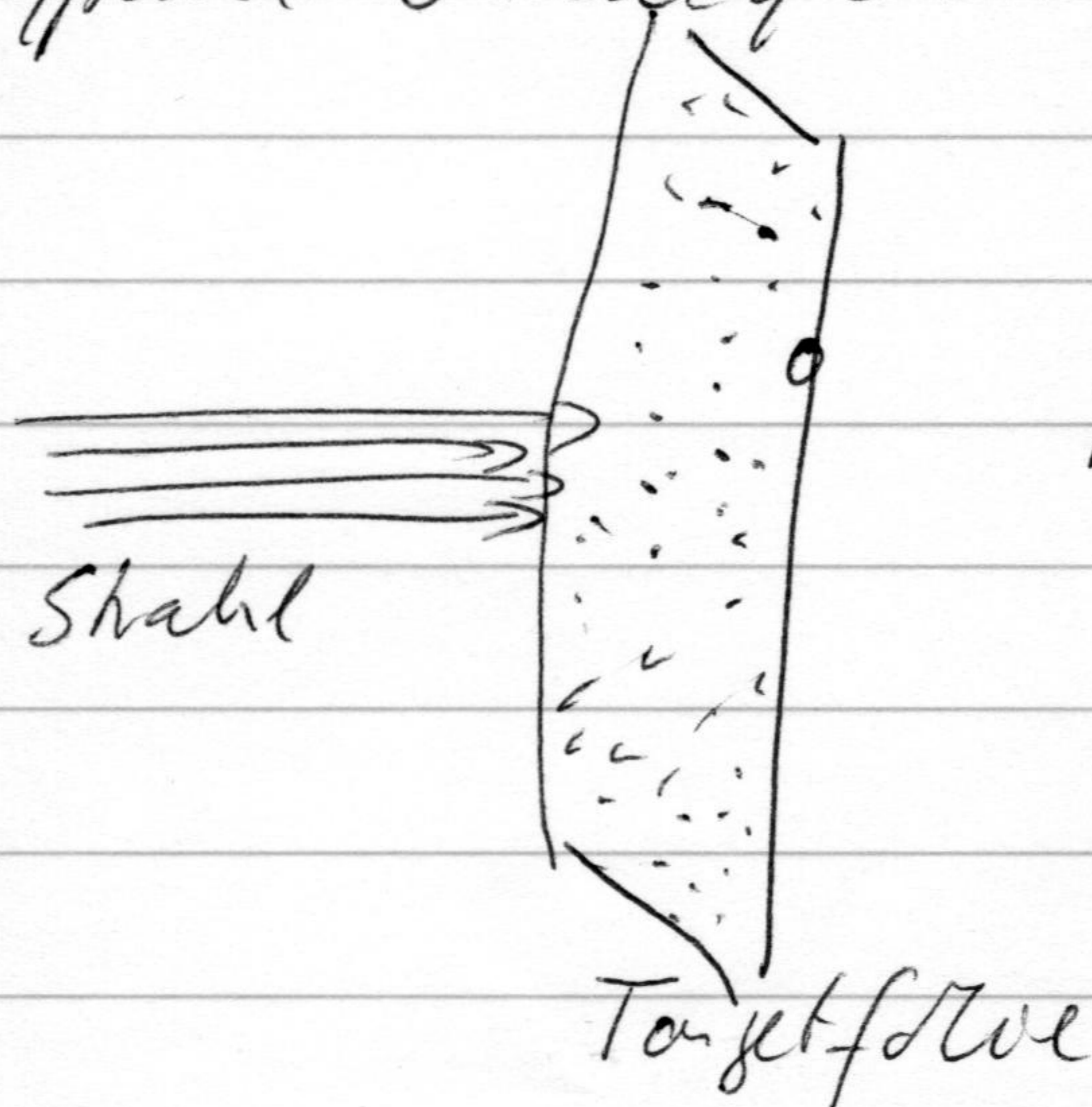
Demo Rutherford-
streuung

mehr als ein Targetteilchen (Streuzentrum):
 Strahlrate R_i und Targetfolie der Dichte ρ
 Anzahl der Streuzentren pro Flächeneinheit

$$C = \frac{\text{Streuzentren}}{\text{Volumen}} \cdot \text{Targetdichte} = \frac{\rho \cdot N_A \cdot t}{A}$$

ρ Dichte
 A Atomgewicht
 N_A Avogadrozahl

typische Strahlquerschnitt $<$ Targetfolienquerschnitt
 $>$ einzelnes Streuzentrum



jetzt wird

$$R = R_i \cdot C \cdot \delta \quad \text{und}$$

$$\frac{dR}{d\Omega} = R_i \cdot C \cdot \frac{d\delta}{d\Omega}$$

Targetfolie

Beispiel: Au-Folie von $t = 1 \mu\text{m}$

$$C = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 19.3 \text{ g} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}}{\text{mol cm}^3 \cdot 197 \text{ g}} = 5.9 \cdot 10^{18} / \text{cm}^2 = 5.9 \cdot 10^{-8} / \text{fm}^2$$

welcher Bruchteil der einfallenden Strahlteilchen
 (10 MeV α) wird in einem Detektor mit 15° Öffnungswinkel,
 der unter 90° platziert ist, gemessen?

$$\left. \frac{dR}{d\Omega} \right|_{90^\circ} = R_i C \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4(45^\circ)}$$

$$\frac{dR_{90^\circ}}{R_i} = d\Omega \cdot C \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4(45^\circ)} = 1 \cdot \frac{5.9 \cdot 10^{-8} \cdot 22.8^2 \text{ fm}^2}{\text{fm}^2 \cdot 16} \frac{1}{\sin^4(45^\circ)}$$

$$= 7.6 \cdot 10^{-6}$$

Bruchteil bei $\vartheta > 60^\circ$?

$$\frac{dR_{>60}}{R_i} = \int_0^{60^\circ} \frac{C D^2}{16} \frac{2\pi \sin\vartheta d\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)} = \frac{4\pi C D^2}{16} \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)} d\vartheta$$

(mit $\sin\vartheta = 2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$)

6-11a

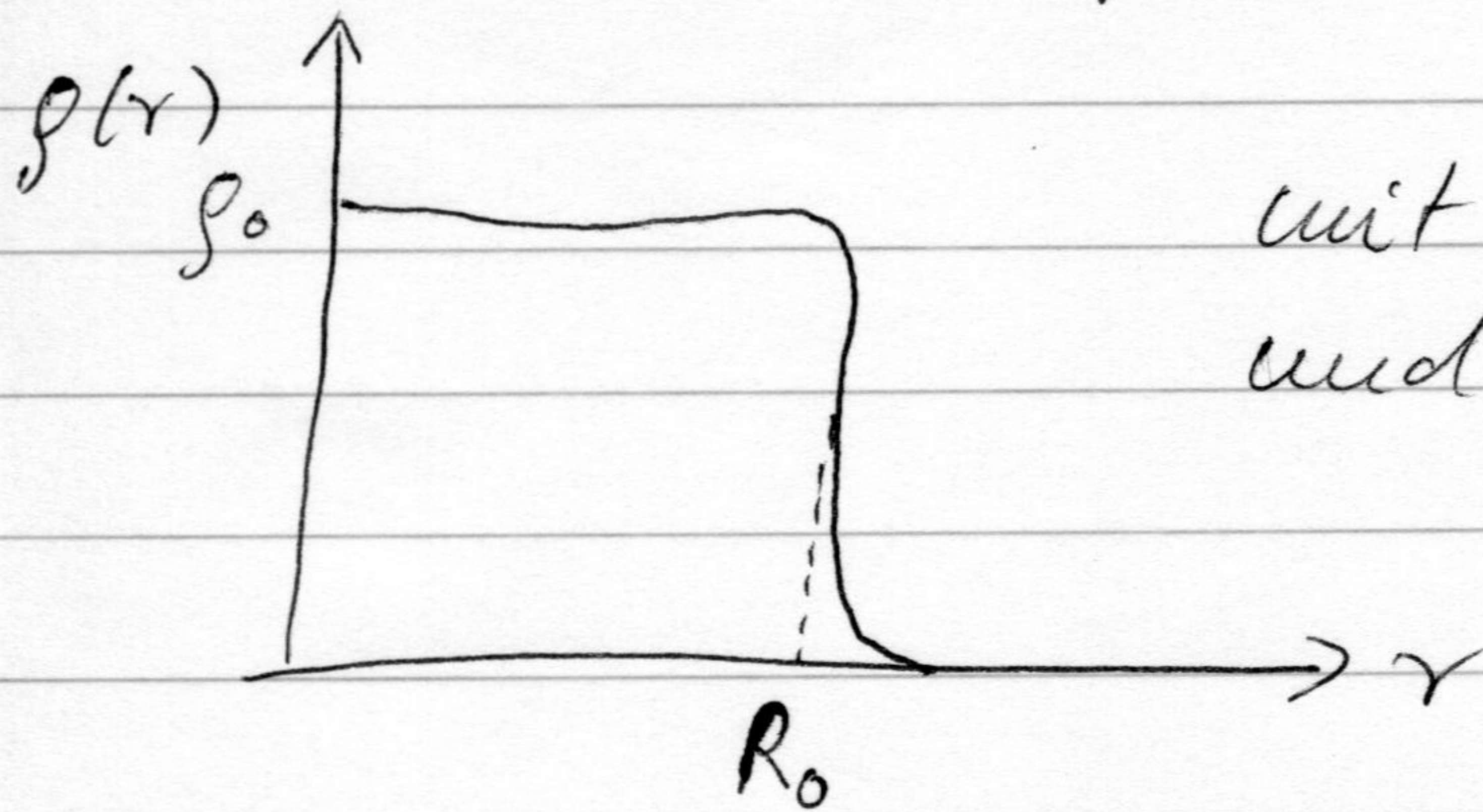
$$\frac{dR_{260}}{R_i} = \frac{\pi C D^2}{4} \int_{\sin 30 = 0.5}^{\sin 90 = 1} 2 \sin^{-3}(\theta/2) d \sin(\theta/2) = \frac{\pi C D^2}{4} \left[-\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right]_{0.5}^1$$

$$= 7.2 \cdot 10^{-5}$$

Messung der Grösse des Atomkerns mit Rutherfordstreuung: wenn T_0 grösser wird werden irgendwann Ladungsverteilung des Atomkerns und des α -Teilchens überlappen, Potential ändert sich und Kernkraft fängt an zu wirken \rightarrow beobachtete Abweichung $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ von $\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$

aus Abweichung $\frac{d\sigma/d\Omega_{\text{exp}}}{d\sigma/d\Omega_{\text{Rutherford}}} \Rightarrow \boxed{\text{Fig 6-2}}$

Kann man Ladungsverteilung des Kerns genau vermessen und findet



mit $R_0 \approx 1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$
und $\rho_0 \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$

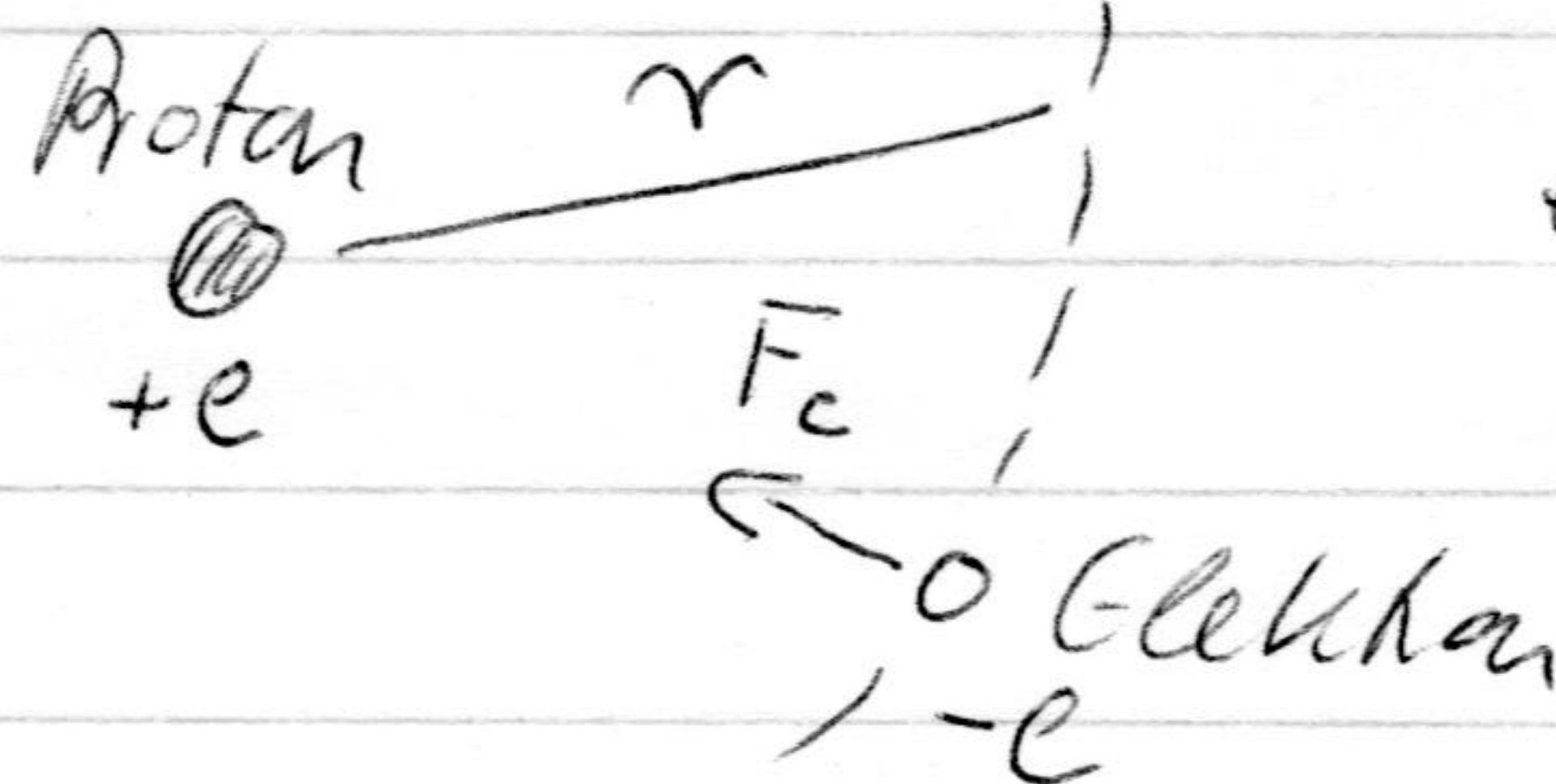
kurze Diskussion Proton, Ladungsverteilung des Protons, Quarks anhand Fig. 6-2.

6.3. Rutherford-Modell des Atoms

Kleiner, sehr massiver und positiv geladener Atomkern umgeben von Elektronen.

Elektronen können nicht stationär bei bestimmtem Abstand sein - Atom würde mit Coulombkraft kollabieren. Für bewegte Elektronen gibt es dynamisch stabile Orbitale, für die die attraktive Coulombkraft F_e zwischen Elektron und Kern eine konstante Zentripetalkraft F_c schafft, die Elektronen auf Kreisbahnen um Kern hält (in Analogie zu Planeten und Gravitation). → werden später korrekter diese Idee sehen.

z.B. Wasserstoff



$$F_e = \frac{e^2}{r^2} = F_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$e^2 = mv^2 r \quad \text{oder}$$

$$v = \sqrt{\frac{1.44 \text{ MeV fm}}{m r}}$$

Elektron hat kinetische Energie $T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1.44 \text{ MeV fm}}{2r}$,
potentielle Energie $V_e = -\frac{1.44 \text{ MeV fm}}{r}$

und totale Energie (nicht relativistisch)

$$E = V + T = -\frac{1.44 \text{ MeV fm}}{2r} = -\frac{0.72 \text{ MeV fm}}{r} = -\frac{0.72 \cdot eV \text{ nm}}{r}$$

↑ negativ: Elektron ist gebunden!

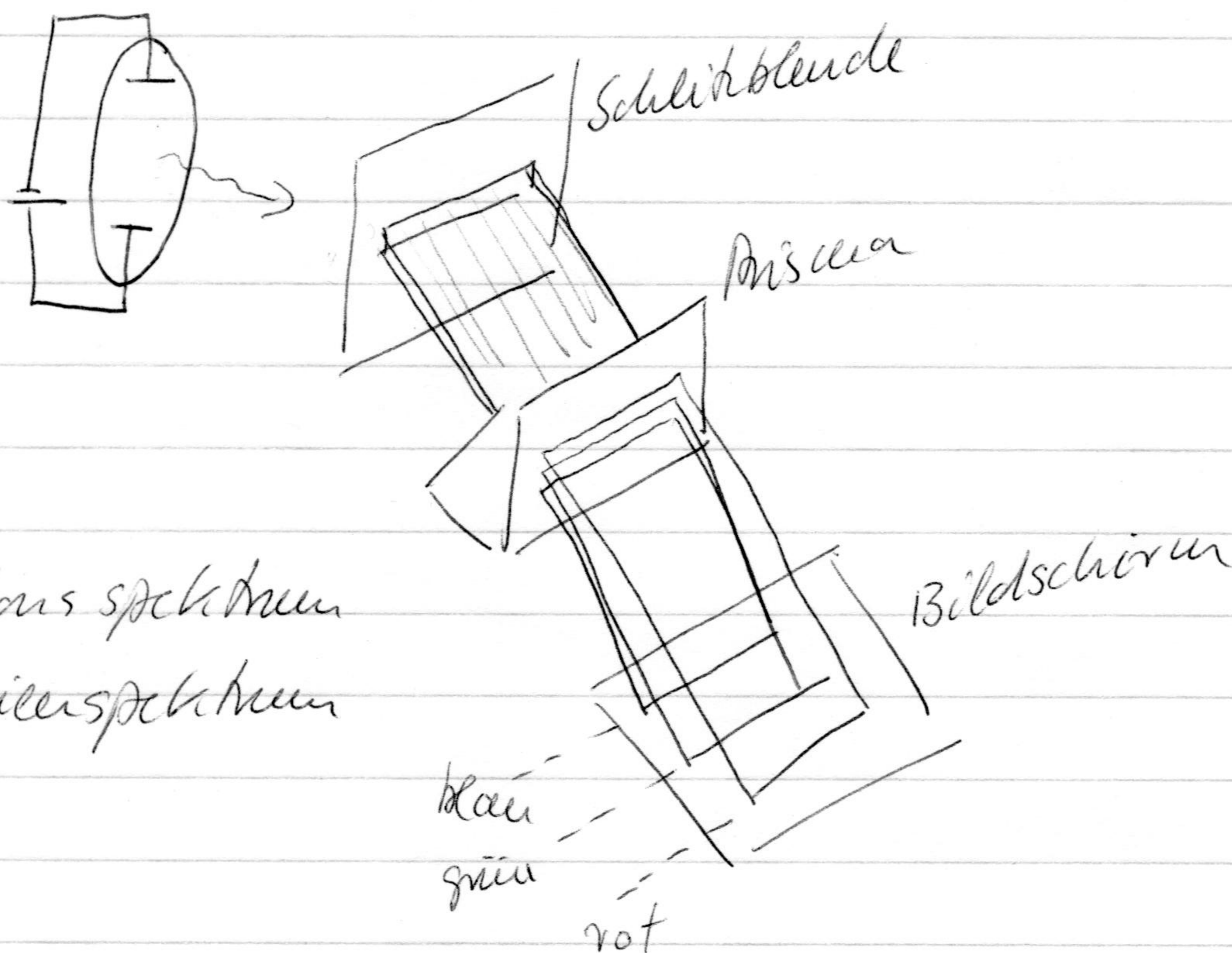
Experimentelles Befund: 13.6 eV benötigt, um Was-

gasstoff zu ionisieren

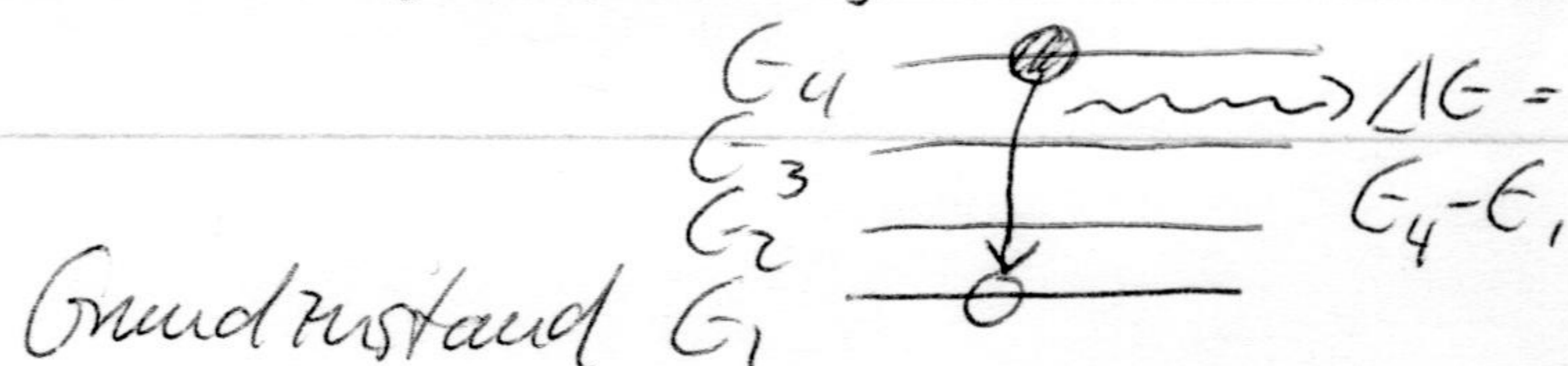
$$13.6 \text{ eV} = \frac{0.72 \text{ eV nm}}{r} \quad \leadsto \quad r = 0.53 \text{ \AA} = 0.053 \text{ nm} \\ \equiv \text{Bohr-Radius}$$

6.4. Atomare Spektren

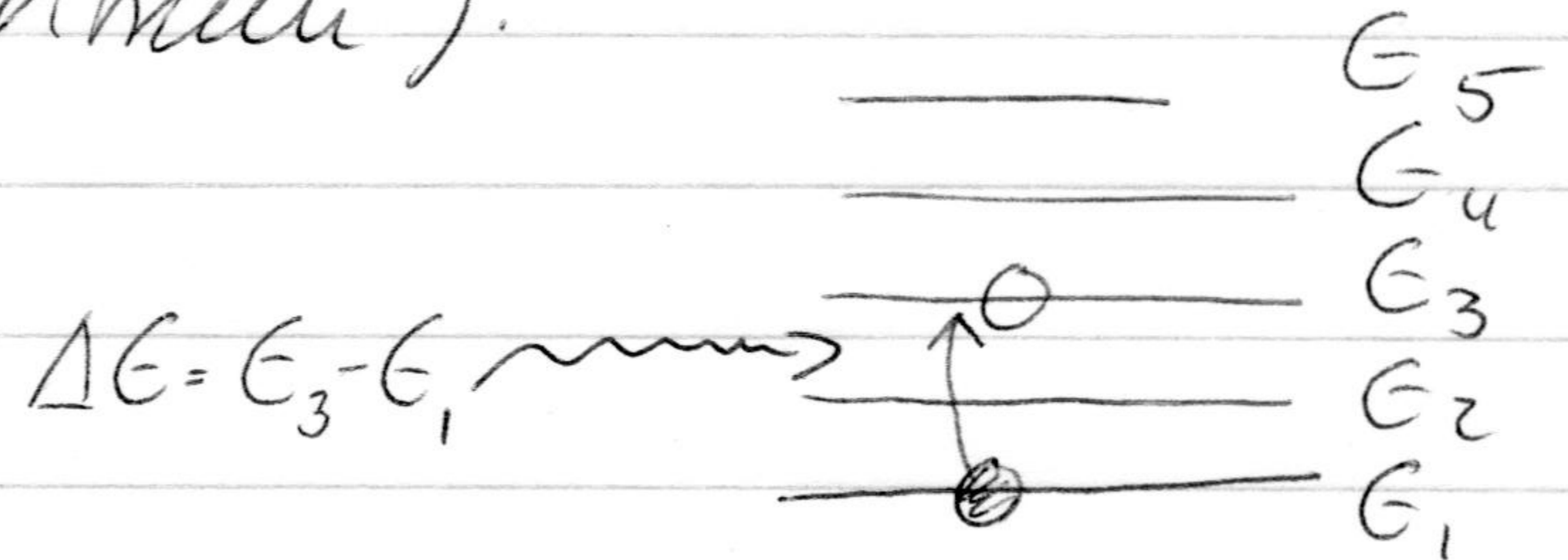
Gas aus Atomen kann angeht werden, z.B. durch elektrische Entladung; es emittiert Strahlung, die nur bestimmte Wellenlängen enthält und einen für das Element charakteristischen "Fingerabdruck" darstellt.



Atom hat viele diskrete Energiezustände. Elektrische Entladung regt atomares Elektron in ein höheres Energieniveau an. Nach kurzer Zeit fällt es unter Emission von Strahlung in den Grundzustand zurück. E_5

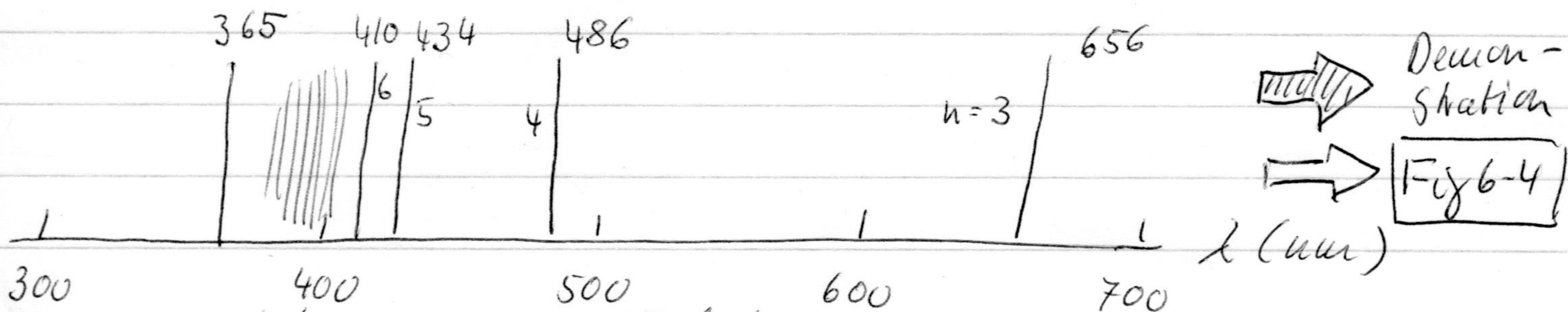


ähnlicher wie: wenn breites Spektrum von Wellenlängen einstrahlt wird (weißes Licht) werden nur bestimmte Komponenten absorbiert, die dann im Spektrum fehlen (dunkle Linien im Absorptionsspektrum).



① Messung von Emissions- oder Absorptionsspektrum
→ Information über Energielevels des Atoms

Wasserspektrum: Emission oder Absorption im und nahe dem sichtbaren Bereich:



Serie von 4 Linien → zunächst mit abnehmender Wellenlänge kommen Linien sich immer näher und konvergieren gegen ein Limit der Serie bei 364.6 nm; zuerst von J. Balmer 1885 entdeckt "Balmer-Serie"

Balmer fand einfache Formel, die Wellenlängen beschreibt, nämlich $\lambda = \frac{C n^2}{n^2 - 4}$ mit $n = 3, 4, 5, 6$

$C = 364.56 \text{ nm}$ und Voraussage weitere Linien bei kleinerer Wellenlänge $n = 7, 8, \dots, \infty$ Ⓢ
später entdeckt.

Balmer generalisiert Formel $\rightarrow \lambda = \frac{C_m n^2}{n^2 - m^2}$
 n, m ganze Zahlen und $n > m$
 $m > 0$

Generalisierung der Balmerformel durch
 W. Ritz und J.R. Rydberg für andere Elemente
 $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ R unterschiedlich für jedes Element
 für Wasserstoff $R_H = 1,097 \cdot 10^7 / \text{m}$

Balmer-Serie $R_H = \frac{4}{C} = \frac{4}{364,6 \text{ nm}}$ ✓ und

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{\underbrace{4}_m} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, \dots, \infty$$

Später wurden weitere Serien für Wasserstoff entdeckt.

Serie im UV (Lyman-Serie) $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, \dots$
 zwischen 90-125 nm

Viele Serien im IR
 Paschen-Serie $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, \dots$ 0,7-1,8 μm

Brackett $\left(\frac{1}{4^2} - \dots \right)$ 1,5-4 μm

Pfund $\left(\frac{1}{5^2} - \dots \right)$

Verknüpfung von Spektrum und Lichtenergien
 zu Energieintervallen des Atoms wie Wasserstoff-
 atom \leftrightarrow Bohr-Modell

6.5. Bohr-Modell des Atoms (1913)

Spektren werden erklärt mit 2 Annahmen

1) Elektron bewegt sich in kreisförmigen stationären Orbitalen um das Proton
Coulombkraft \leftrightarrow Zentripetalkraft

(Rutherford) $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$ $E = - \frac{0.72 \text{ eV nm}}{r}$

2) Nur Orbitale sind zulässig, in denen der Bahndrehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches von \hbar ist. $l = n\hbar$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Drehimpulsquantisierung, warum?

Problem: Ladung auf kreisförmiger Beschleunigung $a_c = v^2/r$, sollte Strahlung (Bremsstrahlung) emittieren; d.h. Elektron sollte kontinuierlich Energie verlieren \rightarrow Spirale nach innen, Kollaps des Atoms.

Bohr postuliert: Elektron in stationären Orbital mit $l = n\hbar$ strahlt keine Energie ab, d.h. es ist stabil (Begründung später; siehe Kapitel 7, 8).

Bedingung für $l \rightarrow$ nur bestimmte Radien erlaubt.

$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \sim$ Kreisbahn vereinfacht zu $l = r p$
da $p \perp r$ und mit deBroglie $2\pi r = n\lambda$
 $l = mvr = n\hbar \sim r_n = \frac{n\hbar}{mv}$ oder $v = \frac{n\hbar}{mr_n}$

\rightarrow stehende Welle \Rightarrow Fig 6-5

6-16

benutze Ausdruck in kinetischer Energie

$$T_e = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{h}{m_e r_n} \right)^2 = \frac{0.72 \text{ eV nm}}{r_n} = \frac{e^2}{2 r_n}$$

$$\leadsto r_n = \frac{h^2}{e^2 m_e} \quad n^2 = \frac{(hc)^2}{e^2 m_e c^2} n^2$$

$$\frac{(197 \text{ eV nm})^2}{1.44 \text{ eV nm} \cdot 5.11 \cdot 10^5 \text{ eV}} = 0.053 \text{ nm} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Bohr-} \\ \text{Radius} \end{array} \right\}$$

$$= 0.53 \text{ \AA} \equiv a_0$$

Erlaubte Radien für Elektron im Wasserstoff

$$r_n = a_0 n^2, \text{ also } r_1 = a_0 \quad r_2 = 4a_0 \text{ etc.}$$

das bestimmt Energielevels für

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} = -\frac{0.72 \text{ eV nm}}{0.053 \text{ nm} \cdot n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

n	radius	Energy
n=∞		0
n=5	25 a ₀	-0.54 eV
n=4	16 a ₀	-0.8 eV
n=3	9 a ₀	-1.5 eV
n=2	4 a ₀	-3.4 eV
n=1	r = a ₀	E _n = -13.6 eV

Zunehmend
dichtere Energie-
levels weit
E → 0

Energiedifferenzen zwischen zwei Zuständen E_n und E_m

$$E_m - E_n = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = -13.6 \text{ eV} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{13.6 \text{ eV}}{hc} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$\frac{13.6 \text{ eV}}{1240 \text{ eV nm}} = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \text{ Rydbergkonstante } R_H$$

$$= \frac{e^4 m_e c^2 \pi}{(hc)^3}$$

z.B. $n_1=2$ $n_2=1$ $\Delta E = \frac{13.6}{1} \text{ eV} - \frac{13.6}{4} \text{ eV} = (13.6 - 3.4) \text{ eV}$
 $= 10.2 \text{ eV}$

dazu gehört Wellenlänge $\lambda = \frac{1240 \text{ eV nm}}{10.2 \text{ eV}} = 121.6 \text{ nm}$

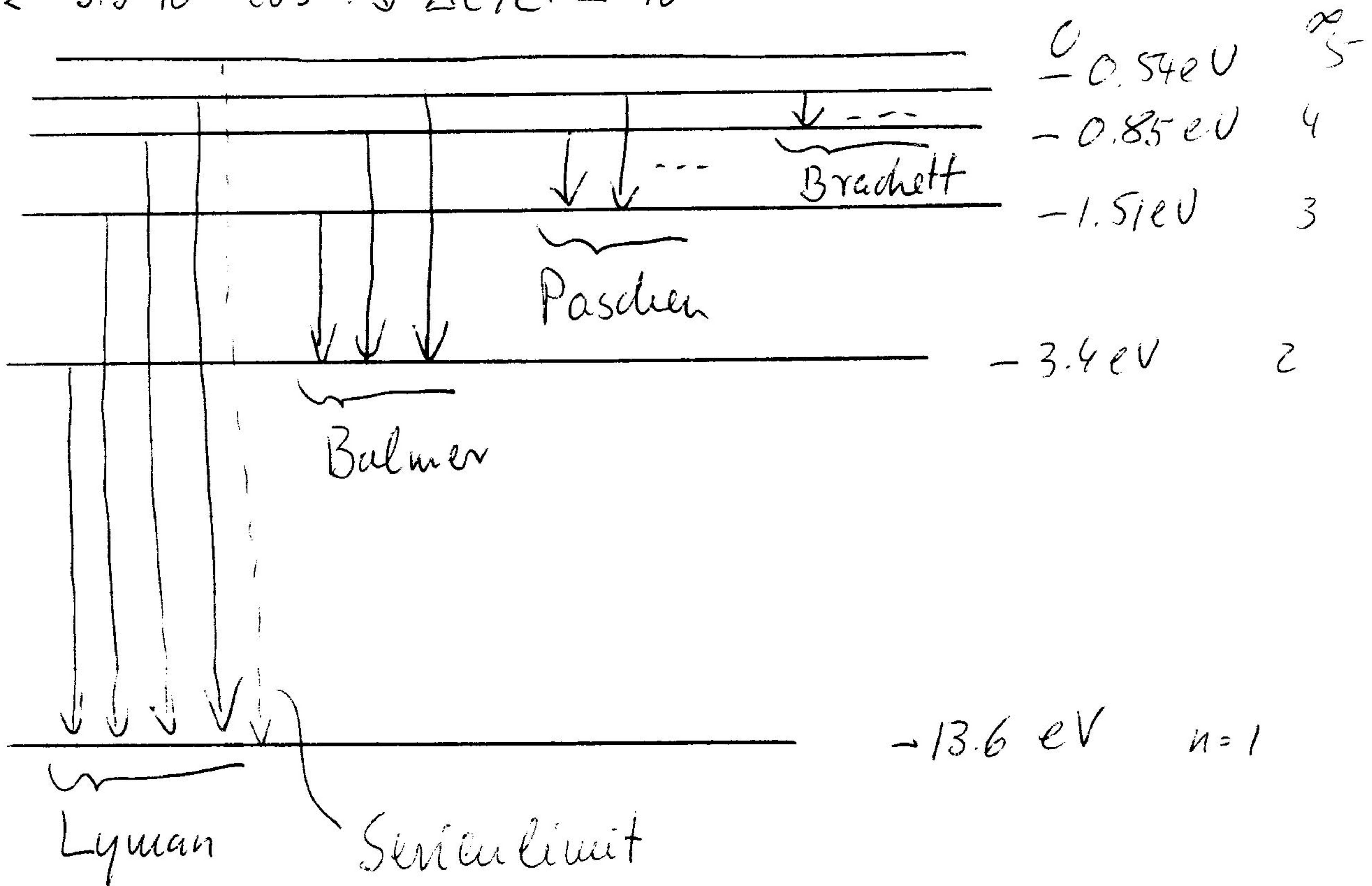
$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$ } längste Wellenlänge der Lyman Serie

alle Übergänge nach $n=1$ Lyman Serie
 $n=2$ Balmer
 $n=3$ Paschen

⇒ Fig 6-3

typischer Lebensdauer $\tau = 10^{-8} \text{ s}$

$\Delta E \cdot \tau \geq \hbar/2 = 3.3 \cdot 10^{-16} \text{ eV s} \sim \Delta E/E_i \approx 10^{-8}$



H. Bohr Nobelpreis 1922 für Bohr Modell

Vergallgemeinerung des Bohrmodells für
Atom mit $Z > 1$, aber nur einem
Elektron

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2 Z}{r^2} \quad \text{und} \quad mvr_n = n\hbar$$

$$\leadsto r_n = \frac{(\hbar c)^2 n^2}{e^2 \cdot m_e c^2 \cdot Z} = \frac{a_0}{Z} n^2 \quad \text{Radien kontrahiert um Faktor } Z$$

Energie niveaus: $T = \frac{e^2 Z}{2r_n} \quad V = -\frac{e^2 Z}{r_n}$

$$E = -\frac{e^2 Z}{2r_n}$$

setze r_n von oben ein $\rightarrow E = -\frac{e^4 m_e c^2 Z^2}{2(\hbar c)^2} \frac{1}{n^2}$
 $= -13.6 \text{ eV} \frac{Z^2}{n^2}$

anwendbar z.B. für einfach ionisiertes Helium, He^+ , zweifach ionisiertes Lithium Li^{2+} etc. ...

Muonische Atome: statt Elektron kann ein Teilchen mit ganz ähnlichen Eigenschaften aber ca 200 mal größerer Masse, das Muon am Kern gebunden sein

$$m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV} \rightarrow \text{Bindungsenergie größer}$$

Wenn Masse Kern und Masse des 'elektronartigen' Teilchens nicht sehr verschieden, dann muß berücksichtigt werden, daß beide um den gemeinsamen Schwerpunkt rotieren

das wird korrekt berücksichtigt, wenn 'Elektronmasse' durch reduzierte Masse ersetzt wird, also

$$\mu = \frac{m_e m_n}{m_e + m_n} \approx m_e \quad \begin{array}{l} 0.5107 \text{ MeV} \\ 0.05\% \text{ Korrektur} \end{array}$$

mit Nukleonmasse $m_n c^2 = 939 \text{ MeV}$
 $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$

aber für Muon statt Elektron

$$\mu = \frac{107 \cdot 939}{107 + 939} \text{ MeV} = 96.1 \text{ MeV} \quad 10\% \text{ Korrektur}$$

Energie des gebundenen Muons

$$E_n = -2566.1 \text{ eV} \frac{1}{n^2} = -2.6 \text{ keV} \frac{1}{n^2}$$

Faktor 189 Stärke gebunden

$$\text{und } r_n = \frac{(\hbar c)^2 n^2}{e^2 \mu} = 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ nm} \cdot n^2 \\ = 0.28 \text{ pm} \cdot n^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Faktor 189} \\ \text{näher am} \\ \text{Kern} \end{array} \right\}$$

wird stabil!

Positronium: ähnlich wie Wasserstoff, aber
 ----- Proton ersetzt durch positive geladene Teilchen wie Elektron, $e^+ \leftarrow$ Positron.

Gleiche Masse wie Elektron

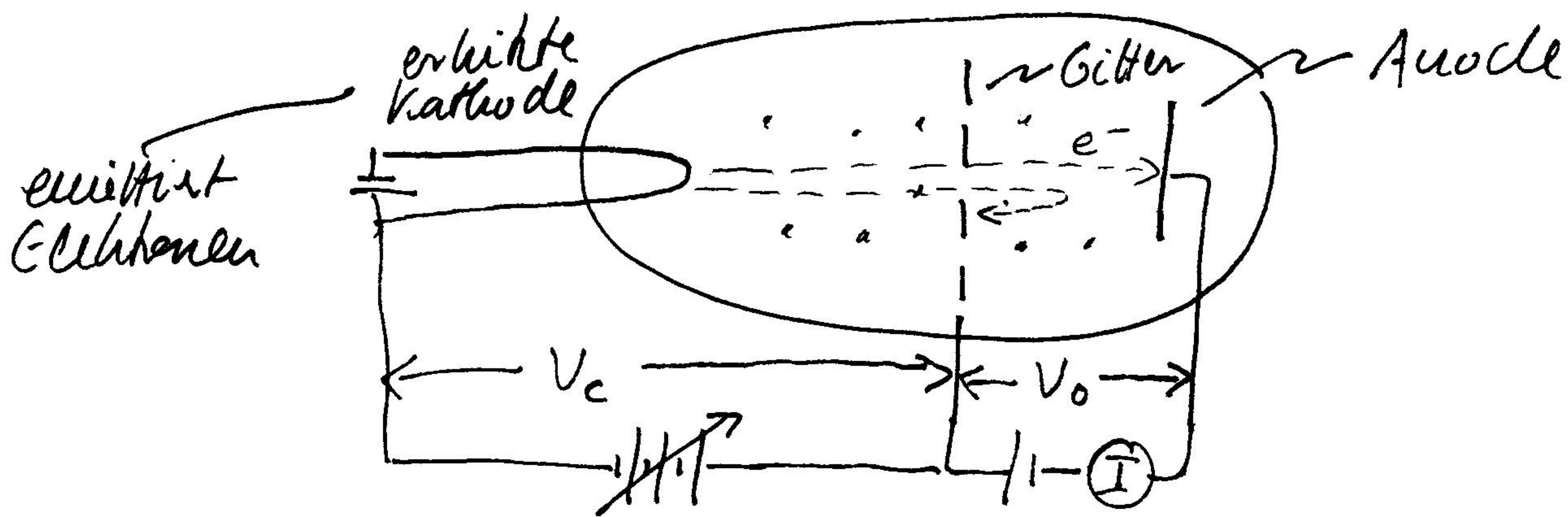
$$\text{d.h. } \mu = \frac{m_e^2}{2m_e} = \frac{m_e}{2} \quad \text{entsprechen}$$

Radius Faktor 2 größer als Proton, Energien Faktor 2 geringer.

6.6. Franck - Hertz - Experiment

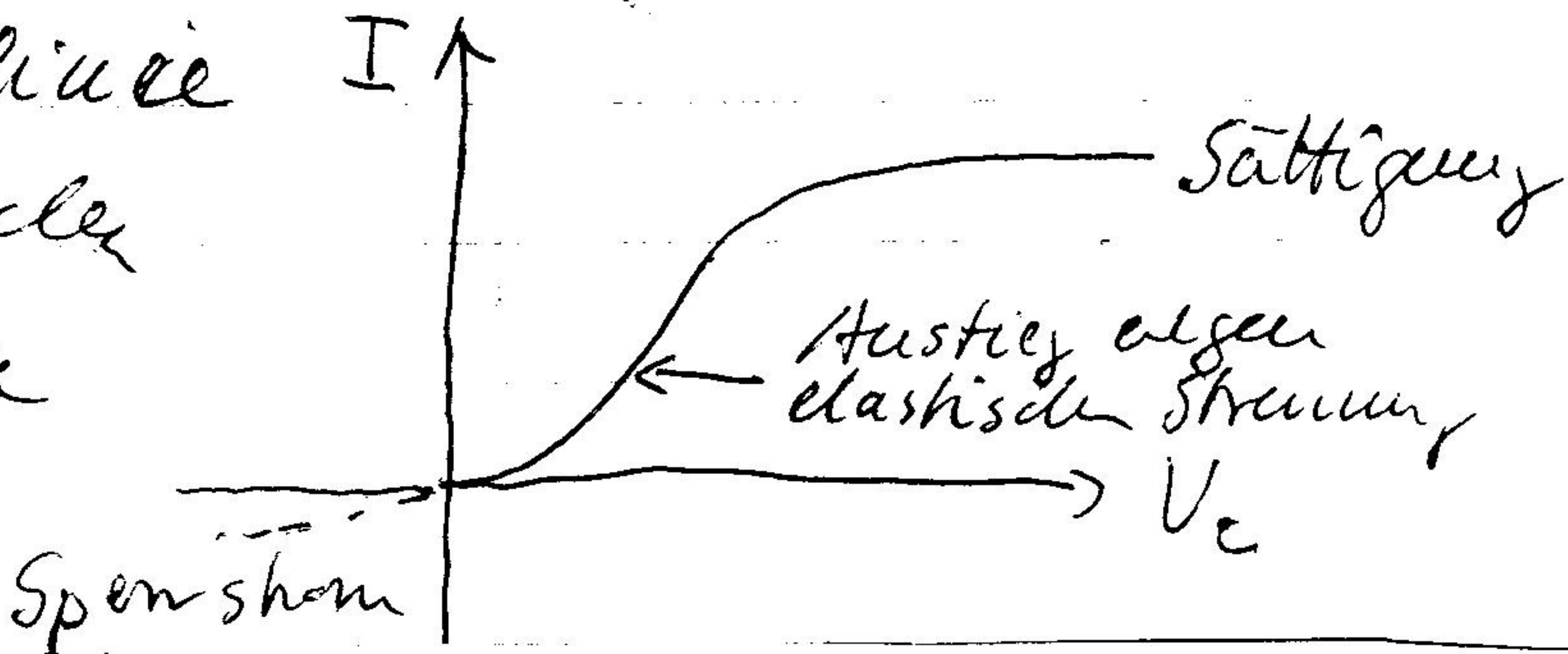
1914 wichtiges Experiment zur Atomstruktur
James Franck u. Gustav Hertz, gibt
zusätzliche Bestätigung des Bohrmodells
ein Jahr nachdem Modell vorgeschlagen
wurde. Inelastische Elektronenstreuung an
Hg-Atomen \rightarrow elektronische Anregung Hg-Atom

- Vakuum Röhre mit 3 Elektroden (Triode)
gefüllt mit Quecksilberdampf

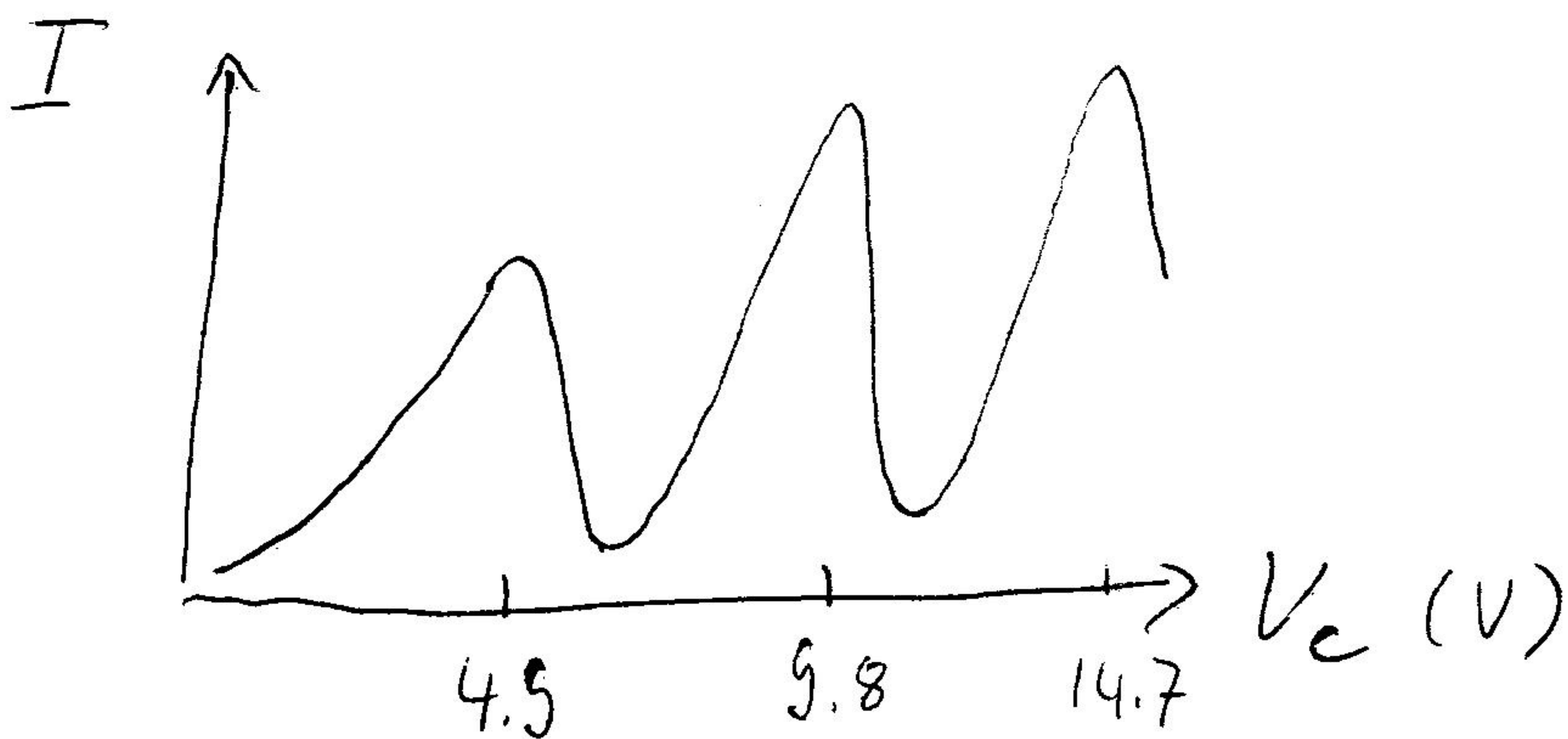


Elektronen werden auf Gitter zu beschleunigt
mit variabler Spannung $V_c \sim$ kinetische
Energie am Gitter eV_c ;
Zwischen Gitter und Anode konstantes, leicht
retardierendes Potential V_0 , typisch 1.5V
kinetische Energie an der Anode $eV_c - eV_0$
nur Elektronen mit minimal kinetischer
Energie am Gitter kommen an und tragen
zu Strom I bei. Gemessen I gegen V_c

erwartete Diodenkennlinie I
Strom sollte mit wachsender
 V_c anwachsen und sättigen



stattdessen fällt Strom rapide ab sobald $V_c = 4.9 \text{ V}$ erreicht; danach wieder Ausstieg und bei $V_c = 9.8 \text{ V} = 2 \cdot 4.9 \text{ V}$ erneuter Abfall



→ Fig 6-6

Interpretation: Wenn kinetische Energie der Elektronen 4.9 eV erreicht, können sie Quecksilberatome in angeregten Zustand versetzen. Direkt bei $V_c = 4.9 \text{ V}$ aber in direkter Nähe des Gitters möglich, mit zunehmenden V_c auch schon vorher → Strom fällt mit wachsendem V_c ; schließlich haben Elektronen nach Anregung von Hg-Atom noch genug kin. Energie um zur Anode zu kommen → Strom wächst wieder an. Bei $2 \cdot 4.9 = 9.8 \text{ eV}$ können sie auf ihrem Weg zwei Hg-Atome anregen → wieder Abfall von I .

$$T_{\text{anode}} = eV_c - eV_a - \Delta E$$

— Anregungsenergie Hg, bzw $2 \times \dots$, etc
4.9 eV

zugehörige Wellenlänge $\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{4.9 \text{ eV}} = 253 \text{ nm}$
stärkste Linie im

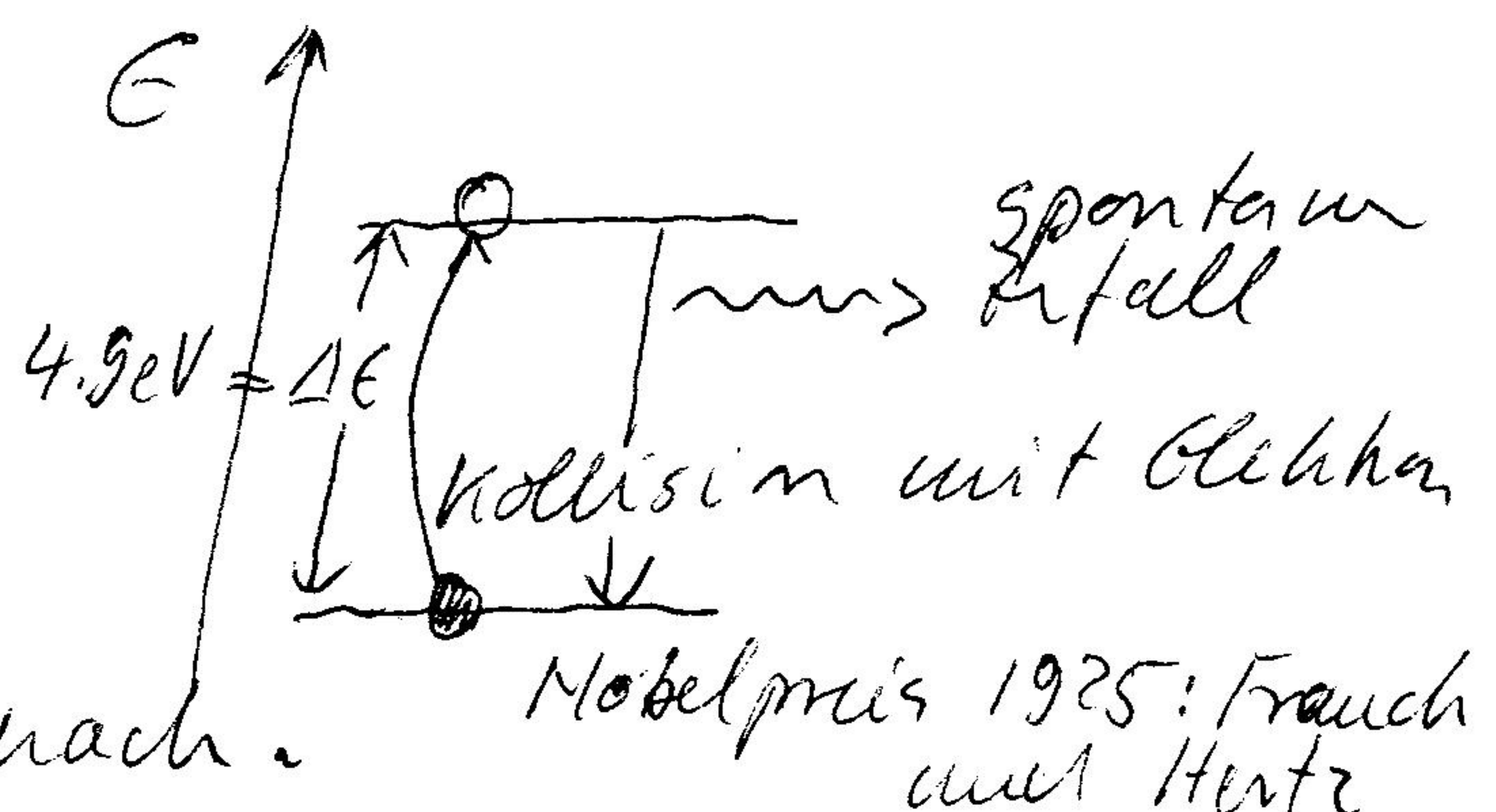
Quecksilberspektrum.

in einem 2. Experiment

weist Franck auch die

Emission von Photonen mit

4.9 eV bzw 253 nm nach Anregung nach.



6.7. Röntgenstrahlung

1895 W. Röntgen Entdeckung
(siehe Kap. 3), jetzt quantitatives Verständnis möglich

1913 begann Henry Moseley systematische Studie von Röntgenstrahlung aller bekannten Elemente von Al bis Gold durch Beschleunigung u. Elektronen. Messung der Wellenlänge durch Bragg Technik: Streuung am Kristallgitter (zur Erinnerung $n\lambda = 2d \sin \theta$).

Beobachtung: jedes Element produziert 2 Wellenlängen mit unterschiedlicher Intensität K_α (stärker) u. K_β (schwächer). Für schwerere Elemente 5 zusätzliche Linien $L_\alpha, \dots, L_\epsilon$

Frequenz korreliert mit Kernladungszahl Z
nach $\nu = a(Z-b)^2 \sim \sqrt{\nu}$ gegen Z linear

für K-Linien $b=1$ } a versch. \Rightarrow Fig 6-7
für L-Linien $b=7.4$ } für K_α, K_β, \dots

mit Bohrmodell entstehen die
K-Linien entstehen dadurch daß Elektron aus
 $n=1$ Zustand herausgeschlagen wird und
Elektron aus $n=2$ (K_α) oder $n=3$ herausfällt
(K_β)

und Emission der Energiedifferenz als Photon (Röntgenstrahlung). Elektron sieht Kernladung vor sich um 1 durch 2. Elektron in $n=1$ Niveau.

L-Linien: Übergänge nach $n=2$ von $n=3$ (L_α), $n=4 \rightarrow 2$ (L_β) etc. werden sehen daß 2 Elektronen in $n=1$ und restliche 7 Elektronen in $n=2$ effektive Abschirmung wie $(Z-7.4)$ bewirken.

fehlende Elemente: Moseley konnte z.B. zeigen daß $Z=43, 61, 75$ fehlten Elemente Tc, Pu, Rh wurden spät entdeckt bzw. hergestellt (keine natürlichen Isotope von Technetium). (Promethium auch instabil, Rhenium stabiles Isotop)

Typische Energien von Röntgenstrahlen:
K-Linien

$$E_n = - \frac{13.6 \text{ eV} (Z-1)^2}{n^2}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -13.6 \text{ eV} (Z-1)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

typischer Energiebereich z.B. Cu $Z=29 \sim 8 \text{ keV}$
Pb $Z=82 \sim 67 \text{ keV}$

NB: werden später sehen, daß Berechnung der Abschirmung wegen komplizierter räumlicher Verteilung nicht so einfach ist. Wenn man allerdings Energiedifferenzen betrachtet, wie hier, kompensieren sich Abweichungen z.T. und gute Näherung. Moseley's Gesetz und Bohr-Modell